

Спектр уровней Ландау двойной квантовой ямы в наклонном магнитном поле

Ю.Г. Арапов, В.Н. Неверов, Г.И. Харус, Н.Г. Шелушина, М.В. Якунин

Институт физики металлов УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 18, г. Екатеринбург, 620219, Россия
E-mail: arapov@imp.uran.ru

Статья поступила в редакцию 7 августа 2008 г.

Выполнен квазиклассический расчет спектра уровней Ландау в наклонном магнитном поле для двойной квантовой ямы с учетом зависимостей циклотронных эффективных масс от энергии. Проведено сопоставление с квантовомеханическим расчетом в слабых перпендикулярных магнитных полях (N. Kumada et al., *Phys. Rev.* **V77**, 155324 (2008)) и найдено хорошее соответствие результатов двух методов расчета.

Виконано квазікласичний розрахунок спектра рівнів Ландау в похилому магнітному полі для подвійної квантової ями з урахуванням залежностей циклотронних ефективних мас від енергії. Проведено зіставлення з квантовомеханічним розрахунком у слабких перпендикулярних магнітних полях (Kumada et al., *Phys. Rev.* **V77**, 155324 (2008)) та знайдено гарну відповідність результатів двох методів розрахунку.

PACS: 71.70.Di Уровни Ландау;

73.21.–b Электронные состояния и коллективные возбуждения в многослойных структурах, квантовые ямы, мезоскопические и наномасштабные системы;
73.21.Fg Квантовые ямы.

Ключевые слова: уровни Ландау, двойная квантовая яма, циклотронная эффективная масса.

Экспериментальные исследования целочисленного квантового эффекта Холла (КЭХ) в наклонных магнитных полях B показали принципиальную разницу в эволюции картины КЭХ при изменении угла наклона магнитного поля θ для одиночных и двойных квантовых ям с близкими концентрациями носителей заряда [1]. В то время как в одиночных квантовых ямах регулярная картина плато КЭХ сохраняется при изменении θ , более того все кривые $\rho_{xx}(B)$ и $\rho_{xy}(B)$ могут быть сведены к единым зависимостям в координатах $\rho_{xx}(B \cos \theta)$ и $\rho_{xy}(B \cos \theta)$, в двойных квантовых ямах наблюдаются такие характерные аномалии, как резкое сужение и даже исчезновение отдельных плато для некоторых значений угла, а затем «возгорание» их при больших значениях θ .

Наш опыт исследования КЭХ в системе p -Ge/GeSi со сложным законом дисперсии [2] показывает, что такие нерегулярности в проявлении плато КЭХ могут являться следствием существования точек случайного вырождения в спектре уровней Ландау, что становится возможным при заполнении двух (и более) подзон

пространственного квантования. Именно такая ситуация с заполнением основной (симметричной) и первой возбужденной (антисимметричной) пространственных подзон реализуется в исследованных двойных квантовых ямах n -InGaAs/GaAs [1]. Изменение положения точек случайного вырождения при изменении θ , вероятнее всего, и является причиной наблюдаемых нерегулярностей картины КЭХ.

Для подтверждения этого тезиса в настоящей работе проведены квазиклассические расчеты спектра уровней Ландау в двойных квантовых ямах в наклонном магнитном поле в широком интервале полей вплоть до режима КЭХ.

1. Исходные соотношения

Схематический вид потенциала двойной квантовой ямы (две туннельно-связанные одиночные квантовые ямы) (ДКЯ) с шириной ям a и барьера b представлен на рис. 1. Без магнитного поля энергетический спектр такой структуры

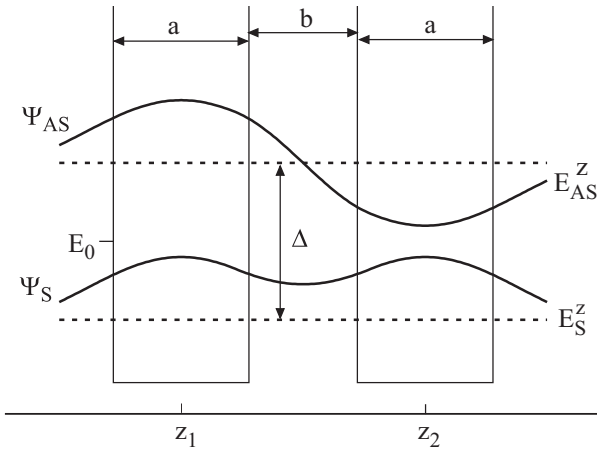


Рис. 1. Потенциал двойной квантовой ямы, уровни пространственного квантования (E_S^z, E_{AS}^z) и волновые функции симметричного (Ψ_S) и антисимметричного (Ψ_{AS}) состояний.

