

## Об электрических явлениях в электронейтральных сверхтекучих системах

С.И. Шевченко, А.С. Рукин

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины  
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина  
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 22 июля 2009 г., после переработки 31 августа 2009 г.

Теория Келдыша сверхтекучести разреженного электрон-дырочного газа обобщена на случай возможной поляризации пар. Установлено, что комплексный параметр порядка  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , имеющий смысл волновой функции пар, удовлетворяет нелинейному нелокальному интегродифференциальному уравнению. Полученное уравнение решено при медленном изменении параметра порядка на длине порядка размера пар. По известному  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  найдена плотность дипольного момента системы и показано, что неоднородность системы порождает дипольный момент, пропорциональный градиенту плотности частиц и направленный параллельно ему. Установлено, что в магнитном поле появляется дополнительный дипольный момент, связанный с поляризацией пар силой Лоренца.

Теорію Келдиша надплинності розрідженого електрон-діркового газу узагальнено на випадок можливої поляризації пар. Встановлено, що комплексний параметр порядку  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , що має зміст хвильової функції пар, задовольняє нелінійному нелокальному інтегродиференціальному рівнянню. Рівняння, яке отримано, вирішено при повільній зміні параметра порядку на довжині порядку розміру пар. По відомому  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  знайдено щільність дипольного моменту системи та показано, що неоднорідність системи породжує дипольний момент, пропорційний градієнту щільності часток та спрямований антипаралельно йому. Встановлено, що в магнітному полі з'являється додатковий дипольний момент, який пов'язаний з поляризацією пар силою Лоренца.

PACS: 67.90.+z Другие темы в квантовых жидкостях и твердых телах;  
67.25.D– Сверхтекучая фаза.

Ключевые слова: поляризация, сверхтекучесть, параметр порядка.

### 1. Введение

В недавних экспериментах [1,2] обнаружено, что движение сверхтекучего  $^4\text{He}$  сопровождается появлением в системе электрических полей. В работе [1] в резонаторе, заполненном жидким гелием, возбуждались стоячие волны первого и второго звуков. При возбуждении в гелии волны второго звука была зарегистрирована переменная разность потенциалов между электродом, установленным на противоположном конце резонатора, и корпусом резонатора. Частота колебаний этой разности потенциалов совпала с частотой второго звука. Отношение амплитуды разности потенциалов к амплитуде колебаний температуры оказалось независимым от температуры. Эффект наблюдался только ниже температуры сверхтекучего перехода и не наблюдался при возбуждении

волны первого звука даже в случае очень большой амплитуды колебаний.

Позже был поставлен другой эксперимент, описанный в работе [2]. Экспериментальная установка представляла собой цилиндрический торсионный осциллятор, заполненный сверхтекучим гелием. По оси цилиндра был установлен изолированный от него проводочный электрод. При возбуждении колебаний осциллятора обнаружено появление переменной разности потенциалов с удвоенной частотой между корпусом цилиндра и электродом. Эффект наблюдался как для массивного гелия в цилиндре, так и для насыщенной и ненасыщенной пленки, покрывающей стенки осциллятора. Установлено, что разность потенциалов пропорциональна квадрату линейной скорости стенок осциллятора. Аналогично эффекту [1], разность потенциалов исчезала при переходе через  $\lambda$ -точку.

Эти эксперименты вызвали большой интерес и стимулировали ряд теоретических исследований [3–7], в которых сделаны попытки объяснить наблюдаемые явления.

При этом проблема была поставлена более широко. Обсуждались возможные механизмы поляризации как сверхтекучих, так и нормальных систем. В частности, в работах Мельниковского [4] обращено внимание на появление поляризации в любой диэлектрической системе при ее неравномерном движении. Опираясь на эту идею, Нацик показал [5], что вихревое движение атомов в квантовой жидкости должно сопровождаться их поляризацией из-за действия на них центробежных сил. В работе Локтева и Томченко [7] решалась задача о возникновении дипольных моментов у двух атомов  ${}^4\text{He}$ , индуцированных их взаимодействием друг с другом, где показано, что межатомное взаимодействие создает в каждом из атомов противоположно направленные дипольные моменты. В [7] также обсуждаются следствия, которые вытекают из этого результата для макроскопических сред, в частности, появление макроскопической поляризации в среде с неоднородной плотностью.

Цитированные работы демонстрируют продуктивность более широкого взгляда на проблему, поэтому в настоящей работе мы не концентрируем внимание на непосредственном объяснении результатов экспериментов [1,2], а рассматриваем задачу о поляризации диэлектрической среды в результате взаимодействия между образующими ее частицами. При этом мы предпринимаем попытку построения микроскопической теории поляризации сверхтекучей системы. Как хорошо известно, последовательная микроскопическая теория сверхтекучести существует лишь для слабо-неидеального бозе-газа (см., например, [8,9]). В настоящей работе мы также рассмотрим слабо-идеальный бозе-газ, но в нашей модели будет учитываться внутренняя структура образующих газ атомов. Точнее, мы рассмотрим систему, состоящую из отрицательно и положительно заряженных частиц. При этом под такими частицами можно понимать либо электроны и дырки, либо электроны и протоны.

В этом месте полезно сделать следующее замечание. Нашу теорию можно рассматривать как чисто модельную, позволяющую только качественно понять природу наблюдаемых явлений. Однако она может и количественно описывать реальную физическую систему — газ электрон-дырочных пар (экситонов). Проблема сверхтекучести электрон-дырочного газа вызывает значительный экспериментальный и теоретический интерес начиная с шестидесятых годов прошлого столетия. Как отметил Келдыш [10], в отличие от случаев жидкого гелия или сверхпроводников, сверхтекучий поток экситонов может существовать не сколько угодно долго, а лишь в течение времени жизни экситонов, и переход системы экситонов в сверхтекучее состояние означает, что время затухания потоков опре-

деляется не временем рассеяния экситонов, а на несколько порядков большим временем их жизни. В последние два десятилетия выполнено большое количество исследований свойств двумерных электрон-дырочных систем, точнее, двухслойных систем с пространственно разделенными электронами и дырками (см., например, [11]). В таких системах электрон-дырочные пары могут не аннигилировать в течение макроскопически большого времени и возможна истинная стационарная сверхтекучесть пар.

