

Смешанный сценарий реконструкции заряженной поверхности гелия

В. Шикин, Е. Клиновая

Институт физики твердого тела РАН, Черноголовка, Московская обл., 142432, Россия

E-mail: shikin@mail.issp.ac.ru

Статья поступила в редакцию 7 июля 2009 г., после переработки 31 августа 2009 г.

Обсуждается смешанный сценарий периодической реконструкции заряженной поверхности жидкости в условиях ее близкой к насыщению степени заселенности 2D зарядами. Показано, что элементарной ячейкой возникающей периодической структуры является модифицированная многозарядная лунка.

Обговорюється змішаний сценарій періодичної реконструкції зарядженої поверхні рідини в умовах її близької до насичення ступеня заселеності 2D зарядами. Показано, що елементарною коміркою виникаючої періодичної структури є модифікована багатозарядна лунка.

PACS: 68.03.Hj Структура поверхности жидкости, изменения и моделирование;

68.03.Kp Динамика (капиллярные волны)

Ключевые слова: закон дисперсии, неустойчивость заряженной поверхности, многоэлектронная лунка.

Одной из существующих в классической гидродинамике является неустойчивость Френкеля–Тонкса (ФТ) [1,2], возникающая пороговым образом на заряженной поверхности жидкости и ведущая к ее деформации. Отличительной чертой процесса ФТ на фоне других известных распадов: рэлеевской неустойчивости цилиндрической струи [3], цепочки Кармана за движущимся цилиндром (сферой) [4], неустойчивости границы раздела двух жидких сред с относительным движением [5], вихревой неустойчивости Тэйлора для вязкого слоя жидкости между соосными, относительно вращающимися цилиндрами [5], и т.п. — является возможность остановки процесса распада и образование нового метастабильного состояния с конечной амплитудой гофрировки (явление реконструкции). В разные времена это явление на диэлектрических и заряженных границах привлекало внимание многих авторов [6–28]. Но важные нюансы происходящего оказались понятными лишь в последнее время. Универсальна в описании неустойчивости ФТ лишь начальная часть задачи (получение закона дисперсии и его анализ на предмет устойчивости). Дальнейшее различно для диэлектрических и с участием поверхностных зарядов сценариев. В заряженном случае возможно образование специфических солитонов, многозарядных лунок [21,22] — фактор, отсутствующий в поведении диэлектрических границ. Менее наглядный, но по существу более важный для различного поведения нейтральных и заряженных границ фактор — нарушение однородности

граничных условий (вдоль заряженной границы может пропадать непрерывность распределения поверхностного заряда). Как показано авторами [23,25], неоднородность граничных условий неизбежно возникает в задаче о реконструкции заряженной поверхности гелия. Следовательно, весь ее анализ должен производиться с учетом неоднородных «осложнений».

Первый из известных нам неоднородных сценариев реконструкции, использующий в большой степени элементы теории эквипотенциальной реконструкции [11–13,15,20], а значит, и существенную для этого формализма малость заселенности $\nu \ll 1$ электронами жидкой поверхности, содержится в работах авторов [23,25]. Не перечисляя всех деталей, отметим лишь, что «лысые» места появляются у них в виде треугольной (с примитивными векторами, равными капиллярной длине a) решетки малых пятен, имеющих форму дырок радиусом $R^* \ll a, a = \kappa^{-1}$, растущих с нуля при увеличении надкритичности. К сожалению, теория [23,25] не содержит решений в виде отдельных солитонов, что характерно для наблюдаемой в области $\nu \ll 1$ реконструкции заряженной поверхности гелия. Кроме того, максимальная кривизна поверхности жидкости в центральных частях нейтральных пятен имеет обратный знак по сравнению с имеющимися измерениями [27]. Эти обстоятельства затрудняют оценку степени реальности модели [23,25]. В дальнейшем оказалось, что описание деталей реконструкции в области $\nu \ll 1$ гораздо более естественно в терминах, исполь-

зующих понятие об отдельных многозарядных лунках [28]. Здесь и ниже заселенностью ν границы подвижными зарядами называется отношение

$$\nu = n_s / n_s^{\max}, \quad 2\pi(en_s^{\max})^2 = \sqrt{\alpha\rho g}, \quad (1)$$

где ρ и α — плотность и коэффициент поверхностного натяжения, g — ускорение силы тяжести, e — заряд электрона, $\kappa = \sqrt{\rho g / \alpha}$ — капиллярная постоянная жидкости.

