

Изотермическое скольжение квантового бозе-газа с зеркально-диффузным отражением от границы

А.Ю. Квашнин, А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет, ул. Радио, 10а, г. Москва, 105005, Россия

E-mail: a.kvashnin@bk.ru

Статья поступила в редакцию 26 октября 2009 г. после переработки 22 декабря 2009 г.

Получено решение задачи Крамерса об изотермическом скольжении квантового бозе-газа вдоль плоской твердой поверхности. Отражение молекул от стенки предполагается зеркально-диффузным. Используется модельное кинетическое уравнение с интегралом столкновений в форме τ -модели и с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости. Проведен анализ зависимости скорости скольжения от величины параметра, представляющего собой отношение химического потенциала к произведению постоянной Больцмана на абсолютную температуру.

Отримано розв'язок задачі Крамерса про ізотермічне ковзання квантового бозе-газу уздовж плоскої твердої поверхні. Відбиття молекул від стінки передбачається дзеркально-дифузійним. Використано модельне кінетичне рівняння з інтегралом зіткнень у формі τ -моделі та із частотою зіткнень, яка пропорційна молекулярній швидкості. Проведено аналіз залежності швидкості ковзання від величини параметра, що уявляє собою відношення хімічного потенціалу до добутку постійної Больцмана на абсолютну температуру.

PACS: 05.20.Dd Кинетическая теория;
05.30.Jr Бозонные системы.

Ключевые слова: задача Крамерса, зеркально-диффузное отражение, аналитическое решение, бозе-газ, изотермическое скольжение.

1. Введение

Кинетические процессы в разреженных газах, исследования которых восходят к работам Максвелла и Больцмана, продолжают оставаться предметом пристального внимания и в настоящее время. Изучение квантовых газов начинается с работы [1]. При этом квантовые газы изучались главным образом в рамках рассмотрения кинетики электронов в полупроводниках и металлах, а также кинетики фононов в конденсированных средах [2,3]. В то же время постоянный интерес представляет изучение влияния квантовых эффектов на кинетические процессы в молекулярных газах.

Для квантовых газов с постоянной частотой столкновений молекул задача Крамерса об изотермическом скольжении аналитически решена в [4] для ферми-газов, а в [5] — для бозе-газов. С аккомодационными граничными условиями эта задача решена в [6].

Предлагаемая работа посвящена решению задачи Крамерса для квантовых бозе-газов с частотой столкновений молекул, пропорциональной молекулярной

скорости. Квантовые газы с переменной частотой столкновений уже изучались в [7] и [8]. Задача о скачке температуры для бозе-газов была решена в [7]. В [8] задача Крамерса для ферми-газов аналитически решена при условии полностью диффузного отражения молекул от стенки.

Настоящая работа является обобщением работы [8] как на случай бозе-газов, так и на случай общих зеркально-диффузных граничных условий. Постановка задачи Крамерса изложена во многих монографиях (см., например, [9]). Полученное в работе решение содержит как частный случай известное решение для некувантовых газов [10], полученное при диффузных граничных условиях.

Явление изотермического скольжения газа вдоль поверхности состоит в возникновении движения газа вблизи поверхности. Поток газа в узком приповерхностном слое газа, называемом часто слоем Кнудсена, вызывается градиентом массовой скорости газа, заданным вдали от стенки. Задача Крамерса состоит в нахождении скорости изотермического скольжения.

2. Кинетическое уравнение для квантового бозе-газа и постановка задачи

Пусть бозе-газ занимает полупространство $x_1 > 0$ над плоской стенкой, лежащей в плоскости $x_1 = 0$ и движется вдоль оси y со скоростью $u_y(x_1)$. Скорость газа вдали от стенки линейно растет с расстоянием до стенки: $u_y(x_1) = U_{sl} + G_v x_1$, где G_v — градиент скорости газа, заданный вдали от стенки. Требуется найти скорость изотермического скольжения U_{sl} .