Ниже мы ограничимся изучением модели разреженного электрон-дырочного газа, в котором размер пар много меньше среднего расстояния между парами. Свойства этого газа изучены в работе Келдыша [10], в которой показано, что поведение системы в сверхтекучем состоянии можно описывать комплексным параметром порядка  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , имеющим смысл волновой функции пар. Пренебрегая внутренней структурой пар (т.е. полагая  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ ), Келдыш получил для  $\Phi$  уравнение, совпадающее с уравнением Гросса–Питаевского. Поскольку интересующие нас электрические эффекты в сверхтекучей фазе могут возникать только при несовпадении электронной и дырочной координат, то следует найти функцию  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  при  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ . Эта задача решается в настоящей работе. Несколько модифицируя метод работы [10], мы получаем уравнение для  $\Phi$  в случае, когда  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ . Оно оказывается нелинейным и нелокальным интегродифференциальным уравнением, которое удастся решить, если параметр порядка медленно изменяется на длине порядка размера пар. По известному  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  можно вычислить сверхтекучую плотность, сверхтекучую скорость и плотность дипольного момента системы.

## 2. Вывод основного уравнения

Перейдем к решению поставленной задачи. Гамильтониан электрон-дырочного газа, частицы которого взаимодействуют по закону Кулона, в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_h} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \{ a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} b_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - 2a_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} \}. \quad (1)$$

Здесь  $m_e, m_h$  — массы соответственно электронов и дырок, потенциал

$$V_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e^2}{\epsilon_0 k^2}, \quad (2)$$

$a_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}$  — фермиевские операторы уничтожения электрона и дырки. Благодаря притяжению между электронами и дырками возникают связанные пары, и в

пространственно однородном случае волновая функция основного состояния совпадает с функцией БКШ [12]

$$|\Phi\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}}^+) |0\rangle. \quad (3)$$

В связи с формулами (1), (3) необходимо сделать следующее замечание: операторам  $a_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}$  следовало бы приписать спиновый индекс  $\sigma$ , однако мы, так же, как и БКШ, будем считать, что электроны и дырки в паре имеют противоположные спины. Как отметили БКШ [12], обменные члены уменьшают взаимодействие для параллельных спинов. Поэтому ниже мы принимаем, что происходит синглетное спаривание, и опускаем спиновые индексы у операторов  $a_{\mathbf{k}}$  и  $b_{\mathbf{k}}$ .

Нас интересует пространственно неоднородный случай, когда плотность пар и их скорость могут быть функциями координат и времени. В работе Келдыша [10] приведены аргументы в пользу того, что в этом случае волновую функцию  $|\Phi\rangle$  можно искать в виде обобщенного когерентного состояния:

$$|\Phi\rangle = \exp\left\{\int [\Psi_h^+(\mathbf{r}_1)\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \times \exp(i\mu t / \hbar)\Psi_e^+(\mathbf{r}_2) - \text{h.c.}] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2\right\} |0\rangle \equiv \hat{D}|0\rangle. \quad (4)$$

Здесь  $\Psi_e(\mathbf{r})$  и  $\Psi_h(\mathbf{r})$  — фермиевские операторы уничтожения соответственно электрона и дырки в точке  $\mathbf{r}$ . Неизвестные функции  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  в методе Келдыша должны находиться из уравнения, которое является прямым следствием уравнения Шредингера для функции (4)

$$\left(i\hbar D^+ \frac{\partial D}{\partial t} - \tilde{H}\right) |0\rangle = 0, \quad (5)$$

где  $\tilde{H} = D^+ H D$ .

Полезно отметить, что в пространственно однородном случае волновая функция Келдыша (4) переходит в волновую функцию БКШ (3), в которой  $u_{\mathbf{k}} = \cos \Phi(\mathbf{k})$ ,  $v_{\mathbf{k}} = \sin \Phi(\mathbf{k})$ , где  $\Phi(\mathbf{k})$  — фурье-компоненты функции  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ .

Переходя к отысканию уравнения для  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , напомним, что коэффициенты  $u_{\mathbf{k}}$  и  $v_{\mathbf{k}}$  в волновой функции БКШ можно найти либо методом диагонализации гамильтониана, либо путем минимизации энергии системы, выраженной через коэффициенты  $u_{\mathbf{k}}$  и  $v_{\mathbf{k}}$ . Подобно этому уравнение для функции  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  можно найти или из решения уравнения (5), как это сделано Келдышем, или путем вариации по  $\Phi$  выражения для энергии системы, точнее функционала  $E\{\Phi^*, \Phi\} \equiv \langle 0 | \tilde{H} | 0 \rangle$ .

При вычислении  $E$  учтем, что в силу унитарности оператора  $D$  имеет место равенство

$$\tilde{H}(\Psi^+, \Psi) = H(\tilde{\Psi}^+, \tilde{\Psi}), \quad (6)$$

где  $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}) = D^+ \Psi(\mathbf{r}) D$ . (7)

С помощью прямого вычисления находим, что (ср. с [10])

$$\tilde{\Psi}_e(\mathbf{r}) = \int [C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi_e(\mathbf{r}') + S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi_h^+(\mathbf{r}')] d^3 r', \quad (8)$$

$$\tilde{\Psi}_h(\mathbf{x}) = \int [\Psi_h(\mathbf{r}') \tilde{C}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - \Psi_e^+(\mathbf{r}') S(\mathbf{r}', \mathbf{r})] d^3 r'. \quad (9)$$

Матрицы  $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и  $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  равны

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\Phi \Phi^+)^n, \quad (10)$$

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Phi(\Phi^+ \Phi)^n. \quad (11)$$

В формулах (10), (11)  $\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Phi^*(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  и перемножение функций  $\Phi$  и  $\Phi^+$  понимается в смысле интегральных сверток. Матрица  $\tilde{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  отличается от  $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  перестановкой функций  $\Phi$  и  $\Phi^+$ .