В обратном, наиболее популярном для наблюдений, пределе $\nu \leq 1$, где эквипотенциальный язык [15,20] и его модификация [23,25] не «работают» вообще, гофрировку с неоднородным распределением электропотенциала предложено моделировать периодически расположенной системой многозарядных лунок [26]. Основой построения является приближение сильной связи [26]. За исходные элементы структуры принимаются грубо посчитанные свободные многозарядные лунки. Полагая далее эти квазичастицы точечными, авторы моделируют периодическую решетку из заряженных лунок с привлечением результатов для классического кулоновского кристалла из точечных зарядов [29]. Ее период фиксирован длиной, порядка капиллярной длины, а выгодность на фоне сплошного распределения заряда в 2D слое трактуется в корреляционных терминах [29]. Комментируя результаты [26], отметим, что аккуратно решенная в [24] задача о свободной лунке ведет в условиях [26] к радиусу заряженного пятна, заметно превышающему период решетки из [26] (согласно [24], в этой области $R/a \simeq 1,5$). Критические условия ее образования выше динамического порога устойчивости. И, наконец, с нашей точки зрения, корреляционные эффекты [29] не имеют прямого отношения к кулоновской части задачи о реконструкции. Таким образом, луночная картина периодической реконструкции в области $\nu \leq 1$, являясь практически безальтернативной, содержит в изложении [26] ряд спорных положений, наличие которых желательно осознать и по возможности модифицировать. Детали этого обсуждения собраны в данной заметке.

1. Наиболее дискуссионными, по нашему мнению, являются предложения авторов [26] о кулоновской части задачи. Полагается, что созданию периодического гофра в большой степени способствует известный выигрыш в энергии, имеющий место при переходе 2D заряженной системы из газового (жидкого) в кристаллическое состояние (вигнеровский кристалл). Такой выигрыш корреляционного происхождения действительно возникает (см., например, [29]) из анализа разности двух средних значений кулоновской энергии одноименно заряженных точечных частиц, распределенных вдоль плоскости непрерывно $\langle V_c^l(r) \rangle$ со средней плотностью n_s либо дискретным образом $\langle V_c^s(r) \rangle$ с той же средней плотностью в узлах какой-либо решетки

$$\delta \langle V_c(r) \rangle = \langle V_c^l(r) \rangle - \langle V_c^s(r) \rangle \simeq + c_s e^2 \sqrt{n_s}. \quad (2)$$

Здесь константа c_s порядка единицы зависит от типа решетки. Важно, что в обеих фазах собственная энергия электронов остается одной и той же (точечной).

Пользуясь формальной аналогией между структурой классического вигнеровского кристалла с одним электроном в ячейке и гофром периода b , имеющим заряд q_0 на период, можно приписать (так и сделано в [26]) кулоновской части задачи о реконструкции выигрыша в энергии масштаба

$$\delta \langle W_c(r) \rangle \simeq + c_s q_0^2 / b > 0. \quad (3)$$

При этом упускается из виду (с нашей точки зрения) существенное для результата (2) сохранение в обеих фазах единообразной структуры точечного заряда, отсутствующее в задаче о реконструкции.

Гипотеза (3) допускает проверку и, во всяком случае, для использованной нами модели гофра с образованием системы одномерных проводящих нитей в практически интересном случае $\nu = 1$ не подтверждается. Детали этой задачи, вынесенной в Приложение, приводят к противоположному (3) по знаку утверждению:

$$\delta \langle W_c(r) \rangle = \frac{Q^2}{2} (1/\bar{C} - 1/\tilde{C}) < 0, \quad (4)$$

$$\bar{C} = \frac{S}{4\pi d}, \quad \tilde{C} = \frac{S}{4\pi d + 4a \ln(a/\pi R)}. \quad (5)$$

S — площадь конденсатора, R — радиус отдельной нити, $2a$ — период гофрировки. Кроме знака, обратного (3), выражение (4) обладает еще одним качественно важным свойством. Оно явным образом зависит от длины R , на которой локализуются заряды в каждом из желобов. Эта длина самосогласованно определяется из требования минимальности полной энергии гофра. В приближении (3) кулоновская часть задачи, не зависящая от R , выпадает из такого согласования, чего нельзя допускать. Ниже мы следуем определению $\delta \langle W_c(r) \rangle$ (4).

