

Критические состояния в тонких плоских сверхпроводниках второго рода в перпендикулярном или наклонном магнитном поле (Обзор)

Г.П. Микитик

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: mikitik@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 28 августа 2009 г.

Рассмотрена теория критических состояний вихревой решетки в сверхпроводниках второго рода без предположения о взаимной перпендикулярности локальных магнитных полей и циркулирующих токов в образце. Такая теория позволила решить ряд задач для тонких плоских сверхпроводников в перпендикулярном их плоскости внешнем магнитном поле: построена теория эффекта встряхивания для прямоугольных сверхпроводящих пластин, изучены критические состояния в образцах с анизотропным пиннингом вихревых линий, а также при наличии фазового перехода порядок–беспорядок в вихревой решетке. Кроме того, исследованы критические состояния в длинной сверхпроводящей полосе в наклонном магнитном поле.

Розглянуто теорію критичних станів вихрових ґрат у надпровідниках другого роду без припущення про взаємну перпендикулярність локальних магнітних полів і циркулюючих струмів у зразку. Така теорія дозволила вирішити низку задач для тонких плоских надпровідників у перпендикулярному їхній площині зовнішньому магнітному полі: побудовано теорію ефекту струшування для прямокутних надпровідних пластин, вивчено критичні стани в зразках з анізотропним пінінгом вихрових ліній, а також при наявності фазового переходу порядок–непорядок у вихрових ґратах. Крім того, досліджено критичні стани в довгій надпровідній смугі в похилому магнітному полі.

PACS: 74.25.Sv Критические токи;
74.25.Uv Вихревые фазы (включая вихревые решетки, вихревые жидкости и вихревые стекла).

Ключевые слова: теория критического состояния сверхпроводников второго рода, эффект встряхивания вихревой среды, анизотропный пиннинг вихревых линий, критическая плотность тока, наклонное магнитное поле.

Содержание

1. Введение	18
1.1. Типы критических состояний в сверхпроводниках второго рода.....	18
1.2. Случай тонких плоских сверхпроводников	19
2. Критическое состояние в сверхпроводниках второго рода произвольной формы.....	20
2.1. Уравнения критического состояния	20
2.1.1. Учет зависимости $J_{c\perp}$ от J_{\parallel}	22
2.1.2. Учет анизотропии пиннинга вихревых линий.....	23
2.2. Критическое состояние в тонких плоских сверхпроводниках	24
3. Теория эффекта встряхивания вихревой среды в тонких плоских сверхпроводниках второго рода...	26
3.1. Эффект встряхивания в тонкой прямоугольной сверхпроводящей пластине.....	27
3.1.1. Поперечный эффект встряхивания.....	28
3.1.2. Продольный эффект встряхивания.....	29
3.1.3. Общий случай	29

3.2. Генерация постоянного электрического поля переменным магнитным полем в сверхпроводящей полосе.....	31
3.2.1. Пластина в параллельном поле.....	31
3.2.2. Полоса в перпендикулярном поле.....	32
4. Критические состояния в тонких плоских сверхпроводниках второго рода с анизотропным пиннингом вихревых линий.....	34
4.1. Критическое состояние в сверхпроводящей полосе с анизотропным пиннингом	35
4.2. Fishtail-эффект в тонких плоских сверхпроводниках.....	37
4.3. Критическое состояние в сверхпроводящей полосе с переходом порядок–беспорядок в вихревой решетке	39
4.4. Определение анизотропии критической плотности тока по экспериментальным данным	40
5. Критические состояния в тонкой сверхпроводящей полосе в наклонном магнитном поле.....	41
5.1. Биновские критические состояния	42
5.2. Критические Т-состояния с постоянным $j_{c\perp}$	45
Литература.....	46

1. Введение

1.1. Типы критических состояний в сверхпроводниках второго рода

Понятие критического состояния, введенное Бином [1], широко используется для описания различных физических явлений в вихревой фазе сверхпроводников второго рода с пиннингом вихревых линий (см., например, [2,3] и ссылки там). Согласно Бину, в критическом состоянии сверхпроводников движущая сила со стороны токов, циркулирующих в образце, уравновешивается силой пиннинга, действующей на вихри и препятствующей их перемещению. Критическое состояние характеризуется компонентой плотности тока $j_{c\perp}$, перпендикулярной вихревым линиям, так как только эта компонента генерирует движущую силу. В теории критического состояния предполагается, что $j_{c\perp}$, определяемая силой пиннинга, известна, т.е. является заданной функцией магнитной индукции \mathbf{B} , $j_{c\perp} = j_{c\perp}(\mathbf{B})$, и проблема теории состоит в нахождении соответствующих распределений магнитных полей и токов в образце. Изучение критических состояний важно не только для понимания различных физических явлений, но и для практических приложений сверхпроводников второго рода, поскольку именно благодаря возникновению таких состояний эти сверхпроводники способны нести достаточно большие транспортные токи во внешних магнитных полях. Ниже для простоты предполагаем, что магнитные поля \mathbf{H} в сверхпроводнике заметно превышают нижнее критическое поле H_{c1} , и поэтому в дальнейшем полагаем $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ *. Кроме того, рассматриваем только массивные сверхпроводники, предполагая, что их размеры существенно превышают лондоновскую длину проникновения магнитного поля в образец.

Будем называть критическое состояние биновским, если в каждой точке сверхпроводника плотность тока \mathbf{j} перпендикулярна локальному магнитному полю \mathbf{H} ,

$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\perp}$, и, следовательно, $j = j_{\perp} = j_{c\perp}$. Отметим, что это определение накладывает ограничение на направление токов в критическом состоянии, но не подразумевает постоянства $j_{c\perp}$. Биновское критическое состояние может быть найдено из статических уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (1)$$

и условий на плотность токов

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (2)$$

$$j_{\perp} = j_{c\perp}, \quad j_{\parallel} = 0, \quad (3)$$

где j_{\parallel} — компонента плотности тока вдоль локального магнитного поля \mathbf{H} . Такие состояния обычно имеют место, когда форма сверхпроводника достаточно симметрична и внешнее магнитное поле \mathbf{H}_a приложено вдоль оси симметрии, так что и направление токов диктуется симметрией проблемы. Большинство известных решений проблемы критического состояния описывают как раз биновские состояния. Например, это хорошо известное решение для бесконечной пластины во внешнем магнитном поле, параллельном ее поверхности [1]. Это также решение для бесконечно длинного цилиндра с произвольным поперечным сечением в магнитном поле, параллельном его оси [2], поскольку циркулирующие в критическом состоянии токи перпендикулярны этой оси. Биновские критические состояния также имеют место в бесконечно длинных и тонких полосах [4–6] и в тонких дисках [7] в перпендикулярном магнитном поле, даже если $j_{c\perp}$ зависит от $|\mathbf{B}| \equiv B$ или от угла между \mathbf{B} и нормалью к плоскости образца. Если приложенное магнитное поле наклонено к плоскости бесконечно длинной полосы конечной толщины, но остается перпендикулярным ее оси, критические токи текут вдоль этой оси, и биновские состояния опять имеют место. Дальнейшие примеры биновских критических состояний в образцах

* В работе используется система единиц СИ.