Из вида матриц  $C$  и  $S$  следует, что энергия  $E$  записывается в виде бесконечного ряда по степеням  $\Phi$  и  $\Phi^+$ . Поэтому в общем случае уравнение для функции  $\Phi$ , которая минимизирует энергию, содержит  $\Phi$  (и  $\Phi^+$ ) в произвольной степени и не может быть решено. Иная ситуация имеет место в пределе низкой плотности, когда размер связанной электрон-дырочной пары мал по сравнению со средним расстоянием между парами. При этом в выражениях для  $C$ ,  $\tilde{C}$  и  $S$  достаточно учитывать только два члена разложения

$$C = 1 - \frac{1}{2} \Phi \Phi^+, \quad \tilde{C} = 1 - \frac{1}{2} \Phi^+ \Phi, \quad S = \Phi - \frac{1}{6} \Phi \Phi^+ \Phi. \quad (12)$$

В этом приближении функционал  $E\{\Phi^*, \Phi\}$  имеет вид

$$E\{\Phi^*, \Phi\} = \int \Phi^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_h} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_2^2 - \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right] \times \\ \times \Phi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \frac{1}{2} \int \left[ \frac{e^2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}|} + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} - \frac{e^2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} - \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right] \times \\ \times \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Phi^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Phi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Phi^+(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}. \quad (13)$$

Варируя теперь разность

$$E - \mu N = E - \mu \int \Phi^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (14)$$

и приравнявая результат нулю, получаем уравнение

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_h} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_2^2} - \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ + \int R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \Phi^+(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Phi(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 = \\ = \mu \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (15)$$

Здесь ядро  $R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$  равно

$$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = e^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) - \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right) \right]. \quad (16)$$

### 3. Решение основного уравнения. Поляризация неоднородной системы

Уравнение (15) является нелинейным нелокальным интегродифференциальным уравнением, и его точное решение, разумеется, не может быть получено. При построении приближенного решения следует учитывать, что в задаче есть три характерные энергии: энергия связи пары  $\varepsilon_0$ , энергия взаимодействия пар (в расчете на одну пару)  $\varepsilon_{\text{int}} = gn$ , где  $g$  — константа взаимодействия (которую мы вычислим ниже),  $n$  — плотность пар, и энергия, обусловленная неоднородностью в задаче,  $\varepsilon_{\text{inhom}} \approx \hbar^2 / (2ML^2)$ , где  $M = m_e + m_h$  — масса пары,  $L$  — характерный масштаб неоднородности. Мы будем предполагать, что между этими энергиями имеют место следующие неравенства:

$$\varepsilon_0 \gg \varepsilon_{\text{int}} > \varepsilon_{\text{inhom}}. \quad (17)$$

Первое из этих неравенств есть следствие предположенной выше низкой плотности пар  $n$ . Оно представляет собой записанное в другой форме неравенство  $a \gg a_B$ , где  $a = n^{-1/3}$  — среднее расстояние между парами,  $a_B = \hbar^2 / (me^2)$  — эффективный борковский радиус,  $m^{-1} = m_e^{-1} + m_h^{-1}$ . Второе неравенство означает, что мы ограничиваемся рассмотрением слабонеоднородных состояний, при которых характерный масштаб неоднородности  $L$  больше длины когерентности  $\xi_0 \equiv [\hbar^2 / (2Mgn)]^{1/2}$ .

Поскольку энергия  $\varepsilon_0$  связана с движением электрона и дырки друг относительно друга, а остальные энергии — с движением пар как целого, то решение уравнения (15) можно искать в виде

$$\Phi = \varphi(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{R}_{12})\Psi(\mathbf{R}_{12}), \quad (18)$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{R}_{12}) = \varphi^{(0)}(\mathbf{r}_{12}) + \varphi^{(1)}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{R}_{12}), \quad (19)$$

причем  $\varphi^{(1)}$  меньше  $\varphi^{(0)}$  в  $\varepsilon_{\text{int}}/\varepsilon_0$  раз. Здесь мы перешли от переменных  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  к координате центра масс  $\mathbf{R}_{12}$  и относительной координате  $\mathbf{r}_{12}$ :

$$\mathbf{R}_{12} = \frac{m_h \mathbf{r}_1 + m_e \mathbf{r}_2}{m_e + m_h}, \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (20)$$

Функция  $\Psi$  (параметр порядка) описывает движение пар как целого. Предполагается, что  $\Psi$  медленно изменяется на длине  $\xi_0$ .

Записывая химический потенциал  $\mu$  в виде, аналогичном (19),

$$\mu = \mu_0 + \mu_1, \quad (21)$$

и вводя обозначения

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} - \frac{e^2}{r}, \quad \hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2}, \quad (22)$$

приходим к системе уравнений для  $\varphi$  и  $\Psi$ .

В нулевом приближении

$$\hat{H}_0 \varphi^{(0)} \Psi = \mu_0 \varphi^{(0)} \Psi. \quad (23)$$

Отсюда следует, что

$$\mu_0 = \varepsilon_0, \quad \varphi^{(0)} = \varphi_0. \quad (24)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  и  $\varphi_0$  — соответственно энергия и волновая функция основного состояния кулоновской задачи для пары.

В следующем приближении:

$$\begin{aligned} \mu_0 \varphi^{(1)} \Psi &= \hat{H}_0 \varphi^{(1)} \Psi - \mu_1 \varphi_0 \Psi + \hat{K} \varphi_0 \Psi + \\ &+ \int R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \varphi_0(\mathbf{r}_{13}) \varphi_0(\mathbf{r}_{34}) \varphi_0(\mathbf{r}_{42}) \times \\ &\times \Psi(\mathbf{R}_{13}) \Psi^*(\mathbf{R}_{43}) \Psi(\mathbf{R}_{42}) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (25) есть линейное неоднородное уравнение относительно  $\varphi^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Согласно общему правилу, такое уравнение имеет решение лишь в том случае, когда неоднородная часть ортогональна решению соответствующего однородного уравнения, т.е.  $\varphi_0$ . Условие разрешимости приводит к следующему уравнению для  $\Psi$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{R}_{12}^2} - \mu_1 \Psi + g |\Psi(\mathbf{R}_{12})|^2 \Psi(\mathbf{R}_{12}) = 0. \quad (26)$$

Здесь константа взаимодействия  $g$  равна:

$$\begin{aligned} g &\equiv \int \mathbf{R}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \varphi_0(\mathbf{r}_{13}) \varphi_0(\mathbf{r}_{34}) \times \\ &\times \varphi_0(\mathbf{r}_{42}) \varphi_0(\mathbf{r}_{21}) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 d\mathbf{r}_{12}. \end{aligned} \quad (27)$$

Входящая в (26) поправка к химическому потенциалу  $\mu_1$  должна быть найдена из условия нормировки параметра порядка  $\Psi$  на полное число пар. При  $g > 0$  уравнение (26) совпадает с известным уравнением Гросса–Питаевского для слабонеидеального бозе-газа, что вполне естественно. Положительность  $g$  проще всего увидеть, если разложить в выражении (27) все функции в ряды Фурье. В частности,

$$\frac{1}{r} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{4\pi}{k^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (28)$$