В качестве кинетического уравнения рассмотрим линейризованное БГК уравнение (Бхатнагар, Грос, Крук) для случая квантового бозе-газа с частотой столкновений молекул, пропорциональной модулю их скорости (см. [7]):

$$\frac{C_x}{C} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi(x, C) = \frac{3C_y}{8\pi l_1(\alpha)} \int C_y' C' \varphi(x, C') g(C') d^3 C'. \quad (1)$$

Здесь x — нормальная к стенке безразмерная координата, связанная с размерной соотношением $x = v_0 \sqrt{\beta} x_1$, v_0 — коэффициент пропорциональности из зависимости частоты столкновений от модуля скорости молекул $v = v_0 C$, $C = \sqrt{\beta} v$ — безразмерная скорость молекул, v — их размерная скорость, $\beta = m / (2kT)$, m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура,

$$l_n(\alpha) = - \int_0^\infty x^n \ln(1 - e^{-\alpha - x^2}) dx, \quad n = 0, 1,$$

$$g(C) = \frac{\exp(C^2 - \alpha)}{(-1 + \exp(C^2 - \alpha))^2},$$

$\alpha = \chi / (kT)$, χ — химический потенциал молекул.

Функция распределения f связана с функцией φ соотношением:

$$f(x, C) = f_0(C) + g(C)\varphi(x, C),$$

где $f_0(C)$ — абсолютный бозеан, $f_0(C) = (-1 + \exp(C^2 - \alpha))^{-1}$.

Если искать решение уравнения (1) в виде $\varphi = C_y h(x, \mu)$, $\mu = C_x / C$, то на функцию h получим следующее уравнение:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) h(x, \mu') d\mu'. \quad (2)$$

Безразмерная скорость газа вдоль оси y через функцию h выражается по формуле:

$$U(x) = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) h(x, \mu') d\mu'. \quad (3)$$

Сформулируем граничные условия:

$$h(+0, \mu) = (1 - q)h(+0, -\mu), \quad 0 < \mu < 1, \quad (4)$$

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$h_{as} = 2U_0 + 2g_v(x - \mu),$$

где $g_v = G_v / v_0$ — градиент безразмерной массовой скорости, q — коэффициент диффузности, $0 \leq q \leq 1$, $U_0 = \sqrt{\beta} U_{sl}$, U_0 — безразмерная скорость скольжения.

Требуется найти скорость скольжения газа U_0 и построить функцию $h(x, \mu)$. Для решения задачи (3)–(5) развивается метод, который является обобщением известного метода источника.

3. Аналитическое решение задачи

Заметим, что функция h_{as} является решением уравнения (2). Поэтому новая неизвестная функция $h_c = h - h_{as}$ также удовлетворяет уравнению (2) и граничным условиям:

$$h_c(+0, \mu) = h_0(\mu) + (1 - q)h_c(0, -\mu), \quad (6)$$

$$h_c(+\infty, \mu) = 0, \quad 0 < \mu < 1,$$

где $h_0(\mu) = -2qU_0 + 2(2 - q)g_v \mu$.

Для того чтобы включить граничные условия (6) в уравнение, продолжим функцию $h(x, \mu)$ на область $x < 0$ симметричным образом: $h(x, \mu) = h(-x, -\mu)$. Тем самым мы рассматриваем еще одну задачу (в области $x < 0$). Граничные условия обеих задач можно объединить следующим образом:

$$h_c(\pm 0, \mu) = h_0^\pm(\mu) + (1 - q)h_c(\mp 0, \mu), \quad (7)$$

$$\pm \mu > 0 \quad (|\mu| < 1),$$

$$h_c(\pm \infty, \mu) = 0, \quad \pm \mu < 0 \quad (|\mu| < 1). \quad (8)$$

Здесь $h_0^\pm(\mu) = -2qU_0 + 2(2 - q)g_v^\pm \mu$, $g_v^- = -g_v^+$.