сложной формы могут быть найдены в работах [8–12]. Характерной чертой всех этих биновских состояний является то, что возмущение распределения токов, вызванное изменением внешнего поля, распространяется по образцу в виде резкого фронта, на котором и происходит изменение направления токов.

В реальных образцах несимметричной формы, или если приложенное магнитное поле изменяется не только по величине, но и по направлению, в критическом состоянии соседние вихревые линии могут быть слегка повернуты друг относительно друга. Это вращение вызывает появление компоненты тока вдоль магнитного поля j_{\parallel} [13]. Указанное вращение вихревых линий может привести к их взаимному пересечению [2,13], т.е. к так называемому flux-line cutting. Пересечение вихревых линий происходит, когда компонента плотности тока, параллельная магнитному полю j_{\parallel} , превышает некоторую критическую величину $j_{c\parallel}$. В этой ситуации отдельный вихрь [14] или связка вихрей [15] становятся нестабильны по отношению к винтовому возмущению, и рост этого возмущения приводит к пересечению вихревых линий. Когда и j_{\parallel} и j_{\perp} равны их критическим значениям $j_{c\parallel}$ и $j_{c\perp}$ соответственно, в сверхпроводнике осуществляется так называемое двойное критическое состояние [13,16]. Это состояние реализуется, например, в некоторой области сверхпроводящего диска или пластины [16,17], когда вращающееся магнитное поле постоянной амплитуды прикладывается в их плоскости [18–21]. Двойное критическое состояние может быть, по-прежнему, описано уравнениями (1), (2), но со следующими условиями на плотность тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\perp} + \mathbf{j}_{\parallel}$:

$$j_{\perp} = j_{c\perp}, \quad j_{\parallel} = j_{c\parallel}. \quad (4)$$

Дальнейшее развитие понятие критического состояния с пересечением вихревых линий получило в работах [22–24], в которых учтено влияние этого пересечения на баланс сил в критическом состоянии. Это позволило объяснить наблюдаемый коллапс магнитного момента сверхпроводящей пластины под действием переменного магнитного поля [24–26].

Однако во многих реальных ситуациях изменение направления внешнего магнитного поля или несимметричность формы образца не приводят к пересечению вихревых линий в сверхпроводнике, т.е. j_{\parallel} не достигает $j_{c\parallel}$ в критическом состоянии. В таких ситуациях нет явного условия на величину j_{\parallel} за исключением того, что $j_{\parallel} < j_{c\parallel}$, и статические уравнения (1) и (2) с единственным ограничением $j_{\perp} = j_{c\perp}$ не достаточны для того, чтобы найти распределения магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ и плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в критическом состоянии. Проблема описания таких критических состояний для специального случая пластины с магнитным полем в ее плоскости была решена в [16,17], но в

общем случае ее решение до недавнего времени отсутствовало. Иными словами, теория критических состояний была не полна. Полный набор уравнений, описывающих критическое состояние в образцах произвольной формы и при любом квазистатическом изменении вектора приложенного магнитного поля \mathbf{H}_a , будет приведен в настоящем обзоре. Подчеркнем, что класс критических состояний с $j_{\parallel} < j_{c\parallel}$ соответствует общей ситуации, в то время как хорошо известные биновские и двойные критические состояния — только предельные случаи, которые имеют место при $j_{\parallel} = 0$ или $j_{\parallel} = j_{c\parallel}$ соответственно.

Такие общие критические состояния, которые в дальнейшем называем критическими Т-состояниями (Т означает transport)*, реализуются даже для простых экспериментальных ситуаций. В частности, они имеют место в пластине, когда циркулярно-поляризованное переменное магнитное поле прикладывается перпендикулярно постоянному магнитному полю H_a , нормальному к плоскости пластины [27]. Другие примеры критических Т-состояний будут рассмотрены ниже.

Как указано в работах [16,17], еще один тип критических состояний может существовать в сверхпроводниках. В этих состояниях $j_{\perp} < j_{c\perp}$ и $j_{\parallel} = j_{c\parallel}$, т.е. происходит только пересечение вихревых линий без их транспорта. Описание таких критических С-состояний (С означает cutting) в образцах произвольной формы может быть получено непосредственным обобщением подхода, использованного в [16,17] для сверхпроводящей пластины. В дальнейшем такие состояния не рассматриваются. Не анализируется нигде ниже также влияние крипа магнитного потока на критическое состояние. Соответствующие ссылки могут быть найдены, например, в работах [28–33].

1.2. Случай тонких плоских сверхпроводников

Как известно, кристаллы высокотемпературных сверхпроводников имеют форму тонких пластин, и в экспериментах с ними внешнее магнитное поле часто направлено перпендикулярно их плоскости (или под углом к ней). Кроме того, пиннинг вихрей в этих сверхпроводниках зачастую анизотропен. Поэтому изучение критического состояния в тонких плоских сверхпроводниках с анизотропным пиннингом вихревых линий представляет особый интерес.

Если критическая плотность тока $j_{c\perp}$ постоянна, т.е. не зависит ни от величины, ни от направления локального магнитного поля \mathbf{H} , то для тонких плоских образцов простейшей формы были получены аналитические решения уравнений критического состояния [4–7]. Эти решения описывают биновские состояния в тонкой, бесконечно длинной сверхпроводящей полосе [4–6] и в тонком диске [7]. В качестве примера приведем решение для полосы. Пусть бесконечно длинная

* Это определение есть обобщение определения, использованного в [16].