Выполняя в (27) интегрирование по всем  $\mathbf{r}_i$ , получим после преобразований (см. Приложение 1)

$$g = \int \frac{4\pi e^2}{(2\pi)^6 k^2} \left[ \varphi_0\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2}\right) - \varphi_0\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2}\right) \right]^2 \times \varphi_0\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2}\right) \varphi_0\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2}\right) d\mathbf{p} d\mathbf{k}. \quad (29)$$

Поскольку нормированное на единицу  $\varphi_0$  равно

$$\varphi_0(\mathbf{k}) = \frac{8\sqrt{\pi} a_B^{3/2}}{\left[1 + (a_B k)^2\right]^2}, \quad (30)$$

то из (29) очевидно, что  $g > 0$ . Вычисления показывают, что

$$g = \frac{13}{3} \pi e^2 a_B^2. \quad (31)$$

Перейдем к решению уравнения (25). Нетрудно убедиться, что благодаря наличию в последнем слагаемом уравнения (25) трех функций  $\varphi_0$  аргументы всех  $\Psi$ -функций должны быть близки к  $\mathbf{R}_{12}$ . Поэтому  $\Psi$ -функции можно разложить вблизи точки  $\mathbf{R}_{12}$ . В общем случае  $\Psi$  может быть записано в виде  $\Psi(\mathbf{R}) = |\Psi(\mathbf{R})| \exp[i\theta(\mathbf{R})]$ . При разложении фаз  $\theta(\mathbf{R})$  вблизи  $\mathbf{R}_{12}$  получаем в линейном приближении по  $\partial\theta/\partial\mathbf{R}_{12}$ :

$$\begin{aligned} & \exp[i\theta(\mathbf{R}_{13})] \exp[-i\theta(\mathbf{R}_{43})] \exp[i\theta(\mathbf{R}_{42})] = \\ & = \exp \left\{ i \left[ \theta(\mathbf{R}_{12}) + \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{R}_{12}} \frac{m_e}{M} \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) - \theta(\mathbf{R}_{12}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{R}_{12}} \cdot \left( \frac{m_e}{M} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) + \frac{m_h}{M} (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1) \right) + \theta(\mathbf{R}_{12}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{R}_{12}} \frac{m_h}{M} \cdot (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1) \right] \right\} = \exp[i\theta(\mathbf{R}_{12})]. \quad (32) \end{aligned}$$

Этот результат показывает, что выражение (25), а тем самым и дипольный момент, в линейном приближении по градиенту не зависит от градиента фазы, а следовательно, и от сверхтекучей скорости. Независимость дипольного момента  $\mathbf{P}$  от скорости очевидна из следующих общих соображений.

Дипольный момент является  $T$ -инвариантной величиной (при замене времени  $t$  на  $-t$  дипольный момент не изменяется). Скорость системы  $\mathbf{v}$ , очевидно, не является  $T$ -инвариантной. Таким образом,  $\mathbf{P}$  не может быть пропорциональным  $\mathbf{v}$ . Это правило, однако, не запрещает пропорциональность между  $\mathbf{P}$  и  $\partial\mathbf{v}/\partial t$ . Речь сейчас идет о ситуации в отсутствие магнитного поля. При наличии магнитного поля для неизменности уравнения Шредингера при замене  $t$  на  $-t$  необходимо заменить волновую функцию  $\Psi$  на  $\Psi^*$  и векторный потенциал  $\mathbf{A}$  на  $-\mathbf{A}$ . Последнему отвечает замена магнитного поля  $\mathbf{H}$  на  $-\mathbf{H}$ . Таким образом, в магнитном поле дипольному моменту «разрешается» быть пропорциональным  $\mathbf{v} \times \mathbf{H}$  (см. ниже).

Для модулей функций  $\Psi$  с той же степенью точности получим соотношение

$$\begin{aligned} & \Psi(\mathbf{R}_{13}) \Psi^*(\mathbf{R}_{43}) \Psi(\mathbf{R}_{42}) = \left\{ |\Psi(\mathbf{R}_{12})|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{[m_h(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1) + m_e(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)]}{m_e + m_h} \frac{\partial |\Psi(\mathbf{R}_{12})|^2}{\partial \mathbf{R}_{12}} \right\} \Psi(\mathbf{R}_{12}). \quad (33) \end{aligned}$$

Хотя второе слагаемое в фигурных скобках в (33) мало по сравнению с первым, его следует удержать, поскольку именно оно ответственно за появление у электрон-дырочных пар дипольного момента. В дальнейшем мы будем удерживать только второе слагаемое в (33), т.е. часть, приводящую к ненулевому дипольному моменту.

После подстановки (33) в уравнение (25) коэффициент пропорциональности перед вектором  $|\Psi(\mathbf{R}_{12})| \times (\partial |\Psi(\mathbf{R}_{12})|^2 / \partial \mathbf{R}_{12})$  (обозначим его через  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_{12})$ ) после ряда преобразований можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(\mathbf{r}_{12}) = -e^2 \gamma \int \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_{12}|} + \frac{1}{2r_4} + \frac{1}{2r_{12}} \right) - \frac{1}{r_3} \right] \times \\ & \times (\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_{12}) \varphi_0(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_{12}) \varphi_0(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3) \varphi_0(\mathbf{r}_4) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4. \quad (34) \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma = (m_h - m_e) / (m_h + m_e)$ . Входящие сюда интегралы по  $\mathbf{r}_3$  и  $\mathbf{r}_4$  удастся вычислить. Подробности вычислений приведены в Приложении 2. После интегрирования получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(\mathbf{r}_{12}) = -\frac{\sqrt{\pi}}{180} e^2 \gamma a_B^{3/2} \exp\left(\frac{-r_{12}}{a_B}\right) \left[ 19 \left(\frac{r_{12}}{a_B}\right)^4 + \right. \\ & \left. + 72 \left(\frac{r_{12}}{a_B}\right)^3 - 15 \left(\frac{r_{12}}{a_B}\right)^2 + 105 \left(\frac{r_{12}}{a_B}\right) + 210 \right] \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (35) \end{aligned}$$

Множитель  $\gamma = (m_h - m_e) / (m_h + m_e)$  в (35) показывает, что при равных массах обеих частиц всё выражение обращается в нуль. Как будет показано ниже, при  $\gamma = 0$  дипольный момент пары также равен нулю и, следовательно, электрические эффекты связаны именно с несимметричностью пары по массам частиц.