Возьмем уравнение, содержащее оба граничные условия (7):

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = 2U_c(x) + |\mu| [h_0^\pm(\mu) - qh_c(\mp 0, \mu)] \delta(x), \quad (9)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака,

$$2U_c(x) = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) h_c(x, \mu') d\mu'. \quad (10)$$

Пусть, например, $0 < \mu < 1$. Проинтегрируем обе части уравнения по x от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$. Получаем, что

$$h_c(+\varepsilon, \mu) - h_c(-\varepsilon, \mu) = h_0^+(\mu) - qh_c(-0, \mu).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в этом выражении, получаем условие (7), отвечающее знаку «+».

Решая уравнение (9) при $x > 0, \mu < 0$, считая известной массовую скорость $U_c(x)$, получаем, удовлетворяя граничным условиям (7), (8), следующее решение:

$$h_c^+(x, \mu) = -\frac{e^{-x/\mu}}{\mu} \int_x^\infty e^{t/\mu} 2U_c(t) dt. \quad (11)$$

Аналогично при $x < 0, \mu > 0$ находим:

$$h_c^-(x, \mu) = \frac{e^{-x/\mu}}{\mu} \int_{-\infty}^x e^{t/\mu} 2U_c(t) dt. \quad (12)$$

С помощью (11), (12) уравнение (9) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) &= \\ &= 2U_c(x) + |\mu| [h_0^\pm(\mu) - qh_c^\pm(0, \mu)] \delta(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Решение уравнений (13) и (10) ищем в виде интегралов Фурье:

$$2U_c(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} E(k) dk, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} dk, \quad (14)$$

$$h_c(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} \Phi(k, \mu) dk. \quad (15)$$

При этом функция h_c^+ выражается через $E(k)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} h_c^+(x, \mu) &= -\frac{e^{-x/\mu}}{2\pi\mu} \int_x^\infty e^{t/\mu} dt \int_{-\infty}^\infty e^{ikt} E(k) dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx} E(k) dk}{1 + ik\mu}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$h_c^-(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx} E(k) dk}{1 + ik\mu}.$$

Таким образом, последние два равенства можно объединить в одно:

$$h_c(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx} E(k) dk}{1 + ik\mu}.$$

Используя четность $E(k)$, можно записать:

$$h_c^\pm(0, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{E(k) dk}{1 + k^2\mu^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{E(k) dk}{1 + k^2\mu^2}.$$

Подставляя последнее равенство вместе с интегралами Фурье (14) и (15) в уравнения (13) и (10), приходим к характеристической системе:

$$E(k) = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) \Phi(k, \mu) d\mu, \quad (16)$$

$$(1 + ik\mu) \Phi(k, \mu) = E(k) - 2qU_0 |\mu| + 2(2 - q)g_v^+ \mu^2 - \frac{q|\mu|}{\pi} \int_0^\infty \frac{E(k_1) dk_1}{1 + k_1^2 \mu^2}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), приходим к характеристическому интегральному уравнению:

$$E(k)L(k) = -2qU_0 T_1(k) + 2(2 - q)g_v^+ T_2(k) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty J_1(k, k_1) E(k_1) dk_1, \quad (18)$$

где

$$J_n(k, k_1) = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{t^n (1 - t^2) dt}{(1 + k^2 t^2)(1 + k_1^2 t^2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$T_n(k) = J_n(k, 0) = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{t^n (1 - t^2) dt}{1 + k^2 t^2},$$

$$L(k) = 1 - T_0(k) = k^2 T_2(k).$$

Решение уравнения (18) будем искать в виде

$$E(k) = 2(2 - q)g_v^+ \sum_{n=0}^\infty q^n E_n(k), \quad qU_0 = (2 - q)g_v^+ \sum_{n=0}^\infty q^n V_n.$$