сверхпроводящая полоса шириной $2w$ и толщиной $d \ll w$ заполняет пространство $-w \leq x \leq w$, $-\infty < y < \infty$, $-d/2 \leq z \leq d/2$, и возрастающее внешнее магнитное поле H_a приложено вдоль z . Распределение листового тока, т.е. плотности тока, проинтегрированной по толщине полосы, $J(x)$, есть нечетная функция x : $J(x) = -(x/|x|)|J(x)|$ и имеет вид:

$$\begin{aligned} |J(x)| &= J_c, & b \leq |x| \leq w, \\ |J(x)| &= \frac{2J_c}{\pi} \arctg \left[\frac{(w^2 - b^2)x^2}{w^2(b^2 - x^2)} \right]^{1/2}, & |x| \leq b, \end{aligned} \quad (5)$$

где $J_c = j_{c\perp}d$, а параметр b определяется внешним полем H_a

$$b = \frac{w}{\cosh(\pi H_a / J_c)}. \quad (6)$$

Смысл параметра b состоит в том, что в области $|x| \leq b$ внешнее поле полностью экранируется токами $J(x)$, и $H_z(x) = 0$ там. В области же $b \leq |x| \leq w$ внешнее поле и поле, генерируемое токами, дают следующий профиль $H_z(x)$:

$$H_z(x) = \frac{J_c}{\pi} \operatorname{arth} \left[\frac{(x^2 - b^2)w^2}{x^2(w^2 - b^2)} \right]^{1/2}. \quad (7)$$

Отметим, что, строго говоря, это решение является одномерным и справедливо в пределе $d \rightarrow 0$ (но если при этом $J_c = \text{const} > 0$), поскольку при его получении не учитывалось распределение полей и токов по толщине полосы. Весьма похожий вид имеет решение и для тонкого диска [7].

В случае бесконечно тонкого ($d \rightarrow 0$) и плоского образца произвольной формы в плоскости xu проблема критического состояния является двумерной, и эффективные численные методы ее решения разработаны в работах [10,34] (см. также [3]). При этом, в принципе, могут быть решены задачи, в которых J_c является любой заданной функцией локального H_z . Численными методами могут быть исследованы критические состояния и в образцах конечной толщины [35–37], если они имеют такую достаточно простую форму, что проблема критического состояния остается двумерной. Например, такое исследование возможно в диске конечной толщины [37], и в толстой бесконечно длинной полосе с прямоугольным сечением [35,36]. Однако в настоящее время отсутствуют численные результаты, которые описывали бы существенно трехмерные критические состояния.

Если толщина d плоского сверхпроводящего образца значительно меньше его поперечных размеров, то можно было бы думать, что такие образцы с хорошей точностью всегда могут рассматриваться как бесконечно тонкие. Однако формулы (5)–(7) показывают, что, например, при $b \sim w/2$ (т.е. при $H_a \sim J_c$) характерные H_z в образце порядка J_c . При этом компонента поля в плоскости пластины, генерируемая тока-

ми $J(x)$, имеет тот же порядок величины на ее поверхности, $H_x(x, z = d/2) = J(x)/2$. Иными словами, вихревые линии сильно искривлены в образце. Если при этом $j_{c\perp}$ зависит от угла θ между направлением локального поля \mathbf{H} и нормалью к плоскости пластины, то плотность токов в сверхпроводнике, вообще говоря, неоднородна по z , и проблема даже биновского критического состояния остается трехмерной в таких тонких образцах. Такая анизотропия пиннинга вихревых линий и связанная с ней угловая зависимость критической плотности тока весьма часто наблюдаются в сверхпроводниках второго рода (см., например, работы [38–43] и ссылки в них). Эта анизотропия может быть обусловлена как собственной анизотропией сверхпроводящих материалов, так и наличием в них протяженных дефектов, таких как двойниковые границы, дислокации, или дефекты, созданные в образце после его облучения тяжелыми ионами.

Таким образом, для тонких плоских сверхпроводников, которые представляют особый интерес с точки зрения эксперимента, до недавнего времени критические состояния не были изучены в тех ситуациях, когда учет конечной толщины образца имеет принципиальное значение для понимания того или иного явления. В частности, это относится к тем сверхпроводникам, в которых критическая плотность тока зависит от угла между направлением локального магнитного поля и нормалью к плоскости образца. Кроме того, сама теория критического состояния вихревой решетки была не полна для сверхпроводников, форма которых недостаточно симметрична, или если внешнее магнитное направлено не вдоль оси симметрии образца. В настоящем обзоре изложено необходимое развитие этой теории и объяснено, как свести трехмерную проблему критического состояния в тонком плоском сверхпроводнике к более простой двумерной проблеме для бесконечно тонкого образца. На основе этого подхода рассмотрены и решены ряд задач, для которых учет конечной толщины тонкого плоского сверхпроводника имеет ключевое значение. В частности, дано объяснение так называемого эффекта встряхивания (vortex-shaking эффекта), приведено точное решение уравнений критического состояния в полосе с простой моделью анизотропии пиннинга, проанализированы критические состояния в полосе в наклонном к ее плоскости магнитном поле.

2. Критическое состояние в сверхпроводниках второго рода произвольной формы

2.1. Уравнения критического состояния

Критическое состояние успевает установиться в образце, если характерное время изменения внешнего магнитного поля \mathbf{H}_a , $j_{c\perp}d/|d\mathbf{H}_a/dt|$, значительно превышает время течения потока через образец, $\mu_0 d^2 / \rho_{ff}$, где d — характерный размер образца, а ρ_{ff} — сопротивление течения потока единицы объема.

Иными словами, понятие критического состояния может быть использовано для описания распределений магнитных полей и токов в сверхпроводнике, если генерируемые вихревые электрические поля относительно малы

$$\mu_0 d \left| \frac{dH_a}{dt} \right| \ll \rho_{ff} j_{c\perp}. \quad (8)$$

Таким образом, идеальное критическое состояние соответствует пределу $\rho_{ff} \rightarrow \infty$. В дальнейшем условие (8) подразумевается выполненным.

Критические Т-состояния с $j_{\parallel} < j_{c\parallel}$ могут быть описаны с помощью следующего подхода [44,45]: статические уравнения (1) и (2) дополняются уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{H}}, \quad (9)$$

где $\dot{\mathbf{H}} \equiv \partial \mathbf{H} / \partial t$, а \mathbf{E} — электрическое поле, генерируемое изменением приложенного поля \mathbf{H}_a . Для того чтобы система уравнений (1), (2), и (9) была разрешима, к ней необходимо добавить связь плотности тока с электрическим полем [46], т.е. функцию $\mathbf{E}(\mathbf{j}, \mathbf{V})$. Эту связь (вольт-амперную характеристику (ВАХ)) вводим на основе двух хорошо известных физических идей: 1) При заданных \mathbf{j} и \mathbf{V} , направление \mathbf{E} следует из формулы $\mathbf{E} = [\mathbf{V} \times \mathbf{j}]$, т.е.

$$\mathbf{E} \parallel [\mathbf{V} \times \mathbf{j}], \quad (10)$$

где \mathbf{v} — скорость вихрей, вызванная силой Лоренца $[\mathbf{j} \times \mathbf{V}]$. Здесь для простоты пренебрегаем так называемым углом Холла [47], и поэтому направления \mathbf{v} и силы Лоренца совпадают. 2) Абсолютная величина \mathbf{E} находится из условия

$$|j_{\perp}| = j_{c\perp}. \quad (11)$$

Фактически это условие может быть интерпретировано как следующая ВАХ:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}| = 0, & \quad j_{\perp} < j_{c\perp}; \\ |\mathbf{E}| \rightarrow \infty, & \quad j_{\perp} > j_{c\perp}, \end{aligned} \quad (12)$$

которая как раз соответствует идеальному критическому состоянию.