Теперь мы можем выписать решение уравнения (25), обусловленное неоднородностью (точнее, той частью неоднородности, которая приводит к отличному от нуля дипольному моменту пар). Вводя функцию Грина

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\substack{n>1 \\ l,m}} \frac{\varphi_{nlm}(\mathbf{r}) \varphi_{nlm}^*(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{nl}}, \quad (36)$$

где  $\varphi_{nlm}$  — собственные функции кулоновской задачи (гамильтониана  $\hat{H}_0$ ), а  $\varepsilon_{nl}$  — собственные значения энергии, получаем стандартным образом:

$$\varphi^{(1)} = \int d\mathbf{r}'_2 G(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}'_2) \mathbf{F}(\mathbf{r}'_2) \cdot \frac{\partial |\Psi(\mathbf{R}_{12})|^2}{\partial \mathbf{R}_{12}}. \quad (37)$$

Поляризация (дипольный момент единицы объема) равна ( $e$  — элементарный заряд, здесь и ниже  $e > 0$ )

$$\mathbf{P} = \int \left[ \varphi^{(0)*}(\mathbf{r}) + \varphi^{(1)*}(\mathbf{r}) \right] \Psi^*(\mathbf{R}) e \mathbf{r} \times \\ \times \left[ \varphi^{(0)}(\mathbf{r}) + \varphi^{(1)}(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{R}) d\mathbf{r} \approx |\Psi(\mathbf{R})|^2 \times \\ \times \int \left[ \varphi^{(1)*}(\mathbf{r}) e \mathbf{r} \varphi^{(0)}(\mathbf{r}) + \varphi^{(0)*}(\mathbf{r}) e \mathbf{r} \varphi^{(1)}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}. \quad (38)$$

Подставляя сюда выражение для  $\varphi^{(1)}$  из (37), получаем

$$\mathbf{P} = 2 |\Psi(\mathbf{R})|^2 \frac{\partial |\Psi(\mathbf{R})|^2}{\partial \mathbf{R}} \times \\ \times \int d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}'_{12} \varphi_0(\mathbf{r}_{12}) e \mathbf{r}_{12} \sum_{n \neq 0} \frac{\varphi_{nlm}(\mathbf{r}_{12}) \varphi_{nlm}^*(\mathbf{r}'_{12})}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{nl}} \mathbf{F}(\mathbf{r}'_{12}) = \\ = A \gamma e n a_B^5 \frac{\partial n}{\partial \mathbf{R}}. \quad (39)$$

Входящие в (39) функции  $\varphi_{nlm}$  имеют вид  $\varphi_{nlm} = C e^{im\varphi} R_{nl}(r) P_l^m(\cos\theta)$ . Используя явный вид этих функций, можно показать, что интеграл отличен от нуля только при  $l = 1$ ,  $m = 0$  и любом  $n > 1$ . При вычислении  $A$  достаточно удерживать слагаемые с  $n = 2$  и  $n = 3$ , поскольку вклад остальных слагаемых является весьма малым. Вычисления показывают, что  $A \approx 120$ .

Мы видим, что неоднородность системы порождает в ней дипольный момент. При этом  $\mathbf{P}$  обращается в нуль, если  $m_h = m_e$ , т.е. причиной появления дипольного момента является асимметрия пары по массам входящих в нее частиц. Обычно  $m_h > m_e$ . В этом случае в неоднородной системе дипольный момент направлен своим положительным концом по градиенту плотности. Отметим, что в нашем кратком сообщении [13] выражение (39) для дипольного момента приведено с ошибочным знаком.

На возможность появления поляризации в  ${}^4\text{He}$  из-за его неоднородности обращено внимание в [7], но результат представлен в несколько завуалированной форме: «из-за того, что атомы чувствуют незначительное изменение плотности гелия в волне второго звука, они должны приобретать дипольный момент, направленный вдоль  $\nabla T$ ». Вопрос этот изучался и в работе [14], в которой с помощью феноменологического рассмотрения показано, что в неоднородной среде возникает дипольный момент, пропорциональный величине градиента плотности  $\nabla n(\mathbf{r})$  и направленный по градиенту плотности.

Итак, мы показали, что в стационарном случае задача о вычислении поляризации сверхтекучей жидкости (в отсутствие внешних электрических и магнитных полей) сводится к нахождению плотности жидкости как функции координат.

До сих пор рассматривались стационарные состояния. Более общим является состояние, описываемое волновой функцией Келдыша, в которой  $\Phi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  заменено на

$\Phi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t)$ , причем зависимость от времени  $t$  является медленной по сравнению с  $\exp[(i\mu t)/\hbar]$ . В результате в правой стороне уравнений (25) и (26) появится слагаемое  $i\hbar(\partial\Psi/\partial t)$ .

#### 4. Более общее рассмотрение

Выражение (39), найденное с помощью микроскопического расчета, можно получить из достаточно простых физических соображений. Рассмотрим два одинаковых атома в  $S$ -состоянии. В этом состоянии в отсутствие взаимодействия между атомами их дипольные, квадрупольные и т.д. электрические моменты равны нулю. Однако из-за непрерывных флуктуаций электронной плотности в атомах они взаимодействуют друг с другом, что приводит к перераспределению электронной плотности каждого из атомов. В результате у атомов появляются равные и противоположно направленные дипольные моменты  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ . Очевидно, эти моменты ориентированы вдоль линии, соединяющей центры атомов. Величина дипольных моментов существенно зависит от расстояния между атомами  $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ . Если  $R_{12}$  много больше размера атомов и много меньше характерных длин волн  $\lambda$  в спектрах взаимодействующих атомов, то возникающие в атомах дипольные моменты равны (см., например, [15])

$$p_1 = (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) = -p_2 = -(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}) = \frac{D}{R^7}. \quad (40)$$

Здесь  $\mathbf{n} = \mathbf{R}_{12} / R_{12}$  и константа  $D$ , зависящая от поляризуемости атома, всегда больше нуля. (Например, в случае двух атомов  ${}^4\text{He}$  коэффициент  $D \approx 18,4 e a_B^8$ .) Этому соответствует смещение центра распределения электронной плотности каждого из атомов в сторону другого. Результат (40) может быть получен по теории возмущений путем разложения потенциала взаимодействия атомов и их волновых функций по степеням малого параметра  $a_B / R_{12}$ . При уменьшении  $R_{12}$  до величины порядка размера атомов теория возмущений становится неприменимой. Электронные оболочки атомов начинают перекрываться, и дальнейшее их сближение приводит к смене направления дипольного момента каждого из атомов на противоположное, причем величина дипольного момента растет с уменьшением  $R_{12}$ . Обычно считают (см., например, [16]), что при малых расстояниях между атомами индуцированный их взаимодействием дипольный момент зависит от  $R_{12}$  экспоненциально:

$$p_2 = (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}) = -p_1 = -(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) = p_0 \exp(-R_{12} / R_0). \quad (41)$$

Здесь  $p_0$  значительно превосходит величину дипольного момента, которая следует из выражения (40) во всей области его применимости. Этот результат можно получить вариационным методом или методом самосогласованного поля Хартри–Фока.