$$E_{S,AS} = E_{S,AS}^z \pm \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2), \quad (1)$$

где $E_{S,AS}^z = E_0 \pm \Delta/2$ — энергии пространственно квантованных уровней с симметричной ($\Psi_S(z) = (\varphi_1 + \varphi_2)/\sqrt{2}$) и антисимметричной ($\Psi_{AS}(z) = (\varphi_1 - \varphi_2)/\sqrt{2}$) комбинацией волновых функций основного состояния одиночных ям ($\varphi_1(z) \equiv \psi_0(z - z_1)$, $\varphi_2(z) \equiv \psi_0(z - z_2)$) с центрами в z_1 и z_2 . Энергия антисимметричного состояния совпадает с уровнем основного состояния одиночной квантовой ямы, а симметричное состояние отщепляется вниз на величину туннельной щели $\Delta = E_{AS} - E_S$, которая пропорциональна перекрытию волновых функций одиночных ям ($\Delta \sim \int \varphi_1(z)\varphi_2^*(z)dz$) [3]. Второй член в формуле (1) описывает кинетическую энергию свободного движения электрона в плоскости (xy) (k — значение волнового вектора, m — значение эффективной массы электрона).

Энергии уровней пространственного квантования E^z в такой системе существенным образом зависят от компоненты магнитного поля $B_{||}$, параллельной плоскости $2D$ -слоев (xy). Продольное поле смешивает исходные симметричное (E_S, Ψ_S) и антисимметричное (E_{AS}, Ψ_{AS}) состояния ДКЯ [4,5]:

$$E_{1,2}^z = E_0 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + (\hbar\omega_{||}k_y z_0)^2} = E_0 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + 16\varepsilon_{k_0}^2 \left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2}. \quad (2)$$

Здесь $E_0 = (E_{AS}^z + E_S^z)/2$, $\omega_{||} = eB_{||}/m$, $B_{||} || x, z_0 = \langle \Psi_S | z | \Psi_{AS} \rangle$, во втором выражении введены обозначения $k_0 = z_0/l_{||}^2$, $l_{||} = \sqrt{\hbar/eB_{||}}$ — магнитная длина в продольном магнитном поле, $\varepsilon_{k_0} = (\hbar^2/2m)k_0^2$. Полный спектр электронов в продольном поле имеет вид $E_{1,2}(k_x, k_y) = E_{1,2}^z + \hbar^2(k_x^2 + k_y^2)/2m$.

Энергетический спектр при $k_x = 0$ и сечения $E_{1,2}(k_x, k_y) = E_i$ для некоторых постоянных значений энергии $E_i (i = 1, 2, 3)$ в различных полях $B_{||}$ приведены на рис. 2, а, б. При увеличении продольной составляющей магнитного поля происходит эволюция энергетического спектра: закон дисперсии — две смещенные на Δ параболы, и круговые сечения в (k_x, k_y) плоскости при $B = 0$; искаженные параболы и эллипсообразные сечения в (k_x, k_y) плоскости (вытянутые в k_y - и k_x -направлении для нижней и верхней ветви соответственно) в слабых продольных полях $\varepsilon_{k_0} \leq \Delta/4$; в сильных продольных магнитных полях $\varepsilon_{k_0} \geq \Delta/4$ происходит дальнейшее усложнение вида нижней ветви энергетического спектра — появляется два минимума при $k_y^* = \pm k_0 \sqrt{1 - \Delta^2/(16\varepsilon_{k_0}^2)}$, энергия которых при отсчете от E_0 равна $E_2(k_y^*) = -\varepsilon_{k_0} [1 + \Delta^2/(16\varepsilon_{k_0}^2)]$, а сечения плоскостями $E_i = \text{const}$ принимают гантелеобразный вид (peanut). Сечения верхней ветви при $\varepsilon_{k_0} > \Delta/4$ приобретают форму линзы (lens). Следует отметить, наличие седловой точки ($k = 0, E = -0,5\Delta$), где в k_y -направ-