2. Несколько слов, предвещающих задачу о самой гофрировке в условиях $\nu \leq 1$. Прежде всего, речь идет о ситуации с фиксированным полным зарядом Q на границе пар-жидкость, имеющей общую площадь $S \sim L^2$,

$$Q = \text{const} = en_s^{\max} L^2. \quad (6)$$

Возможно, банально, но необходимо для определенности в постановке задачи упоминание о начальной стадии распада. Она развивается в рамках динамического, эквипотенциального сценария [15], пока в условиях (6) и нарастания амплитуды гофрировки не возникают разрывы сплошности в распределении зарядов. В пределе малых ν неизбежность разрывов отмечена авторами [23,25]. Однако по существу их мотивация

носит вполне универсальный характер, справедливый для всех ν . Если предположить, что период нарастающей со временем гофрировки сохраняется (в общей теории спинопальной кинетики, имеющей отношение к данной проблеме, это не так [30]), полный заряд распадается на совокупность N отдельных кластеров с зарядом Q_0 на единицу длины

$$N = L / 2a, \quad Q_0 \simeq 2ae n_s^{\max}, \quad (7)$$

каждый из которых является зародышем отдельной одномерной (для простоты) лунки, располагаясь в ее центре. Уместно сказать, что распад неустойчивого состояний мог бы происходить чисто флуктуационным (бинопальным) способом, как это имеет место в области $\nu \ll 1$ (см. [28]). Однако в общем случае произвольных ν в подобном сценарии остается неопределенным заряд лунки. Распад со спинопальным началом и бинопальным концом такой неопределенности не содержит и называется нами промежуточным.

В самой задаче о гофрированном состоянии поверхности в критическом электрическом поле E_+^{\max} и зарядом Q_0 (3) на одну ячейку надо убедиться в способности деформированной поверхности гелия удерживать критический заряд (возможно, нелинейным образом) и проверить выполнение неравенства

$$\bar{W}(E_+^{\max}, Q) \geq \tilde{W}(E_+^{\max}, Q_0, b), \quad E_+^{\max} = 4\pi e n_s^{\max}, \quad (8)$$

где n_s^{\max} — из (1), $\bar{W}(E_+^{\max}, Q)$, $\tilde{W}(E_+^{\max}, Q_0, b)$ — полные энергии однородного и гофрированного состояний поверхности гелия, b — период решетки, вообще говоря, не совпадающий с капиллярной длиной a . Требовать равенства энергий в соотношении (8) нет оснований, ибо речь не идет о настоящем бинопальном переходе из плоского в гофрированное состояние. Тем не менее желательно иметь энергию $\tilde{W}(E_+^{\max}, Q_0, b)$ меньше $\bar{W}(E_+^{\max}, Q)$, иначе непонятно развитие событий в целом.

Учитывая сказанное, в том числе и в Приложении, задача об одномерной гофрировке сводится к вычислению разности энергий $\bar{W}(E_+^{\max}, Q) - \tilde{W}(E_+^{\max}, Q_0, b)$ (8). Отметим, что одномерный сценарий — не только удобная модель, но и реально наблюдаемое [27] состояние гофрированной поверхности. К тому же, это наименее устойчивый вариант гофрировки. Лапласовские давления, стабилизирующие картину, ослаблены здесь вдвое по сравнению с двумерной картиной гофрировки. Наличие решения дает оценку снизу на степень устойчивости гофра.

Исходный функционал для энергии одномерного периодического гофра (на единицу длины одной нити)

$$\begin{aligned} & \delta \tilde{W}(E_+^{\max}, R, a) = \\ & = \int_{-a}^{+a} dx \left[\frac{\alpha}{2} [(\nabla \xi)^2 + \kappa^2 \xi^2] + e E_+^{\max} \delta n(x) \xi(x) \right] + \delta \langle W_c(r) \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\delta \langle W_c(r) \rangle = 2e^2 n_s^2 a^2 \ln \frac{a}{\pi R},$$

$$\xi(x) = \zeta(x) - \langle \zeta \rangle, \quad \delta n(x) = n(x) - n_s$$

отсчитан от энергии плоского состояния заряженной поверхности жидкости и записан в расчете на один период решетки. Его кулоновская часть представлена в форме (4), допускающей возможность вариационного решения задачи о величине длины R , если период гофра принудительно выбран равным $2a$, а плотность зарядов $n(x)$ в периодической системе лунок разбита на отдельные полосы $n_0(x)$ с каким-либо (например, гауссовым) распределением плотности для каждой из них

$$\begin{aligned} n(x) &= \sum_l n_0(x - 2la), \quad n_0(x) = n_0 \exp(-x^2 / R^2), \\ n_0 &\simeq \frac{2n_s a}{\sqrt{\pi R}}, \quad R \ll a \end{aligned} \quad (10)$$