Чтобы продолжить анализ, введем следующие обозначения для магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ и плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в критическом состоянии: $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})$, где H и j есть абсолютные значения магнитного поля и плотности тока, в то время как единичные векторы \mathbf{v} и \mathbf{n} определяют их направления. Тогда компонента плотности тока, перпендикулярная магнитному полю, принимает вид

$$\mathbf{j}_{\perp} = \mathbf{j} - \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{j}) \equiv j_{c\perp} \mathbf{n}_{\perp}(\mathbf{r}).$$

Здесь было учтено условие $|\mathbf{j}_{\perp}| = j_{c\perp}$; единичный вектор \mathbf{n}_{\perp} определяет направление \mathbf{j}_{\perp} , $\mathbf{n}_{\perp} = (\mathbf{n} - \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{n})) / D$ и $D = \sqrt{1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})^2}$ — нормировочный

множитель. Эти формулы приводят к явному выражению для абсолютной величины плотности тока j

$$j = \frac{j_{c\perp}(\mathbf{H})}{D}, \quad (13)$$

которое есть лишь иная форма условия (11), поскольку D — синус угла между \mathbf{j} и \mathbf{H} . Сформулируем теперь условие (10). Пусть в момент времени t внешнее магнитное поле $\mathbf{H}_a(t)$ изменяется на бесконечно малую величину $\delta \mathbf{H}_a = \dot{\mathbf{H}}_a \delta t$. При изменении \mathbf{H}_a критические токи локально сдвигают вихри в направлении силы Лоренца $[\mathbf{j} \times \mathbf{v}]$; этот сдвиг создает электрическое поле вдоль $[\mathbf{v} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{v}]] = \mathbf{j}_{\perp}$, т.е. вдоль вектора \mathbf{n}_{\perp} . Таким образом, электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ можно представить в виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{n}_{\perp} e, \quad (14)$$

где скалярная функция $e(r)$ — модуль электрического поля. Отметим, что в общем случае электрическое поле не параллельно плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, если отлична от нуля компонента \mathbf{j}_{\parallel} . С учетом формул (13) и (14), уравнений (1), (2), и (9) вполне достаточно для описания критических Т-состояний в образцах произвольной формы. При этом необходимо подчеркнуть, что магнитные поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ и токи $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в критическом состоянии в момент времени $t + \delta t$ зависят только от распределений полей и токов в предыдущем критическом состоянии, которое имеет место в момент t , и от изменения внешнего поля $\delta \mathbf{H}_a = \dot{\mathbf{H}}_a \delta t$. Иными словами, критическое состояние зависит от траектории, описываемой концом вектора \mathbf{H}_a в пространстве магнитного поля, а не от конкретного вида временной зависимости $H_a(t)$ [44]. В то же время e пропорционально скорости изменения поля $\dot{\mathbf{H}}_a$, а не величине его изменения $\delta \mathbf{H}_a$, и поэтому электрическое поле играет только вспомогательную роль при решении проблемы критического состояния.

Электрическое поле e теперь находится как решение системы уравнений (1), (2), (9), (13), (14) без использования специальной ВАХ (12). Явное уравнение на скалярную функцию $e(\mathbf{r})$ имеет вид [44,45]:

$$\mathbf{n}_{\perp} \cdot \{ \text{rot rot}(\mathbf{E}) - (\mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v}) \text{rot}(\mathbf{E}) \} = \frac{\partial j_{c\perp}(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \cdot \text{rot}(\mathbf{E}), \quad (15)$$

где E задается формулой (14). Непрерывность магнитного поля на поверхности сверхпроводника S дает граничное условие к уравнению (15):

$$-\text{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{r}_S)) = \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_a + \int \frac{[\mathbf{R} \times \text{rot rot}(\mathbf{E}(\mathbf{r}'))]}{4\pi R^3} d\mathbf{r}', \quad (16)$$

где \mathbf{r}_S — произвольная точка на поверхности S , $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r}_S - \mathbf{r}'$, $R = |\mathbf{R}|$, а интегрирование идет по объему образца. Правая часть этого граничного условия выражает $\mu_0 \dot{\mathbf{H}}$ на поверхности сверхпроводника (но достигаемой снаружи) с помощью закона Био и Савара. Если в критическом состоянии сверхпроводника суще-

ствуют также границы, на которых направление критических токов резко изменяется, или которые разделяют области с $j_{\perp} = j_{c\perp}$ от областей с $j = 0^*$, то функция $e(\mathbf{r})$ должна обращаться в нуль на этих границах, чтобы обеспечить непрерывность электрического поля $e\mathbf{n}_{\perp}$ там.

При практических вычислениях последовательности критических состояний, развивающихся в процессе изменения $\mathbf{H}_a(t)$, часто бывает удобно переписать уравнения (1) и (9) в виде:

$$\mu_0 j[\mathbf{n} \times \mathbf{n}] = -[\mathbf{n} \times \text{rotrot}(\mathbf{E})]. \quad (17)$$

Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение на углы, определяющие направление \mathbf{j} , т.е. единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{j}/j$. Интересно, что это уравнение типа уравнения диффузии, и его решения не обязательно разрывные функции, которые характерны для биновских критических состояний. Иными словами, в отличие от биновских состояний возмущения распределения токов в критических Т-состояниях, вообще говоря, распространяются по образцу не в виде резких фронтов, а как гладкие волны [44]. Отметим также, что, поскольку распределения магнитных полей и токов в критических состояниях сверхпроводника независимы от скорости изменения магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_a$, их временная зависимость есть только параметризация зависимости от \mathbf{H}_a . Наконец, выпишем условие применимости излагаемой теории. Так как проекция \mathbf{j} на локальное направление \mathbf{H} есть $j_{c\perp}(\mathbf{n}\nu)/D$, условие отсутствия пересечения вихревых линий приводит к следующему ограничению на угол между локальными \mathbf{j} и \mathbf{H} :

$$\frac{|\mathbf{n}\nu|}{\sqrt{1-(\mathbf{n}\nu)^2}} < \frac{j_{c\parallel}}{j_{c\perp}}, \quad (18)$$

где $j_{c\parallel}$ — критическая плотность продольного тока.