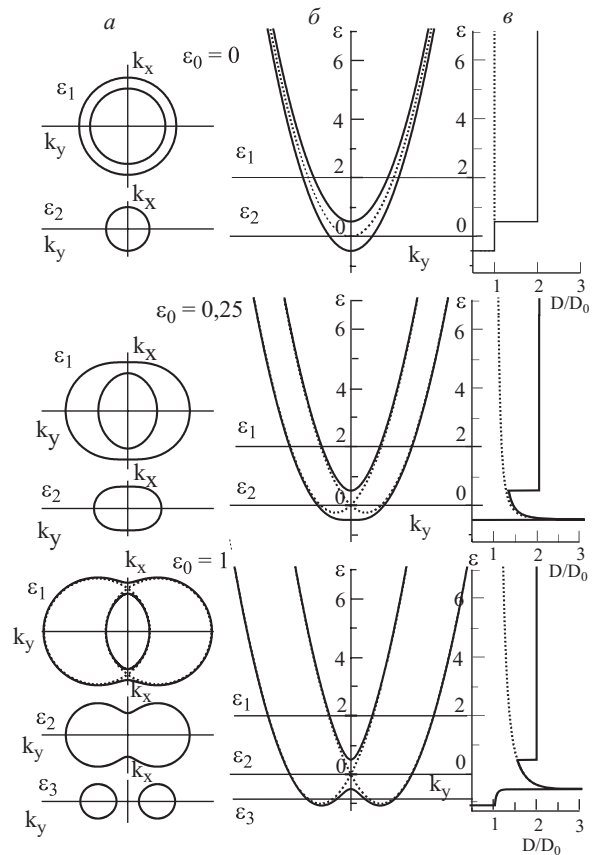


Рис. 2. Изоэнергетические кривые в плоскости (k_x, k_y) при различных значениях энергии $\varepsilon_i = E_i/\Delta$ (а); закон дисперсии при $k_x = 0$ для двойной квантовой ямы при различных значениях безразмерного параметра $\varepsilon_0 \sim B_{||}^2$ (б); плотность состояний двойной квантовой ямы (в относительных единицах) для нижней энергетической подзоны (пунктир) и для двух подзон (сплошные кривые) при различных значениях ε_0 (в).

лении ветви параболы направлены вниз, а в k_x -направлении — вверх.

При приложении магнитного поля вдоль оси z , B_{\perp} , замкнутые изоэнергетические кривые — сечения плоскостями $E_i = \text{const}$ на рис. 2,а — представляют собой циклотронные орбиты электронов в k -пространстве.

2. Циклотронная масса

В квазиклассическом приближении циклотронная масса электронов определяется выражением $m_{1,2}^*(E) = \hbar^2 / (2\pi) (\partial S_{1,2} / \partial E)$, где $S_{1,2}(E)$ — площадь, охватываемая соответствующей орбитой, $S = \iint dk_x dk_y$. Для конкретных ветвей энергетического спектра они принимают вид

$$m_2^* = \frac{2m}{\pi} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{(\varepsilon - y^2) - \frac{1}{2}\sqrt{1+16\varepsilon_0}y^2}},$$

$$y_0 = \sqrt{(\varepsilon + 2\varepsilon_0) - \frac{1}{2}\sqrt{1+16\varepsilon_0}(\varepsilon + \varepsilon_0)}; \quad (3)$$

$$m_1^* = \frac{2m}{\pi} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(\varepsilon - x^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1+16\varepsilon_0}x^2}},$$

$$x_0 = \sqrt{(\varepsilon + 2\varepsilon_0) + \frac{1}{2}\sqrt{1+16\varepsilon_0}(\varepsilon + \varepsilon_0)}. \quad (4)$$

Здесь введены безразмерные параметры $\varepsilon = E/\Delta$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{k_0}/\Delta$ и принято начало отсчета энергии $E_0 = 0$.