и нормировкой (7). Из переменных $\zeta(x)$ вычтены $n(x)$ с учетом общей структуры функционала (9) их средние значения.

Энергия (9) имеет привычную для теории многозарядных лунок структуру. Деформационная часть, собранная в квадратных скобках, интегрально обеспечивает выгодность роста деформации жидкой поверхности под действием локального электронного давления и уменьшение параметра R/a . Кулоновская составляющая $\delta \langle W_c(r) \rangle$ препятствует этому процессу. Конкуренция этих факторов ведет к появлению определяющего равновесное значение параметра R/a отрицательного минимума в зависимости $\delta \tilde{W}(E_+^{\max}, R/a)$ (9). Для получения численных оценок необходимо найти из уравнения механического равновесия поверхности жидкости деформацию $\xi(x)$ через $n(x)$ (10), посчитать с помощью этих распределений интегралы (9) и построить зависимость энергии (9) от варьируемого параметра R/a . Для внешних параметров, отвечающих ситуации $\nu = 1$, эта картина представлена на рис. 1.

Минимум функционала достигается при $R/a = 0,1$ и отрицателен. Другими словами, гофрированное состояние на фоне плоского энергетически выгодно. Стабилизация гофра возникает в области $R/a \ll 1$, хотя на полученные числа следует ориентироваться лишь условно в связи с параметрически немалыми значениями $\nabla \xi(x) \leq 1$, следующими из данных о профиле деформации одномерной лунки. Эти данные приведены на рис. 1, причем для сравнения представлен и профиль отдельной свободной лунки. Очевидно, линейный вариант теории, отвечающий билинейной форме энергии (9), количественно нуждается в уточнениях (из рисунка следует, что требование $\nabla \xi(x) < 1$, использованное при записи (9), выполняется лишь условно). Но качественно смешанный сценарий реконструкции выглядит согласованно (стартуя с предположе-

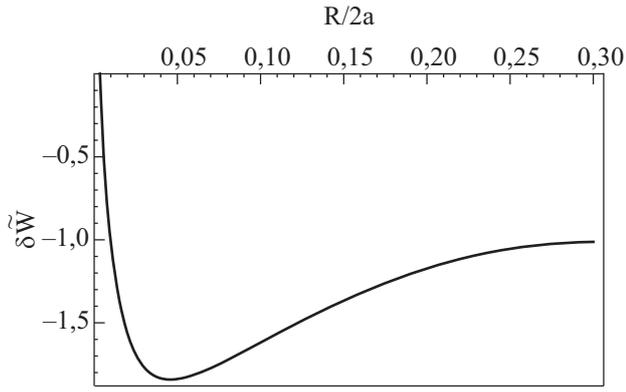


Рис. 1. Зависимость разностной энергии $\delta\tilde{W}$ (7) в единицах $e^2(n_s^{\max})^2 a^2$ от радиуса электронного пятна. Отрицательный минимум отвечает оптимальному значению R/a .

ния о наличии разрывов сплошности в равновесном распределении $n(x)$, мы приходим к финальной картине, подтверждающей исходные предпосылки теории).

Резюмируя, можно сказать, что смешанный сценарий реконструкции заряженной поверхности жидкости в условиях $\nu = 1$ с образованием периодической системы заряженных лунок самосогласован. Период структуры формируется при возникновении динамической неустойчивости заряженной поверхности жидкости. Развиваясь, этот процесс разделяет полный ансамбль зарядов на периодическую систему густков, локализованных в каждой из ячеек линейчатой либо сотовой симметрии. При подходе к метастабильному равновесию заряженные ядра ячеек становятся достаточно компактными ($R/a \ll 1$), а амплитуда гофра имеет масштаб капиллярной длины (жесткий режим реконструкции по классификации [11]). В рамках смешанного сценария никаких гистерезисных явлений, характерных для нелинейных эквипотенциальных теорий, предсказать не удастся (что и естественно, ибо приближение (9) для энергии по своей сути билинейно).