Полный дипольный момент атома записывают [16] в виде суммы выражений (40) и (41). Дипольный мо-

мент некоторого атома в среде получается суммированием моментов, наводимых в этом атоме всеми другими атомами. В результате  $Z$ -компонента дипольного момента атома в некоторой точке, которую мы примем за начало координат, равна

$$p_Z(0) = \int \left( p_0 \exp(-R/R_0) - \frac{D}{R^7} \right) \frac{Z}{R} n(\mathbf{p}, Z) d^2 \rho dZ. \quad (42)$$

Здесь  $n(\mathbf{p}, Z)$  — плотность атомов в точке  $(\mathbf{p}, Z)$  и учтено, что  $Z$ -компонента дипольного момента в точке  $(0,0)$ , наводимая атомом в точке  $(\mathbf{p}, Z)$ , получается умножением (40), (41) на косинус угла между осью  $Z$  и вектором, соединяющим эти атомы. Интегрирование в (42) следует выполнить по всему пространству, однако поскольку слагаемое, пропорциональное  $D/R^7$ , имеет смысл лишь при  $R \gg a_B$ , то при вычислении соответствующего интеграла мы будем обрезать его на нижнем пределе при  $R = \sigma$ , где  $\sigma \gg a_B$ .

Ввиду быстрого убывания функций, стоящих перед  $n(\mathbf{p}, Z)$  в интеграле (42), плотность можно считать медленно изменяющейся функцией координат и в случае, когда  $n$  зависит только от одной координаты, которую мы выберем в качестве оси  $Z$ , записать  $n(\mathbf{p}, Z)$  в виде

$$n = n_0 + \frac{\partial n}{\partial Z} Z \quad (43)$$

При вычислении интегралов в данном случае удобно перейти к сферическим координатам. Подстановка (43) в (42) и интегрирование дают

$$p_Z(0) = \left( 6p_0 R_0^4 - \frac{D}{3\sigma^3} \right) \frac{4\pi}{3} \frac{\partial n}{\partial Z}. \quad (44)$$

После умножения этого выражения на плотность атомов  $n$  оно должно переходить в выражение для плотности дипольного момента (39). Прежде чем сравнивать оба выражения, отметим, что между длинами  $R_0$  и  $\sigma$  выполняется соотношение  $\sigma \geq R_0$ , и поскольку  $p_0 \gg D/\sigma^7$ , то первое слагаемое в (44) существенно превосходит второе. Если считать, что  $p_0 \approx |e|a_B$ , то, приравнявая (39) и (44), найдем, что  $R_0 \approx 1,5a_B$ , что представляется разумным результатом.

То обстоятельство, что волновая функция Келдыша, с помощью которой получено выражение (39), описывает только область отталкивания между атомами, вполне естественно. Как и всякий метод самосогласованного поля, метод Келдыша не учитывает корреляции между электронами разных атомов. А именно эти корреляции приводят к притяжению между атомами на больших расстояниях.

Полезно на простом примере продемонстрировать, что вектор поляризации направлен по градиенту плотности вследствие смещения электронной плотности одного атома в сторону противоположную другому. Рассмотрим три одинаковых атома, расположенных на одной прямой на разных расстояниях друг от друга (рис. 1):  $r_{32} > r_{12}$ .

На рисунке показаны дипольные моменты, возникающие у атомов вследствие их взаимодействия друг с другом в соответствии с формулой (41). Здесь  $\mathbf{p}_{ij}$  — дипольный момент, наведенный у атома  $j$  вследствие взаимодействия с атомом  $i$ . Из формулы (41) при  $r_{32} > r_{12}$  следует  $p_{32} < p_{12}$ . В результате суммарный дипольный момент  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{12} + \mathbf{p}_{32}$  атома 2 направлен в сторону меньшего расстояния между атомами, т.е. в сторону большей плотности атомов, что находится в соответствии с выражением (39).

Этот простой пример показывает, что характер поляризации при наличии неоднородности однозначно определяется направлением наведенных взаимодействием дипольных моментов в системе двух атомов.

### 5. Поляризация сверхтекучей системы в магнитном поле

В этом разделе мы рассмотрим, как изменятся полученные выше результаты, если приложить внешнее магнитное поле. При наличии магнитного поля сумма операторов  $\hat{H}_0 + \hat{K}$  (см. (22)) заменяется на

$$\hat{H} \equiv \frac{1}{2m_e} \left[ -i\hbar \nabla_e + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_e) \right]^2 + \frac{1}{2m_h} \left[ -i\hbar \nabla_h - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_h) \right]^2 - \frac{e^2}{r}. \quad (45)$$

Здесь  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — векторный потенциал, связанный с полем  $\mathbf{H}$  соотношением  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ . При наличии магнитного поля после перехода к переменным  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$  разделение переменных не происходит. Для разделения переменных совершаем унитарное преобразование [17]  $\tilde{\Psi} = U\Psi$ ,  $\hat{H} = U\hat{H}U^{-1}$ , где

$$U = \exp \frac{ie(\mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{r})}{ch}. \quad (46)$$

Оператор импульса пары после такого преобразования приобретает вид  $\hat{\pi} = -i\hbar(\partial/\partial\mathbf{R})$ . Для гамильтониана  $\hat{H}$  после преобразования получаем выражение

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} - \frac{ie\hbar}{Mc} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{e^2}{8mc^2} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}]^2 - \frac{ie\hbar}{2mc} \gamma [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e^2}{r}, \quad (47)$$

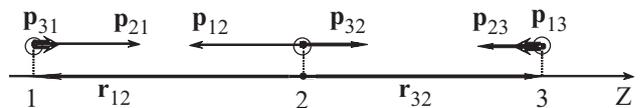


Рис. 1. Дипольные моменты, возникающие у атомов из-за взаимодействия друг с другом (41).