Графики зависимостей $m_{1,2}^*(\varepsilon)$, рассчитанные для различных значений параметра ε_0 , приведены на рис. 3а,б в относительных единицах. Циклотронная масса на дне верхней ветви энергетического спектра имеет конечное значение $m_1^*(\varepsilon = 0,5) = m / \sqrt{1+4\varepsilon_0}$ и уменьшается при увеличении продольного магнитного поля (рост ε_0). Видно, что для орбиты в форме линзы $m_1^*(\varepsilon)$ монотонно возрастает с ростом энергии и отношение $m_1^*(\varepsilon)/m$ стремится к 1 при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Зависимость циклотронной массы $m_2^*(\varepsilon)$ орбиты в форме гантели имеет значительно более сложный вид. В слабых магнитных полях $\varepsilon_0 < 0,25$, $m_2^*(\varepsilon)$ на дне нижней подзоны ($\varepsilon = -0,5$) имеет конечное значение $m_2^*(\varepsilon = -0,5) = m / \sqrt{1-4\varepsilon_0}$ и возрастает при увеличении продольного магнитного поля (рост ε_0). При значениях продольного магнитного поля $\varepsilon_0 > 0,25$, в связи с формированием боковых минимумов, дно нижней подзоны смещается в область $\varepsilon < -0,5$, циклотронная масса $m_2^*(\varepsilon)$ расходится при $\varepsilon \rightarrow -0,5$, что связано с наличием седловой точки в спектре нижней подзоны, а при $\varepsilon > -0,5$ $m_2^*(\varepsilon)$ монотонно убывает с ростом ε .

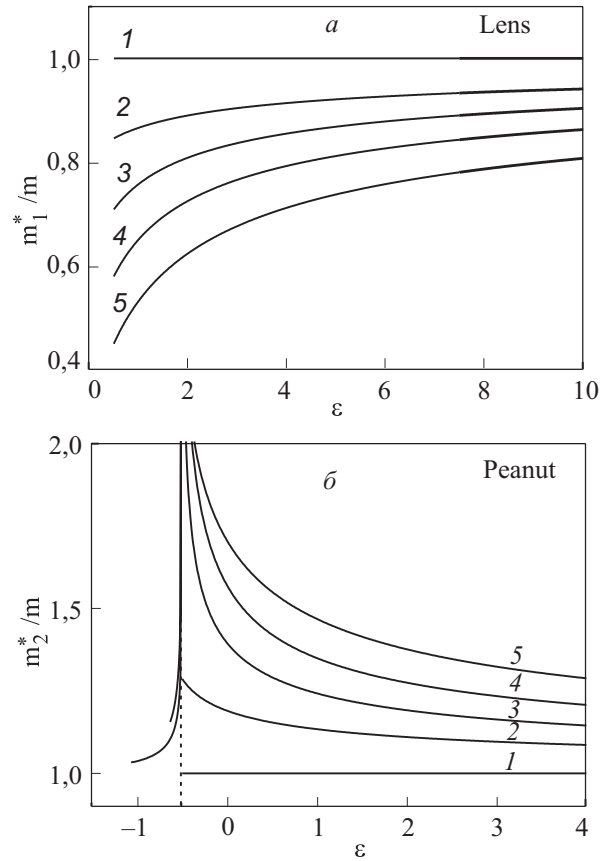


Рис. 3. Зависимости циклотронных эффективных масс от энергии для верхней (а) и нижней (б) энергетических подзон двойной квантовой ямы при различных значениях ε_0 : 0 (1), 0,1 (2), 0,25 (3), 0,5 (4), 1 (5).

При удалении от $\varepsilon = -0,5$ как в одну ($\varepsilon \rightarrow \infty$), так и в другую ($\varepsilon \rightarrow -\infty$) сторону $m_2^*(\varepsilon)/m \rightarrow 1$. Характерные черты поведения $m_{1,2}^*(\varepsilon)$, описанные выше, хорошо видны на зависимостях от B_{\parallel} циклотронных масс на уровне Ферми, рассчитанных в работе [6].

На рис. 2,в представлена рассчитанная плотность состояний ДКЯ для различных значений $\varepsilon_0(B_{\parallel})$.

3. Уровни Ландау

Энергия уровней Ландау без учета зеемановского расщепления дается выражением ($i = 1,2$)

$$E_N^{(i)} = \left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar e B_{\perp}}{m_i^*(E_N^{(i)})}, \quad (5)$$

которое является уравнением для определения зависимости $E_N^{(i)}(B_{\perp})$.