С формальной точки зрения специальное внимание уделено определению кулоновской энергии задачи. Ее

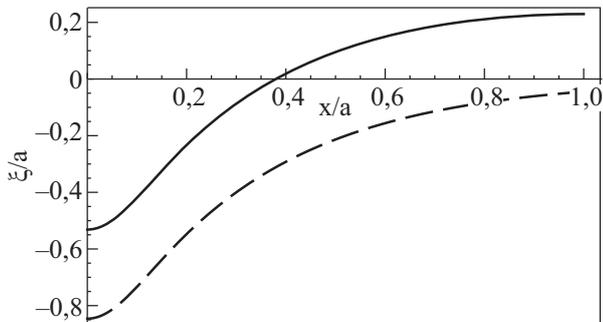


Рис. 2. Профили одномерных: свободной (штрихи) и ограниченной требованиями периодичности (сплошная линия) лунок.

полевое представление помогает избежать парадоксов не только на количественном, но и на качественном уровнях. В частности, нет серьезных причин для проявления в данной задаче корреляционных явлений, определяющих кристаллическое упорядочение вигнеровского типа.

Работа частично поддержана фондом РФФИ, Грант 09-02-00894а и Программой Президиума РАН «Физика конденсированного состояния».

Приложение

Утверждения из [29] относительно свойств разности

$$\delta \langle V_c(r) \rangle = \langle V_c^l(r) \rangle - \langle V_c^s(r) \rangle \quad (\text{П.1})$$

основаны на анализе выражения

$$\delta \langle V_c(r) \rangle = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \sum_l \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}(l)|} - \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right] \quad (\text{П.2})$$

$$\mathbf{x}(l) = l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2, \quad (\text{П.3})$$

где величины \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 — примитивные векторы трансляций в данной решетке.

Суммы в (П.2) являются расходящимися, хотя бы потому, что классическая собственная энергия каждого из электронов в определении (П.2) бесконечна. Однако разность сумм с помощью фурье-анализа и важного условия нейтральности системы в целом (что достигается введением экранирующего электрода) приводится к конечному результату вида (см., например, [29])

$$\delta \langle V_c(r) \rangle = N c_s e^2 \sqrt{a_c} / 2, \quad (\text{П.4})$$

где N — полное число электронов в 2D системе, $a_c \simeq n_s^{-1}$ — площадь элементарной ячейки, c_s — константа порядка единицы, зависящая от типа решетки.

Красивый и достаточно общий результат (П.4) дает представление о природе кулоновской кристаллизации электронов над гелием, определяя энергию основного состояния кристалла в этой задаче по отношению к газовой (жидкой) фазе.

Обратимся на этом фоне к известной в электростатике задаче [31] о полях и энергии системы заряженных нитей над проводящим экраном, т.е. задаче о плоском конденсаторе со сплошными либо сетчатыми электродами. Электростатический потенциал этой задачи имеет вид

$$\varphi(z) = -2a\sigma \ln \left(\frac{\sin [\pi(z-id)/a]}{\sin [\pi(z+id)/a]} \right), \quad z = x + iy, \quad (\text{П.5})$$

где a — период решетки, σ — заряд сетки на единицу площади, d — расстояние между сеткой и экраном. Как и в (П.2), эта задача содержит сокращение расходимостей на бесконечности. Все поля сосредоточены внутри конденсатора, причем поле сетки превращается в однородное на расстояниях порядка ее периода $2a \ll 2d$, где $2d$ — расстояние между пластинами. Полная электростатическая энергия системы (аналог

выражения (П.2)), посчитанная полевым способом (квадрат электрического поля, проинтегрированный по объему конденсатора), оказывается расходящейся в связи с сингулярностями потенциала $\varphi(z)$ (П.5) на нитях. Это свойство, требующее обрезания на радиусах нитей $R \ll a$, отсутствует в конечном результате (П.4), где собственная структура зарядов жидкой и упорядоченной фаз считается идентичной.