а для функции  $\Phi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h)$  в новом представлении — выражение

$$\tilde{\Phi} = \exp\left(\frac{i\pi \cdot \mathbf{R}}{\hbar}\right) \varphi_{\pi}^{(0)}(\mathbf{r}) \Psi. \quad (48)$$

Здесь  $\pi$  — собственное значение оператора  $\hat{\pi}$ , и предполагается, что система движется как целое со скоростью  $\mathbf{v} = \pi / M$ . В таком случае  $\Psi$  не зависит от координат. При этом уравнение для  $\varphi^{(0)}$  записывается в виде

$$\left( \frac{\pi^2}{2M} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{e}{Mc} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] \pi + \frac{e^2}{8mc^2} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}]^2 - \right. \\ \left. - \frac{ie\hbar}{2mc} \gamma [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e^2}{r} \right) \varphi_{\pi}^{(0)} = \mu_0 H \varphi_{\pi}^{(0)}. \quad (49)$$

Точное решение этого уравнения не может быть получено, но слагаемые, связанные с магнитным полем, можно учесть по теории возмущений при условии, что характерная энергия взаимодействия между электроном и дыркой  $-e^2/a_B$  (взятая по модулю) существенно превосходит расстояние между уровнями Ландау  $\hbar e H / (mc)$ . В реально достижимых полях при  $m$  порядка массы свободного электрона это условие всегда выполняется. Фактически для нас представляет интерес только поправка к волновой функции, обусловленная слагаемым  $e[\mathbf{H} \times \mathbf{r}] \pi / (Mc)$ . Саму поправку даже нет необходимости вычислять, поскольку очевидно, что если записать указанное слагаемое в виде  $e\mathbf{E}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{E}_{\text{eff}} = [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] / c$  имеет смысл «эффективного» электрического поля, то такое поле создаст у пары дипольный момент  $\mathbf{p} = \alpha [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] / c$ . Связанная с тем же слагаемым перенормировка химического потенциала  $\mu_0$  мала не только по сравнению с энергией связи  $\epsilon_0$ , но и по сравнению с кинетической энергией пар (меньше ее в  $Mc^2 / \hbar^2 a_B^3$  раз) и может быть опущена. Добавка к  $\mu_0$ , обусловленная слагаемым  $e^2 [\mathbf{H} \times \mathbf{r}]^2 / (8mc^2)$ , приводит к несущественной константе, и ее также можно опустить.

В магнитном поле приобретает добавку не только функция  $\varphi_{\pi}^{(0)}$ , но и  $\varphi_{\pi}^{(1)}$ . Добавка эта имеет такую же структуру, как и добавка к  $\varphi_{\pi}^{(0)}$ , но она умножается на малый множитель  $\mu_1 / \mu_0 \approx a_B^3 n \ll 1$ . Поэтому можно считать, что функция  $\varphi_{\pi}^{(1)}$  в магнитном поле совпадает с ее значением в отсутствие магнитного поля. Отсюда следует, что в магнитном поле поляризация системы равна сумме полученного выше выражения (39) и

$$\mathbf{P} = \alpha \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]}{c} n. \quad (50)$$

Последнее выражение фактически учитывает поляризацию, обусловленную действием на частицы силы Лоренца. Причина такой поляризации в том, что сила Лоренца действует на электрон и дырку в проти-

воположных направлениях, создавая у пары дипольный момент.

## Приложение 1

Приведем подробности вычисления константы взаимодействия  $g$  в уравнении Гросса–Питаевского:

$$g = e^2 \int \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{|\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_{12}|} \right] - \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_{12}|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_{12}|} \right) \right\} \times \\ \times \varphi_0(r_{12}) \varphi_0(r_3) \varphi_0(r_4) \varphi_0(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_{12}) d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4. \quad (\text{П1.1})$$

Ниже вместо  $\mathbf{r}_{12}$  пишем  $\mathbf{r}$ . Учитывая, что подынтегральное выражение инвариантно относительно замен  $\mathbf{r}_{12} \leftrightarrow \mathbf{r}_3$  и  $\mathbf{r}_{12} \leftrightarrow \mathbf{r}_4$ , легко убедиться, что второе и третье слагаемые в квадратных скобках совпадают с первым. В результате (П1.1) можно записать в виде

$$g = e^2 \int \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{r} + \frac{1}{|\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}|} \right] - \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}|} \right) \right\} \times \\ \times \varphi_0(r) \varphi_0(r_3) \varphi_0(r_4) \varphi_0(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4. \quad (\text{П1.2})$$

Покажем, что и четвертое слагаемое в квадратных скобках в (П1.1) совпадает с первым. Для этого заменим в четвертом слагаемом  $\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}$  на  $\mathbf{r}'$ , а  $\mathbf{r}_3$  и  $\mathbf{r}_4$  на  $-\mathbf{r}_3$  и  $-\mathbf{r}_4$ . После этого четвертое слагаемое становится равным

$$\int \frac{1}{r'} \varphi_0(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}') \varphi_0(r_3) \varphi_0(r_4) \varphi_0(r') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \quad (\text{П1.3})$$

и, очевидно, совпадает с первым слагаемым. Аналогичным образом можно показать, что слагаемые в круглых скобках также совпадают друг с другом. В результате выражение для константы взаимодействия принимает вид

$$g = 2e^2 \int \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{|\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}|} \right\} \varphi_0(r) \varphi_0(r_3) \times \\ \times \varphi_0(r_4) \varphi_0(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4. \quad (\text{П1.4})$$

Далее записываем все сомножители (П1.4) в виде их разложения в интегралы Фурье:

$$g = 2e^2 \int \frac{1}{(2\pi)^{15}} \frac{4\pi}{k^2} (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{r}_3)}) \varphi_0(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \varphi_0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_3} \times \\ \times \varphi_0(\mathbf{n}) e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_4} \varphi_0(\mathbf{m}) e^{i\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)} d\mathbf{r} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 d\mathbf{k} d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{m} d\mathbf{n}. \quad (\text{П1.5})$$

После интегрирования по всем  $\mathbf{r}_i$  получаем

$$g = 2e^2 \int \frac{4\pi}{(2\pi)^6 k^2} \left[ \varphi_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \varphi_0^3(\mathbf{p}) - \varphi_0^2(\mathbf{p}) \varphi_0^2(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \right] d\mathbf{k} d\mathbf{p}. \quad (\text{П1.6})$$

Заменяем в этом выражении  $\mathbf{p}$  на  $\mathbf{p} - \mathbf{k} / 2$ :

$$g = 2e^2 \int \frac{4\pi}{(2\pi)^6 k^2} \left[ \varphi_0\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2}\right) - \varphi_0\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2}\right) \right] \times \varphi_0^2\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2}\right) \varphi_0\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2}\right) d\mathbf{k} d\mathbf{p}. \quad (\text{П1.7})$$

Записывая (П1.7) в виде суммы двух одинаковых слагаемых, заменяя в одном из них  $\mathbf{k}$  на  $-\mathbf{k}$  и складывая, получим

$$g = e^2 \int \frac{4\pi}{(2\pi)^6 k^2} \left[ \varphi_0\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2}\right) - \varphi_0\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2}\right) \right]^2 \times \varphi_0\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2}\right) \varphi_0\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2}\right) d\mathbf{k} d\mathbf{p} > 0, \quad (\text{П1.8})$$

что совпадает с выражением (29), приведенным в тексте.