3.1. Решение уравнения (5) при $B_{\parallel} = \text{const}$

Численное решение уравнения (5) при различных фиксированных значениях ε_0 приводит к существенной нелинейности и неэквидистантности уровней Ландау обеих подзон: $E_N^{(1)}$ есть сублинейная функция B_{\perp} ,

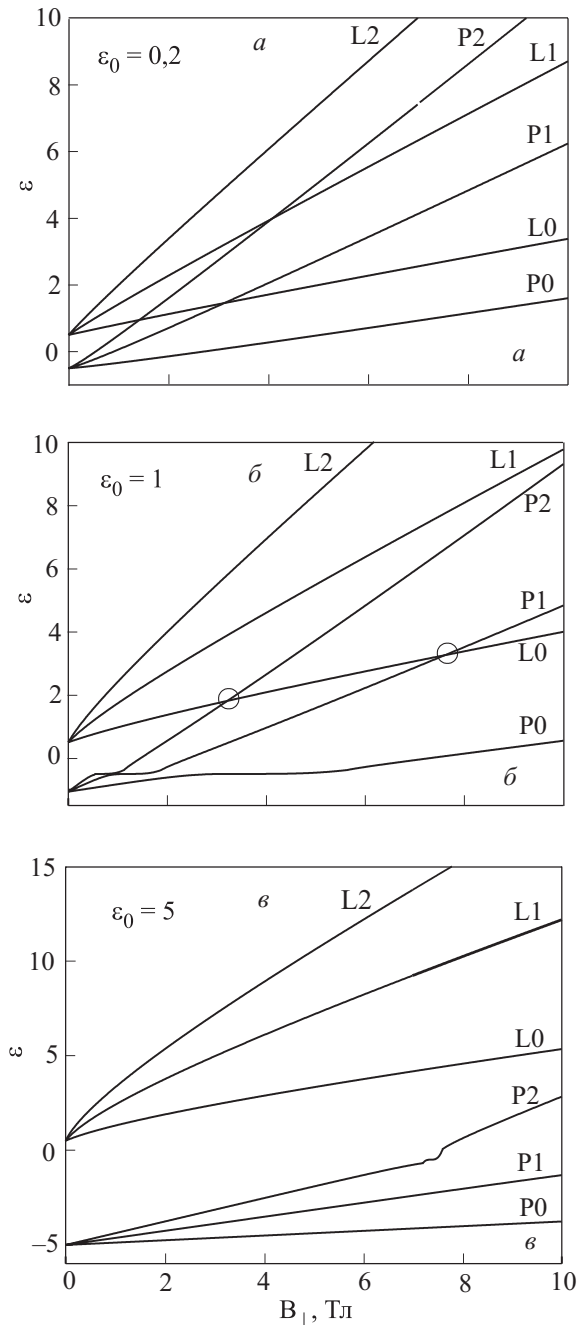


Рис. 4. Уровни Ландау для нижней PN ($N = 0, 1, 2$) и верхней LN энергетических подзон двойной квантовой ямы для различных (постоянных) значений ϵ_0 : 0,2 (а), 1 (б), 5 (в).

а $E_N^{(2)}$ меняется с B_{\perp} более круто, чем линейно (рис. 4,а,б,в). Степень отклонения от линейности в ту или иную сторону как следствие зависимости $m^*(\epsilon)$ усиливается по мере роста ϵ_0 (т.е. роста B_{\parallel} при заданных z_0 и Δ). В результате при достаточно больших ϵ_0 возникают точки пересечения уровней Ландау нижней и верхней подзон (выделенные кружками на рис. 4,б) — точки случайного вырождения уровней, что обычно приводит к аномальному поведению магнитосопротивления в режиме квантового эффекта Холла. Отметим еще более важную черту в эволюции спектра уровней Ландау

по мере роста ϵ_0 , а именно: увеличение щели между нижней и верхней подзонами при $B_{\perp} = 0$ вследствие углубления боковых минимумов нижней подзоны, что видно при сравнении рис. 4,б и 4,в. Этот эффект сохраняется и при достижении режима магнитного пробоя (см. п. 3.2).

3.2. Магнитный пробой

Достаточно сильное поле B_{\perp} инициирует процессы туннелирования через энергетический барьер между орбитами 1 (lens) и 2 (peanut) на рис. 2,а, вследствие чего со все большей вероятностью электроны начинают двигаться по независимым орбитам вокруг точек k_0 (пунктирные кривые на рис. 2,а). Это явление так называемого магнитного пробоя [7]. Поле магнитного пробоя B_{\perp}^* для ДКЯ в наклонном магнитном поле определяется выражением [8]

$$\hbar\omega_{\perp} = \frac{\pi}{8} \frac{\Delta}{\sqrt{\epsilon_0(\epsilon_F - \epsilon_0)}}, \quad (6)$$

где $\omega_{\perp} = eB_{\perp}/m$, $\epsilon_F = E_F/\Delta$, E_F — энергия Ферми. В условиях магнитного пробоя $B_{\perp} \gg B_{\perp}^*$ уровни Ландау линейны по магнитному полю B_{\perp} с наклоном, определяемым невозмущенной эффективной массой, двукратно вырождены, а начало их отсчета соответствует энергии боковых минимумов нижней подзоны.