В заключение сделаем несколько замечаний об электрическом поле. Может оказаться, что электрическое поле $e\mathbf{n}_{\perp}$, полученное с помощью (15), не удовлетворяет условию $\text{div}(e\mathbf{n}_{\perp}) = 0$. Чтобы прояснить эту ситуацию, необходимо вспомнить, что движущийся вихрь генерирует электрический дипольный момент [47], и, следовательно, движущаяся вихревая среда характеризуется вектором поляризации \mathbf{P} , который есть макроскопическая плотность этого момента. Из результатов работы [47] следует, что $\mathbf{P} = -e\mathbf{n}_{\perp}$, и ненулевая величина $\text{div}(e\mathbf{n}_{\perp})$ означает, что в сверхпроводнике второго рода появляется плотность электрического заряда $-\text{div} \mathbf{P}$, которая генерирует потенциальное электрическое поле $\mathbf{E}_p = -\nabla\Phi$, описываемое скалярным потенциалом Φ . Это потенциальное поле есть часть полного электрического поля, задаваемого внут-

ри образца соотношением $\mathbf{E} = e\mathbf{n}_{\perp}$, и подчиняется уравнению $\text{div} \mathbf{E}_p = \text{div}(e\mathbf{n}_{\perp})$, т.е.

$$\Delta\Phi = -\text{div}(e\mathbf{n}_{\perp}), \quad (19)$$

где $\Delta \equiv \text{div} \nabla$. На поверхности образца S поле \mathbf{E}_p удовлетворяет тому же граничному условию, что и в электростатике диэлектриков [46]: тангенциальные компоненты \mathbf{E}_p и нормальная составляющая вектора $\mathbf{E}_p + \mathbf{P} = \mathbf{E}_p - e\mathbf{n}_{\perp}$ непрерывны на этой поверхности. Так как $\mathbf{P} = 0$ вне образца, последнее условие означает, что

$$(\mathbf{E}_p^+ - \mathbf{E}_p^-)\boldsymbol{\tau} = -e\mathbf{n}_{\perp}\boldsymbol{\tau}, \quad (20)$$

где \mathbf{E}_p^+ и \mathbf{E}_p^- есть поверхностные потенциальные поля, рассчитанные вне и внутри S соответственно, а $\boldsymbol{\tau}$ — нормаль к S , направленная наружу. Правая часть формулы (20) дает плотность поверхностного заряда, индуцированного движущимися вихрями в образце. Отметим, что потенциальная часть электрического поля $e\mathbf{n}_{\perp}$ не влияет на магнитные поля и токи в критическом состоянии, поскольку $\text{rot} \mathbf{E}_p = 0$. Появление этой части связано с условием (14), которое диктует направление электрического поля в образце. Интересно, что и индукционная часть электрического поля $e\mathbf{n}_{\perp} - \mathbf{E}_p$, генерирующая критические состояния, и его потенциальная часть \mathbf{E}_p могут быть измерены экспериментально в определенных ситуациях [48].

Вообще говоря, в процессе изменения \mathbf{H}_a происходит миграция индуцированных зарядов $\rho = \text{div}(e\mathbf{n}_{\perp})$, которая приводит к появлению токов, удовлетворяющих $\text{div} \mathbf{j} = -(\partial\rho/\partial t)$ и нарушающих уравнение (2). Однако эти токи пропорциональны квадрату $\dot{\mathbf{H}}_a$ и пренебрежимо малы при условии (8).

2.1.1. Учет зависимости $j_{c\perp}$ от j_{\parallel} . Без учета крипа магнитного потока критическая плотность тока может быть определена из условия, что соответствующий крип-активационный барьер U равен нулю при $j_{\perp} = j_{c\perp}$. Выше подразумевалось, что плотность тока $j_{c\perp}$ может зависеть от \mathbf{B} , но что она совершенно независима от j_{\parallel} . Иными словами, неявно предполагался следующий функциональный вид U : $U = U(j_{\perp}, \mathbf{B})$. Однако, крип-активационный барьер U , вообще говоря, может зависеть не только от j_{\perp} и \mathbf{B} , но также от плотности j_{\parallel} , которая характеризует непараллельность соседних вихревых линий, т.е. в общем случае имеем $U = U(j_{\perp}, j_{\parallel}, \mathbf{B})$. Тогда критическая плотность тока $j_{c\perp}$, определяемая условием $U(j_{\perp}, j_{\parallel}, \mathbf{B}) = 0$, принимает вид $j_{c\perp} = j_{c\perp}(B, j_{\parallel})$ [45]. Можно ожидать, что эта зависимость $j_{c\perp}$ от продольной плотности тока j_{\parallel} существенна, по крайней мере, тогда, когда j_{\parallel} близка к своему критическому значению $j_{c\parallel}$, и, следовательно, $j_{c\perp}(\mathbf{B}, j_{c\parallel})$ в общем случае отличается от

* При изменении \mathbf{H}_a эти границы могут смещаться в сверхпроводнике. Их новые положения находятся из непрерывности \mathbf{H} в образце.

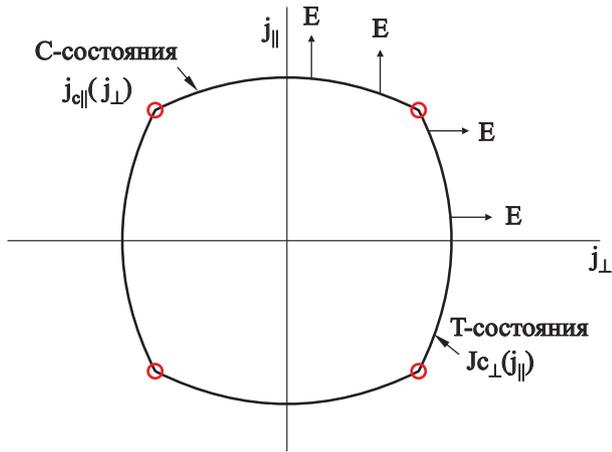


Рис. 1. Зависимости $j_{c\perp}$ от j_{\parallel} и $j_{c\parallel}$ от j_{\perp} (сплошные кривые), показанные схематически на плоскости $j_{\perp}j_{\parallel}$ при фиксированном \mathbf{B} [45]. Точки пересечения линий соответствуют двойным критическим состояниям, в которых $j_{\perp} = j_{c\perp}$ и $j_{\parallel} = j_{c\parallel}$. Показаны также направления электрического поля для критических Т- и С-состояний.