Емкости \bar{C} , \tilde{C} на единицу площади системы с привлечением (П.5) равны соответственно

$$\bar{C} = \frac{1}{4\pi b}, \quad \tilde{C} = \frac{1}{4\pi b + 2a \ln(a/2\pi R)}.$$

Здесь $R \ll a/2\pi$ — радиус отдельной нити.

Аналог выражения (П.2) очевиден:

$$\delta < W_c(r) > = \frac{Q^2}{2} (1/\bar{C} - 1/\tilde{C}). \quad (\text{П.6})$$

Эта разница имеет другой знак по сравнению с (4) и зависит от характеристик отдельной нити. Опуская комментарии о возможных причинах качественного различия между (П.4) и (П.6), будем пользоваться в основном тексте кулоновской частью задачи в виде (П.6), так как она содержит информацию о внутренней кулоновской энергии каждой из заряженных нитей, чего нет в (П.4).

1. Ya. Frenkel, *Zs. Sowietunion* **8**, 675 (1935); Я. Френкель, *ЖЭТФ* **6**, 347 (1936).
2. T. Tonks, *Phys. Rev.* **48**, 562 (1935).
3. Дж.В. Стретт, *Теория звука*, том II, Госиздат, Москва (1955).
4. Дж. Бэтчелор, *Введение в гидродинамику жидкости*, Мир, Москва (1973).
5. Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Гидродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1968).
6. J. Melcher, *Field-coupled Surface Waves*, Mass. The MIT Press, Cambridge (1963).
7. G. Taylor and A. McEwan, *J. Fluid Mech.* **22**, 1 (1965).
8. M. Cowley and R. Rosensweig, *J. Fluid Mech.* **30**, 671 (1967).
9. В. Зайцев, М. Шлиомис, *ДАН* **188**, 1261 (1969).
10. Л. Горьков, Д. Черникова, *Письма ЖЭТФ* **18**, 119 (1973).
11. М. Шлиомис, *УФН* **112**, 437 (1974).
12. Д. Черникова, *ЖЭТФ* **68**, 250 (1975).

13. Е. Кузнецов, М. Спектор, *ЖЭТФ* **71**, 262 (1976).
14. А. Володин, М. Хайкин, В. Эдельман, *Письма ЖЭТФ* **23**, 524 (1976).
15. Л. Горьков, Д. Черникова, *ДАН СССР* **228**, 829 (1976).
16. А. Володин, М. Хайкин, В. Эдельман, *Письма ЖЭТФ* **26**, 707 (1977).
17. P. Leiderer, *Phys. Rev.* **B20**, 4511 (1979).
18. P. Leiderer and M. Wanner, *Phys. Lett.* **A73**, 189 (1979).
19. M. Wanner and P. Leiderer, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 315 (1979).
20. H. Ikezi, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1688 (1979).
21. В. Шикин, П. Лейдерер, *Письма ЖЭТФ* **32**, 439 (1980).
22. В. Шикин, П. Лейдерер, *ЖЭТФ* **81**, 134 (1981).
23. В.И. Мельников, С.В. Мешков, *Письма ЖЭТФ* **33**, 222 (1981).
24. В. Мельников, С. Мешков, *ЖЭТФ* **81**, 951 (1981).
25. В. Мельников, С. Мешков, *ЖЭТФ* **82**, 1910 (1982).
26. H. Ikezi, R. Gianetta, and P. Platzman, *Phys. Rev.* **B25**, 4488 (1982).
27. P. Leiderer, W. Ebner, and V. Shikin, *Surf. Sci.* **113**, 405 (1982).
28. В. Шикин, *ФНТ* **29**, 514 (2003) [*Low Temp. Phys.* **29**, 382 (2003)].
29. L. Bonsall and A. Maradudin, *Phys. Rev.* **B15**, 1959 (1977).
30. А. Олемский, И. Коплык, *УФН* **165**, 1105 (1995).
31. Ф. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, Том 2, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).

Mixed scenario of charged liquid helium reconstruction

V. Shikin and E. Klinovaya

Discussed in the paper is a mixed scenario of charged liquid surface reconstruction when the surface 2D charge density is close to saturation. The basic building block of arising honeycomb structure is shown to be a modified multielectron dimple.

PACS: 68.03.Hj Liquid surface structure: measurements and simulations;
68.03.Kn Dynamics (capillary waves).

Keywords: dispersion law, charged surface instability, multielectron dimples.