3.3. Решение уравнения (5) при $\theta = \text{const}$

Экспериментально часто измеряют магнитосопротивление для постоянного угла наклона θ магнитного поля относительно нормали к плоскости двумерной структуры. На рис. 5 приведен расчет спектра трех первых уровней Ландау в наклонном магнитном поле для первой и второй подзон пространственного квантования при $\theta = \text{const}$ ($B_{\parallel} = B \sin \theta$, $B_{\perp} = B \cos \theta$) с учетом спинового расщепления. Для наклонного поля с углом от нормали $\theta = 60^\circ$ (рис. 5,б) для всех уровней Ландау нижней подзоны видны особенности (немонотонности кривых), связанные с прохождением седловой точки в спектре этой зоны. Для меньших углов ($\theta = 20^\circ$ рис. 5,а) такая особенность видна лишь для $N = 0$, для остальных уровней Ландау немонотонности, связанные с прохождением седловой точки, смещаются в область сильных магнитных полей. Наличие подобного рода особенностей — один из главных недостатков квазиклассических расчетов, в рамках которых не описываются эффекты туннелирования между различными циклотронными орбитами в окрестности седловой точки (см. рис. 2,а).

С другой стороны, если сгладить описанные немонотонности, проведя интерполяцию между результатами расчета в слабых и более сильных магнитных полях, то при $\theta = \text{const}$ мы получим ясную картину расталкивания уровней Ландау нижней и верхней под-

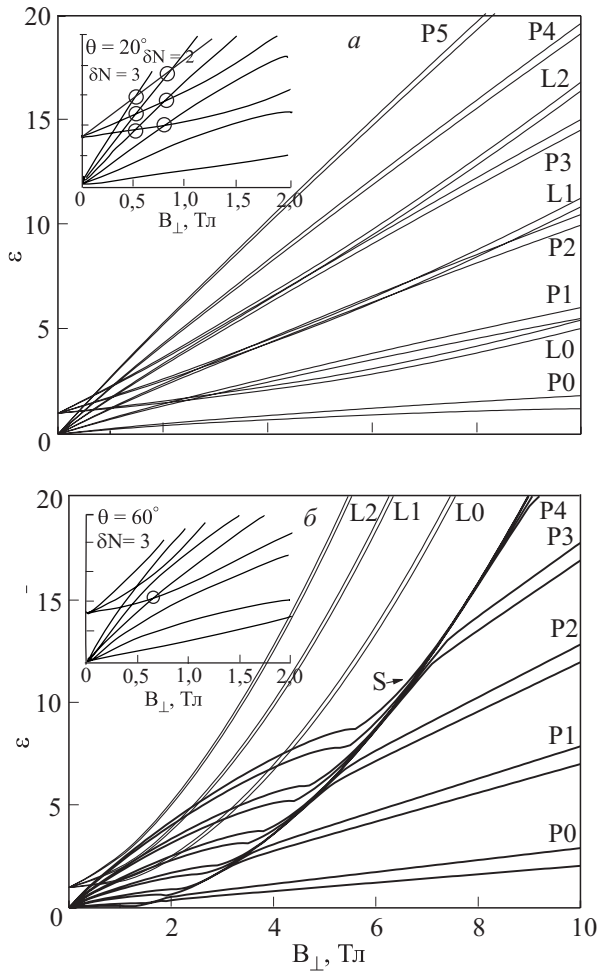


Рис. 5. Уровни Ландау для нижней PN ($N = 0, 1, 2, \dots$) и верхней LN энергетических подзон двойной квантовой ямы при $\theta = \text{const}$: 20° (а); 60° (б). Слияние немонотонностей, связанных с прохождением уровнями Ландау седловой точки в спектре нижней подзоны в единую параболическую кривую, обозначенную как S на рисунке для $\theta = 60^\circ$, соответствует движению дна этой подзоны вниз по энергии с ростом $B_{\parallel} = B_{\perp} \tan \theta$.