$j_{c\perp}(\mathbf{B}, 0)$. Аналогично, активационный барьер U_{cut} для пересечения вихревых линий есть функция обеих компонент плотности тока и магнитной индукции, т.е. $U_{\text{cut}} = U_{\text{cut}}(j_{\perp}, j_{\parallel}, \mathbf{B})$, и условие $U_{\text{cut}} = 0$ дает $j_{c\parallel} = j_{c\parallel}(\mathbf{B}, j_{\perp})$. На рис. 1 при фиксированном \mathbf{B} схематически показаны зависимости $j_{c\perp}$ от j_{\parallel} и $j_{c\parallel}$ от j_{\perp} в плоскости $j_{\perp}j_{\parallel}$. Отметим, что эти зависимости пересекаются, когда одновременно удовлетворены уравнения $U(j_{\perp}, j_{\parallel}, \mathbf{B}) = 0$ и $U_{\text{cut}}(j_{\perp}, j_{\parallel}, \mathbf{B}) = 0$. Это может происходить только в изолированных точках плоскости $j_{\perp}j_{\parallel}$, так как барьеры U и U_{cut} характеризуют различные физические процессы и являются существенно разными функциями компонент плотности тока. Эти точки соответствуют двойным критическим состояниям, в которых $j_{\perp} = j_{c\perp}$ и $j_{\parallel} = j_{c\parallel}$. На рис. 1 верхний/нижний и правый/левый участки кривых между четырьмя точками описывают зависимость $j_{c\perp}(j_{\parallel})$ в критическом Т-состоянии и функцию $j_{c\parallel}(j_{\perp})$ в критическом С-состоянии. Предложенный учет зависимости $j_{c\perp}(j_{\parallel})$ в критическом Т-состоянии в некотором смысле напоминает идею работ [22–24], в которых было учтено влияние пересечения вихревых линий на баланс сил в двойном критическом состоянии.

Зависимость $j_{c\perp}(j_{\parallel})$ приводит к замене $j_{c\perp}(H)$ на $j_{c\perp}(H, j_{\parallel})$ в формуле (13), которая теперь принимает вид уравнения на j

$$jD = j_{c\perp}(\mathbf{H}, j\sqrt{1-D^2}). \quad (21)$$

Зависимость $j_{c\perp}(j_{\parallel})$ вызовет также соответствующую модификацию (15). Однако все это не приводит к принципиальному усложнению задачи. Отметим, что в работах [49,50] была исследована феноменологическая модель критического состояния, в которой, по существу,

некоторая зависимость $j_{c\perp}$ от j_{\parallel} и $j_{c\parallel}$ от j_{\perp} была введена. Хотя направление электрического поля в этой модели не удовлетворяло условию (14), достаточно хорошее описание соответствующих экспериментальных данных, достигнутое в работах [49,50], по-видимому, свидетельствует о важности учета этой зависимости в реальных ситуациях.

2.1.2. Учет анизотропии пиннинга вихревых линий. При выводе (14) было предположено, что изменение \mathbf{H}_a приводит к сдвигу вихрей в направлении локальной силы Лоренца $[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$. Однако в случае анизотропного пиннинга это предположение может не выполняться (например, известно, что вихрь перемещается вдоль двойниковой границы кристалла и при силе Лоренца, отклоненной от плоскости этой границы [51]). Тем не менее даже в анизотропном случае направление сдвига вихревых линий может быть выражено через направления j и $\nu \equiv \mathbf{H}/H$ [52,53].

Пусть ток с плотностью j течет в плоскости, перпендикулярной локальной магнитной индукции \mathbf{B} , и его направление в этой плоскости задается углом ϕ , $n = n_{\perp} = (\cos \phi, \sin \phi)$. Направление силы Лоренца $[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$ обозначим как $(\cos \psi, \sin \psi)$ (т.е. $\psi = \phi - \pi/2$). В случае анизотропной силы пиннинга $f_p(\psi)$ вихрю выгодно начать двигаться в направлении, определяемом углом, отличным от ψ . Механизм этого эффекта объясняется на рис. 2. Проекция силы Лоренца f , приложенной вдоль направления ψ , на некоторое другое направление ψ_1 есть $f \cos(\psi - \psi_1)$. Если эта проекция достигает значения $f_p(\psi_1)$, т.е. если

$$f = \frac{f_p(\psi_1)}{\cos(\psi - \psi_1)},$$

то движение вихрей в этом направлении ψ_1 становится возможным. Критическая величина силы Лоренца

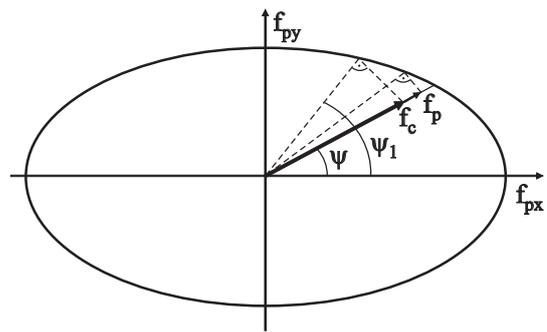


Рис. 2. Схематический рисунок, объясняющий, почему в анизотропном сверхпроводнике направление, в котором вихрь начинает двигаться, может отличаться от направления действующей силы [53]. Эллипс показывает угловую зависимость максимальной силы пиннинга $f_p(\psi)$. Штриховые линии — проекции силы $f < f_p$, действующей вдоль ψ , на некоторые другие направления. Все эти проекции достигают эллипса при углах, отличных от ψ . Жирная стрелка показывает минимальную силу этого типа, $f_c(\psi)$. При $f = f_c(\psi)$ вихрь начинает двигаться в направлении ψ_1 .

f_c есть минимум силы f по отношению к углам ψ_1 . Это условие минимума дает следующие формулы [52,53] для угла ψ_1

$$\delta \equiv \psi_1 - \psi = -\text{arctg} \left\{ \frac{df_p(\psi_1)/d\psi_1}{f_p(\psi_1)} \right\} = -\text{arctg} \left\{ \frac{1}{j_{c\perp}(B, \phi)} \frac{\partial j_{c\perp}(B, \phi)}{\partial \phi} \right\}, \quad (22)$$

силы $f_c(\psi)$ и для критической плотности тока $j_{c\perp}(B, \phi)$,

$$j_{c\perp}(B, \phi)B = f_c(\psi) = \sqrt{[f_p(\psi_1)]^2 + [f'_p(\psi_1)]^2}. \quad (23)$$

Из построения на рис. 2 видно, что критическая сила $f_c(\psi)$ в направлении ψ , которая определяет критическую плотность тока $j_{c\perp}(\phi)$, всегда меньше (или равна) соответствующей силы пиннинга $f_p(\psi)$. При этом значении силы $f_c(\psi)$ вихри начинают двигаться в направлении ψ_1 , задаваемом соотношением (22). Следовательно, теперь единичный вектор \mathbf{u} вдоль электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{u}e$ дается выражением

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}_\perp \cos \delta + [\mathbf{v} \times \mathbf{n}_\perp] \sin \delta, \quad (24)$$

в котором угол δ описывает изменение направления электрического поля из-за анизотропии пиннинга. Если плотность тока $j_{c\perp}$ изотропна в плоскости, перпендикулярной локальному магнитному полю, то из (22) получаем $\delta = 0$, и, следовательно, \mathbf{u} совпадает с \mathbf{n}_\perp . Если же $(\partial j_{c\perp}(B, \phi) / \partial \phi) \neq 0$, то $\delta \neq 0$, вихрь движется не вдоль силы Лоренца, и направление электрического поля \mathbf{u} отличается от \mathbf{n}_\perp .