Получаем систему зацепленных уравнений:

$$E_0(k)L(k) = -V_0 T_1(k) + T_2(k), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} E_n(k)L(k) &= -V_n T_1(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J_1(k, k_1) E_{n-1}(k_1) dk_1, \\ & \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что левая часть уравнения (19) имеет в точке $k = 0$ нуль второго порядка. Потребуем, чтобы и правая часть уравнения (19) имела в точке $k = 0$ ту же особенность, получаем

$$V_0 = \frac{T_2(0)}{T_1(0)} = \frac{8}{15}. \quad (21)$$

Из уравнения (19) с помощью (21) получаем

$$E_0(k) = \frac{V_0 T_3(k) - T_4(k)}{T_2(k)}. \quad (22)$$

Рассуждая далее точно так же, из уравнения (20) при $n = 1$ с использованием (22) получаем:

$$V_1 = -\frac{1}{T_1(0)\pi} \int_0^\infty T_1(k_1) E_0(k_1) dk_1 = 0,0518. \quad (23)$$

Используя (23) и равенство $T_n(k) = T_n(0) - k^2 T_{n+2}(k)$, находим, что

$$E_1(k) = \frac{1}{T_2(k)\pi} \int_0^\infty S(k, k_1) E_0(k_1) dk_1,$$

где

$$S(k, k_1) = k_1^2 \left[\frac{T_3(k) T_3(k_1)}{T_1(0)} - J_5(k, k_1) \right].$$

Из уравнения (20) при $n = 2$ получаем, что

$$V_2 = -\frac{1}{T_2(0)\pi} \int_0^\infty T_1(k_1) E_1(k_1) dk_1 = -0,0031$$

и, кроме того,

$$E_2(k) = \frac{1}{T_2(k)\pi} \int_0^\infty S(k, k_1) E_1(k_1) dk_1.$$

Рассуждая точно так же, можно найти любой член рядов для $E(k)$ и U_0 , тем самым строится профиль средней скорости бозе-газа в полупространстве и находится скорость скольжения. После того как найдена спектральная плотность $E(k)$, функция распределения строится по соотношениям (15), (17).

4. Скорость скольжения

Сравним при $q = 1$ полученные приближения скорости скольжения $U_0^{(n)} = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ с известным.

Точное решение этой задачи при $q = 1$ получено в [10]: $U_0^\circ = 0,582$. Нулевое приближение $U_0^{(0)} = V_0 = 8/15$ отличается от точного U_0° на 8,4%, первое приближение $U_0^{(1)} = V_0 + V_1$ отличается от точного на 0,5%, второе приближение $U_0^{(2)}$ практически совпадает с точным (отличается на 0,01%).

Приведем скорость скольжения к размерному виду, опуская подробности (см. [6]). Исходя из определения вязкости газа η и его числовой плотности (концентрации) N , находим, что (обозначая через s спин молекулы)

$$\eta(\alpha) = \frac{16\pi(2s+1)m^4 l_1(\alpha)}{15(2\pi\hbar)^3 v_0 \beta^{5/2}},$$

$$N(\alpha) = \frac{2\pi(2s+1)m^3 l_0(\alpha)}{(2\pi\hbar)^3 \beta^{3/2}}.$$

Из этих равенств находим, что

$$\eta(\alpha) = \frac{8l_1(\alpha)}{15l_0(\alpha)} \frac{mN(\alpha)}{v_0\beta}.$$

Полученная с помощью этого выражения размерная скорость скольжения такова:

$$U_{sl} = K(\alpha, q) l \left(\frac{du_y(x)}{dx} \right)_{x=\infty},$$

где

$$K(\alpha, q) = \frac{15l_0(\alpha)}{8\sqrt{\pi}l_1(\alpha)} \frac{2-q}{q} \sum_{n=0}^\infty V_n q^n,$$

l — длина свободного пробега молекул, $l = \sqrt{\pi\beta}(\eta/Nm)$, $K(\alpha, q)$ — коэффициент скольжения.