## Приложение 2

Приведем вычисление выражения (34) на примере последнего слагаемого в квадратных скобках, а именно, рассмотрим интеграл

$$\int_{r_3}^{r_4} \varphi_0(r_3 - r_{12}) \varphi_0(r_4) \varphi_0(r_4 - r_3) d^3 r_3 d^3 r_4. \quad (\text{П2.1})$$

Собирая множители, зависящие от  $r_4$ , приходим к необходимости вычислить интеграл по  $r_4$

$$\mathbf{I} \equiv \int r_4 \varphi_0(r_4) \varphi_0(r_4 - r_3) d^3 r_4. \quad (\text{П2.2})$$

Раскладывая функцию  $\varphi_0(r_4 - r_3)$  в интеграл Фурье, получаем

$$\mathbf{I} = \int r_4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r_4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{8\sqrt{\pi}}{(1+k^2)^2} e^{i\mathbf{k}(r_4-r_3)} d^3 r_4 = \int \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r_4} \int \frac{d^3 k}{i(2\pi)^3} \frac{8\sqrt{\pi}}{(1+k^2)^2} e^{-i\mathbf{k}r_3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}r_4} d^3 r_4. \quad (\text{П2.3})$$

Выполняя интегрирование по  $r_4$ , находим

$$\mathbf{I} = \int \frac{d^3 k}{i(2\pi)^3} \frac{8}{(1+k^2)^2} e^{-i\mathbf{k}r_3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \frac{8\pi}{(1+k^2)^2}. \quad (\text{П2.4})$$

Дифференцируя по  $\mathbf{k}$ , получаем

$$\mathbf{I} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{256i\pi}{(1+k^2)^5} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}r_3}. \quad (\text{П2.5})$$

С другой стороны, мы можем выполнить в выражении (П2.4) интегрирование по частям, в результате получим

$$\mathbf{I} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{64i\pi}{(1+k^2)^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \frac{e^{-i\mathbf{k}r_3}}{(1+k^2)^2} = -\mathbf{I} - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{64\pi}{(1+k^2)^4} r_3 e^{-i\mathbf{k}r_3}. \quad (\text{П2.6})$$

Отсюда следует, что

$$2\mathbf{I} = -\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{64\pi}{(1+k^2)^4} r_3 e^{-i\mathbf{k}r_3} = -\frac{1}{3}(r_3^2 + 3r_3 + 3)e^{-r_3} r_3. \quad (\text{П2.7})$$

В итоге выражение (П2.1) принимает вид

$$\int \frac{\varphi_0(r_3 - r_{12})}{r_3} d^3 r_3 = -\frac{1}{6} \int \frac{1}{r_3} \varphi_0(r_3 - r_{12})(r_3^2 + 3r_3 + 3)e^{-r_3} r_3 d^3 r_3. \quad (\text{П2.8})$$

После замены  $\varphi_0(r_3 - r_{12})$  его разложением в ряд Фурье выражение (П2.8) преобразуется к виду

$$-\frac{1}{6} \int \frac{1}{r_3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{8\sqrt{\pi}}{(1+p^2)^2} e^{i\mathbf{p}(r_3-r_{12})} (r_3^2 + 3r_3 + 3)e^{-r_3} r_3 d^3 r_3. \quad (\text{П2.9})$$

Интегрируем далее сначала по  $d^3 r_3$ , а затем по  $d^3 p$ . В результате получаем

$$\frac{1}{180} \sqrt{\pi} r_{12} e^{-r_{12}} (105 + 105r_{12} + 28r_{12}^2 + 3r_{12}^3). \quad (\text{П2.10})$$

Аналогичным образом вычисляются и остальные слагаемые в (34).

1. А.С. Рыбалко, *ФНТ* **30**, 1321 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 994 (2004)].
2. А.С. Рыбалко, С. П. Рубец, *ФНТ* **31**, 820 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 623 (2005)].
3. А.М. Косевич, *ФНТ* **31**, 50 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 37 (2005)].
4. L.A. Melnikovsky, *J. Low Temp. Phys.* **148**, 559 (2007).
5. В.Д. Нацик, *ФНТ* **31**, 1201 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 915 (2005)].
6. Э.А. Пашицкий, С. М. Рябченко, *ФНТ* **33**, 12 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 8 (2007)].
7. В.М. Локтев, М. Д. Томченко, *ФНТ* **34**, 337 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 262 (2008)].
8. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
9. A.J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 307 (2001).
10. Л.В. Келдыш, в: *Проблемы теоретической физики*, Наука, Москва (1972).
11. J.P. Eisenstein and A.H. MacDonald, *Nature* **432**, 691 (2004).
12. J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).

13. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009).
14. В.Д. Нацик, *ФНТ* **34**, 625 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 493 (2008)].
15. Ю.С. Бараш, *Силы Ван-дер-Ваальса*, Наука, Москва (1988).
16. S. Weiss, *Can. J. Phys.* **54**, 584 (1976).
17. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B56**, 10355 (1997).

#### About electric phenomena in electroneutral superfluid systems

S.I. Shevchenko and A.S. Rukin

The Keldysh theory of superfluidity of rarefied electron-hole gas is generalized to the case of polarization of pairs. An equation is obtained for the complex order parameter  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  which

has the meaning of pairs wave function. This equation has the form of a nonlinear nonlocal integro-differential equation. The equation was solved in the case of slow variation of the order parameter at distances about the pair size. Using the known  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  we obtained the dipole moment of the system and showed that the inhomogeneity of the system generated a dipole moment which was proportional to the density gradient and directed parallel to it. It is found that in a magnetic field there appears an additional dipole moment due to polarization of the pairs by the Lorentz force.

PACS: **67.90.+z** Other topics in quantum fluids and solids;  
**67.25.D-** Superfluid phase.

Keywords: polarization, superfluidity, order parameter.