Уравнения (22) и (24) устанавливают соотношение между \mathbf{n}_\perp и \mathbf{u} . Когда $\delta \neq 0$, изменение в уравнениях критического состояния состоит только в том, что $e\mathbf{n}_\perp$ в (14) заменяется на $e\mathbf{u}$, а в формуле (13) $j_{c\perp}(\mathbf{H})$ переходит в $j_{c\perp}(\mathbf{H}, \mathbf{n}_\perp)$.

2.2. Критическое состояние в тонких плоских сверхпроводниках

Рассмотрим теперь практически важный случай тонких плоских сверхпроводников второго рода, помещенных в магнитное поле, перпендикулярное их плоскости. Поместим систему координат так, что ее плоскость xu совпадает со средней плоскостью пластины, и соответственно ось z перпендикулярна верхней и нижней поверхностям образца, который в плоскости xu может иметь произвольную форму. На рис. 3 в качестве примера показан случай образца прямоугольной формы. Внешнее магнитное поле H_{az} направлено вдоль z . Предполагается, что толщина образца d много меньше, чем его характерный поперечный размер $L \sim a, b$: $d \ll L$. Уравнения $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ в главном порядке по малому параметру d/L приводят к независимости H_z от z внутри образца, т.е. к $H_z = H_z(x, y)$ и к $j_z = 0$. Тогда для опи-

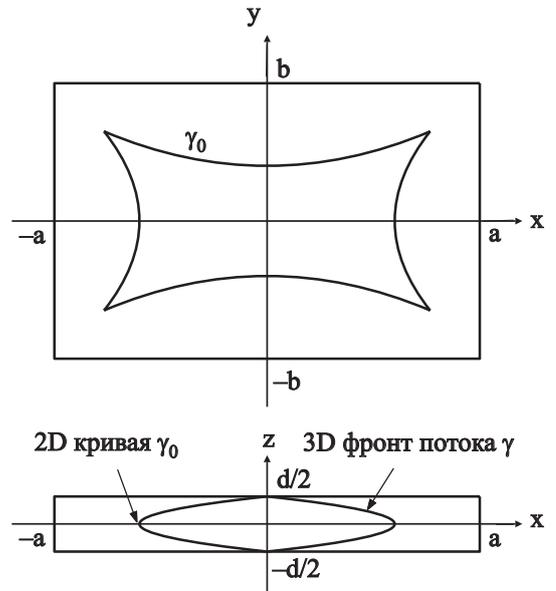


Рис. 3. Фронт магнитного потока, проникающий в тонкую прямоугольную сверхпроводящую пластину, в условиях увеличивающегося магнитного поля, перпендикулярного плоскости пластины [52]. Верхний рисунок показывает двумерную кривую γ_0 , которая формирует экватор трехмерного фронта γ , показанного на нижнем рисунке.

сания критического состояния можно использовать следующее представление:

$$\mathbf{j} = j_c(\varphi, \theta, \psi, H)(\cos \varphi(\mathbf{r}), \sin \varphi(\mathbf{r}), 0), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}}H_z(x, y) + \mathbf{h}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{r}) = (h_x(\mathbf{r}), h_y(\mathbf{r}), 0), \quad (25)$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор вдоль z ; $\mathbf{r} = (x, y, z)$; $j_c(\varphi, \theta, \psi, H)$ — абсолютная величина критической плотности тока в точке, в которой элемент вихревой линии задается углами ψ и θ , $\text{tg} \psi = h_y / h_x$, $\text{tg} \theta = (h_x^2 + h_y^2)^{1/2} / H_z$, при этом j_c течет в плоскости xu в направлении, определяемом углом φ . Подчеркнем, что зависимость j_c от ориентации локального \mathbf{H} существует даже при постоянном значении $j_{c\perp}$, если вектор \mathbf{j} не перпендикулярен \mathbf{H} , и эта зависимость описывается формулой (13), в которой D теперь задается формулой

$$D = [1 - \cos^2(\varphi - \psi) \sin^2 \theta]^{1/2}. \quad (26)$$

Однако в общем случае критическая плотность тока $j_{c\perp}$, перпендикулярного \mathbf{H} , зависит от абсолютной величины локального магнитного поля $H = (H_z^2 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}$ и углов $\varphi - \psi$, θ и ψ . Зависимость от ψ появляется, если только имеется анизотропия пиннинга в плоскости образца, а зависимость пиннинга от θ может быть связана как с собственной анизотропией сверхпроводящего материала, так и с протяженными дефектами, возникающими после облучения образца, например, тяжелыми ионами. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только аксиальной анизотропии пиннинга,

когда критическая плотность тока $j_{c\perp}$, текущего в плоскости xy (т.е. при $\varphi - \psi = \pi/2$), может зависеть лишь от угла θ (и от H), но не от ψ .

Если внешнее магнитное поле H_a возрастает, то при не слишком больших H_a в сверхпроводнике существует свободное от вихрей и токов ядро (рис. 3). Поверхность этого ядра γ представляет собой проникающий фронт, который разделяет области сверхпроводника, занятую вихревыми линиями и свободную от них. Будем описывать этот фронт функцией $z = z_\gamma(x, y)$. В предельном случае бесконечно тонкого сверхпроводника ($d \rightarrow 0$) фронт можно рассматривать как плоскую кривую γ_0 , которая образует внешнюю кромку (экватор) поверхности γ , поскольку внутри этого контура $B_z = 0$. В случае малой, но конечной толщины $d \ll L$, компонента B_z , по-прежнему, приблизительно равна нулю внутри γ_0 , так как в этой области вихревые линии практически параллельны плоским поверхностям образца.