5. Обсуждение результатов

При $q = 1$ коэффициент скольжения $K(\alpha, 1) = 15l_0(\alpha)/(8\sqrt{\pi}l_1(\alpha))$ найден в работе [10]. Когда при этом величина химического потенциала $\alpha \rightarrow -\infty$, т.е. когда квантовый газ становится классическим, коэффициент $K(\alpha, 1)$ переходит в значение коэффициента скольжения классического газа $K(-\infty, 1) = 1,091$ [10]. Численные расчеты для второго приближения показывают, что это значение коэффициента достигается уже при $\alpha = -7$: $K(-7, 1) = 1,091$.

Анализ графиков на рис.1 показывает, что с уменьшением величины относительного химического потенциала α величина коэффициента скольжения уменьшается во всем диапазоне изменения коэффициента диффузности q .

Графики на рис. 2 показывают, что с уменьшением коэффициента диффузности q величина коэффициента скольжения растет во всем диапазоне изменения относительного химического потенциала. При этом наибольшее изменение коэффициента скольжения

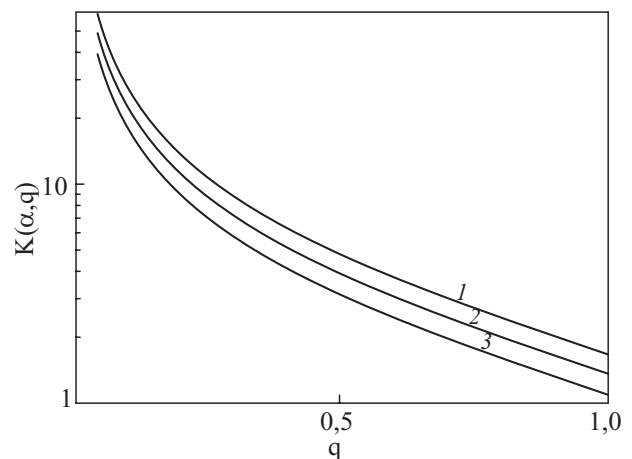


Рис. 1. Зависимость коэффициента изотермического скольжения от коэффициента диффузности q при различных значениях величины относительного химического потенциала α : $-0,001$ (1); $-0,1$ (2) и $-5,0$ (3). Логарифмический масштаб по вертикальной оси.

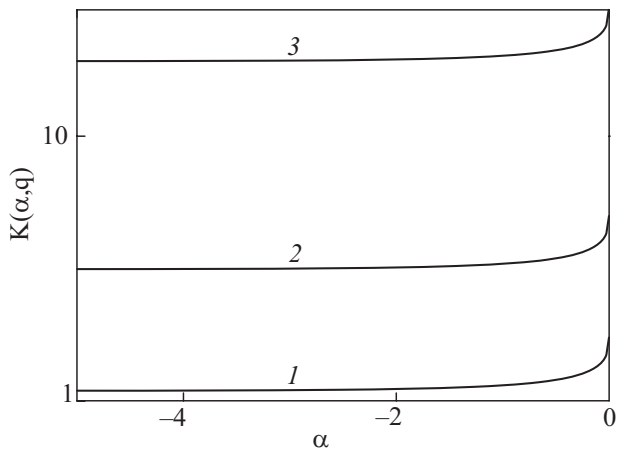


Рис. 2. Зависимость коэффициента изотермического скольжения от величины относительного химического потенциала при различных значениях коэффициента аккомодации q : 1 (1); 0,5 (2) и 0,1 (3). Логарифмический масштаб по вертикальной оси.

происходит в диапазоне изменения α от -1 до 0 .

Если сравнить поведение коэффициентов скольжения ферми- и бозе-газов (рис. 3), то замечаем, что эти коэффициенты тем сильнее различаются по величине,