зон, которое усиливается по мере увеличения угла θ (сравни рис. 5,а и 5,б). Такое поведение системы энергетических уровней с ростом θ эквивалентно обнаруженным в квантово-механических расчетах Кумады и др. [9] эффектам «антипересечения» уровней Ландау различных подзон (см. вставки на рис. 5,а и 5,б).

Преимущество квазиклассического подхода состоит в ясном понимании физического смысла «расталкивания» уровней различных подзон как следствия зависимости циклотронных эффективных масс (при заданной энергии) от продольного магнитного поля B_{\parallel} : для нижней подзоны (peanut) m_2 ($\varepsilon = \text{const}$) растет с ростом ε_0 (т.е. B_{\parallel}), а для верхней подзоны (lens) m_1 ($\varepsilon = \text{const}$) уменьшается с ростом ε_0 (см. рис. 3,а,б).

4. Заключение

Представлены результаты квазиклассических расчетов циклотронных эффективных масс и спектра уровней Ландау для двух энергетических подзон двойной квантовой ямы в наклонном магнитном поле. Анализ полученных результатов позволил выявить достоинства квазиклассического подхода: ясный физический смысл эволюции картины уровней Ландау при изменении поля B_{\parallel} или угла θ . Сравнение с квантово-механическими расчетами [9] показывает качественное соответствие результатов различных методов расчета.

Спектр уровней Ландау ДКЯ в наклонном поле ($B_{\parallel}, 0, B_{\perp}$) без учета зависимостей $m_{1,2}^*(E)$ найден в работе [5], где исследовались осцилляции Шубникова–де Гааза. Расчеты с учетом зависимости $m_{1,2}^*(E)$ необходимы для интерпретации экспериментальных данных по квантовому эффекту Холла в ДКЯ InGaAs/GaAs [1].

Статья написана на основе доклада, сделанного на XVII Уральской международной школе по физике полупроводников (г. Новоуральск, 18–23 февраля 2008 г.). Благодарим участников школы за ценное обсуждение.

Работа выполнена по плану РАН (тема № г.р. 01.2.006~13395), при частичной поддержке РФФИ, гранты №08-02-00222, 09-0296518 и программы Президиума РАН «Низкоразмерные квантовые гетероструктуры».

1. М.В. Якунин, С.М. Подгорных, Дж. Галисту, А. де Виссер, *Тезисы VIII Российской конференции по физике полупроводников*, Екатеринбург (2007), с. 184; *тезисы XVII Уральской международной зимней школы по физике полупроводников*, Екатеринбург (2008), с. 68.
2. Yu.G. Arapov, G.I. Harus, V.N. Neverov, N.G. Shelushinina, M.V. Yakunin, G.A. Alshanskii, and O.A. Kuznetsov, *Nanotechnology* **11**, 351 (2000).
3. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, Мир, Москва (1974).
4. G.S. Boebinger, A. Passher, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev.* **B43**, 12673 (1991).
5. N.E. Harff, J.A. Simmons, S.K. Lyo, J.F. Klem, G.S. Boebinger, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev.* **B55**, R13405 (1997).
6. S.K. Lyo, N.E. Harff, and J.A. Simmons, *Phys. Rev.* **B58**, 1572 (1998).
7. М.Н. Cohen and L.M. Falicov, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 231 (1961).
8. J. Hu and A.H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B46**, 12554 (1992).
9. N. Kumada, K. Iwata, K. Tagashira, Y. Shimoda, K. Muraki, Y. Hirayama, and A.Sawada, *Phys. Rev.* **B77**, 155324 (2008); *cond-mat 07094306*.

Landau levels spectrum of a double quantum well in a tilted magnetic field

Yu.G. Arapov, V.N. Neverov, G.I. Harus, N.G. Shelushinina, and M.V. Yakunin

The quasiclassical calculation of Landau-level spectra for a double quantum well system in a tilted magnetic field is carried out with taking into account the energy dependences of cyclotron effective masses. It is found that in weak perpendicular magnetic fields our results are in good agreement with

the previous results of quantum-mechanical calculations (Kumada et al., *Phys. Rev.* **B77**, 155324 (2008)).

PACS: 71.70.Di Landau levels;
73.21.-b Electron states and collective excitations in multilayers, quantum wells, mesoscopic and nanoscale systems;
73.21.Fg Quantum wells.

Keywords: Landau levels, double quantum well, cyclotron effective mass.