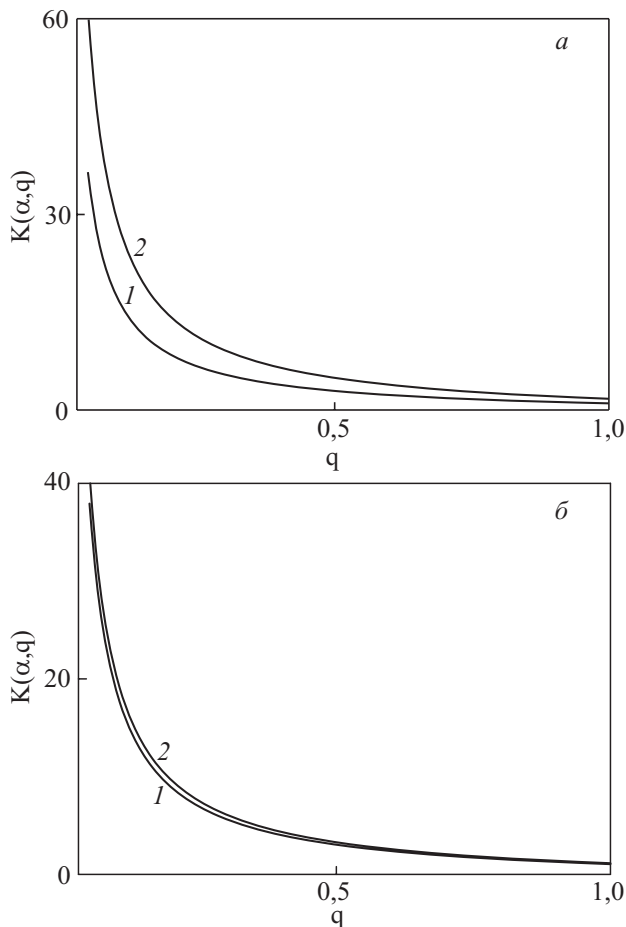


Рис. 3. Зависимость коэффициента изотермического скольжения квантовых ферми-газа (кривая 1) и бозе-газа (кривая 2) от коэффициента диффузности q . Значение величины относительного химического потенциала $\alpha = -0,0001$ (а); $\alpha = -1$ (б).

чем меньше значение относительного химического потенциала. Уже при $\alpha = -1$ эти коэффициенты практически совпадают (рис. 3,б), а при $\alpha < -5$ различие между коэффициентами скольжения ферми- и бозе-газов несущественно.

Итак, в работе получено решение задачи об изотермическом скольжении квантового бозе-газа вдоль плоской поверхности с зеркально-диффузным взаимодействием молекул со стенкой. Частота столкновений предполагается пропорциональной модулю молекулярной скорости. Рассмотрены частные случаи решения, проведен численный анализ и дается сравнение с соответствующими результатами для ферми-газа.

1. E.A. Uehling and G.E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **43**, 552 (1933).
2. Дж. Займан, *Электроны и фононы*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).
3. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Наука, Москва (1978).
4. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Теор. матем. физ.* **129:3**, 491 (2001).
5. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Известия вузов. Сер. Физика* **6**, 51 (2002).
6. А.А. Костиков, А.В.Латышев, А.А. Юшканов, *ФНТ* **34**, 914 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 724 (2008)].
7. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Матем. моделирование* **5**, 80 (2003).
8. А.Ю. Квашнин, А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Труды ин-та системного анализа РАН «Динамика линейных и нелинейных систем»* **25:2**, 69 (2006).
9. Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, Москва (1976).
10. А.В. Латышев, А.А.Юшканов, *Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения*, Изд-во МГОУ, Москва (2004).

Isothermal sliding of quantum bose-gas with mirror-diffuse reflection from the boundary

A.J. Kвашnin, A.V. Latyshev, and A.A. Yushkanov

A solution of Kramer's problem on isothermal sliding of quantum bose-gas along a flat firm surface is derived. It is supposed that the reflection of molecules from a wall is a mirror-diffuse one. The modelling kinetic equation with the collision integral in the form of τ -model and with the frequency of collisions proportional to the molecular speed is used. The dependence of sliding velocity on the parameter representing the ratio of chemical potential to product of Boltzmann's constant and absolute temperature is analysed.

PACS: 05.20.Dd Kinetic theory;
05.30.Jp Boson systems.

Keywords: Kramers problem, mirror-diffusion reflection, analytical solution, bose-gas, isothermal sliding.