Если плотность токов в критическом состоянии не изменяется по толщине образца d , то в главном порядке по малому параметру d/L такие сверхпроводники могут рассматриваться как бесконечно тонкие. В этом случае проблема критического состояния, которая состоит в вычислении распределения магнитных полей H_z , перпендикулярных плоскости образца, и циркулирующих в сверхпроводнике токов, является двумерной. Эффективные численные методы решения двумерной проблемы критического состояния в бесконечно тонких плоских сверхпроводниках произвольной формы разработаны в работах [3,10,34]. Однако, как уже отмечалось выше, если собственные поля токов, циркулирующих в критическом состоянии сверхпроводника, приводят к заметному искривлению вихревых линий в образце, и если $j_{c\perp}$ зависит от θ , то плотность токов в сверхпроводнике, вообще говоря, неоднородна по z , и проблема критического состояния остается трехмерной даже при $d \ll L$. Тем не менее малость параметра d/L позволяет расщепить эту трехмерную проблему на одномерную проблему поперек толщины образца и на двумерную проблему в его плоскости [30,52].

Задача поперек толщины образца решается в общем виде, и в частности, это решение дает неявное соотношение между критическим значением J_c листового тока, т.е. проинтегрированной по толщине плотности тока, и полем H_z [30,52],

$$\frac{d}{2} = \int_0^{J_c/2} \frac{dh}{j_{c\perp}(H_z, h)}, \quad (27)$$

где $j_{c\perp}(H_z, h)$ есть только другое обозначение $j_{c\perp}(H, \theta)$ при $\varphi - \psi = \pi/2$ с $H_z = H \cos \theta$ и $h = H \sin \theta$. Это соотношение будет необходимо для решения двумерной задачи. Отметим, что если пиннинг вихревых линий является анизотропным, и $j_{c\perp}$

зависит от направления локального магнитного поля, то согласно (27) критическое значение J_c листового тока, вообще говоря, не равно $j_{c\perp}d$ и зависит от H_z .

Двумерная проблема в плоскости образца определяется уравнением сохранения листового тока \mathbf{J} ,

$$\text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (28)$$

и законом Био и Савара, связывающим $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ и $H_z(\mathbf{r})$ в образце,

$$H_z(\mathbf{r}) = H_{az} + \int_S \frac{[\mathbf{R} \times \mathbf{J}]}{4\pi R^3} d^2 r', \quad (29)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$; \mathbf{r} и \mathbf{r}' — двумерные векторы в плоскости xy , а интегрирование проводится по площади образца S . Эти уравнения должны быть дополнены условиями критического состояния, которые гласят, что для точек (x, y) внутри контура γ_0 на рис. 3

$$H_z(x, y) = 0, \quad (30)$$

а всюду вне этого контура ток J в образце равен своему критическому значению J_c ,

$$J(x, y) = J_c(H_z), \quad (31)$$

которое определяется формулой (27). Подчеркнем, что зависимость $J_c(H_z)$ происходит не только от зависимости $j_{c\perp}$ от H , но и от угловой зависимости критической плотности тока в случае аксиальной анизотропии пиннинга.

Используя численные методы, двумерную проблему критического состояния можно решить при произвольной форме сверхпроводника и при любой зависимости $J_c(H_z)$ [3,10,34]. Такое решение дает функции $H_z(x, y, H_{az})$, $J(x, y, H_{az})$ и $\varphi_0(x, y, H_{az})$, где $\varphi_0(x, y, H_{az})$ определяет направление тока $\mathbf{J}(x, y, H_{az})$ в плоскости xy : $\mathbf{J}(x, y, H_{az}) = J(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$. Из решения также находится положение границы γ_0 при произвольном H_{az} . Знание $\varphi_0(x, y, H_{az})$ дает и угол $\psi_0(x, y, H_{az}) = \varphi_0(x, y, H_{az}) - \pi/2$, определяющий направление тангенциального магнитного поля (вихревых линий) на поверхности образца $\mathbf{h}|_{z=d/2} = h_t \cdot (\cos \psi_0, \sin \psi_0)$, где $h_t = J/2$. Рисунок 4, полученный на основе численного решения уравнений (28)–(31) для случая прямоугольной пластины, демонстрирует изменение ориентации вихревых линий по мере увеличения поля H_{az} . Это изменение есть свойство, характерное для всех сверхпроводников не слишком симметричной формы, т.е. отличных от кругового диска или бесконечно длинной полосы. Это свойство следует и из приближенного аналитического решения для бесконечно тонкой пластины в форме эллиптического диска, в которой $J_c = j_{c\perp}d$ [54].

Зная решения одномерной и двумерной задач, можно приближенно описать и трехмерное критическое состояние. Анализ, проведенный в работе [52], показал, что хотя в области, где $B_z \neq 0$, вихревые линии искривлены, но кручение этих линий отсутствует, и

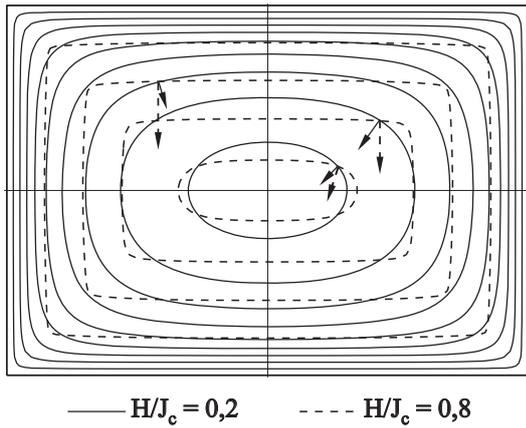


Рис. 4. Линии тока J в тонкой прямоугольной сверхпроводящей пластине с отношением сторон 1:4 и изотропным пиннингом, $J_c = j_{c\perp}d = \text{const}$. для двух значений приложенного магнитного поля $H_{az}/J_c = 0,2$ (сплошные линии) и $H_{az}/J_c = 0,8$ (штриховые линии) [52]. Стрелки, перпендикулярные линиям тока и имеющие длину, пропорциональную $|J|$, указывают направление вихревых линий на поверхности бесконечно тонкого сверхпроводника, а также вихревых линий, лежащих на разной глубине в пластине малой, но конечной толщины.

они являются плоскими кривыми. Направление токов при этом перпендикулярно вихревым линиям, и, следовательно, в этой области сверхпроводника осуществляется биновское критическое состояние. Иная ситуация имеет место в области неполного проникновения магнитного потока в сверхпроводник, т.е. в области внутри контура γ_0 , в которой $B_z \approx 0$. В этом случае вихри, заключенные по толщине пластины в интервале $z_\gamma(x, y) \leq |z| \leq d/2$ (с x, y внутри γ_0), практически параллельны плоскости xu и, значит, для них $\theta \approx \pi/2$. Рассмотрим самую простую ситуацию, когда критическая плотность тока $j_{c\perp}$ постоянна. В этом случае получаем, что граница свободного от вихрей ядра $z_\gamma(x, y, H_{az})$ определяется условием

$$J(x, y, H_{az}) = j_{c\perp} [d - 2z_\gamma(x, y, H_{az})], \quad (32)$$

в котором $J = |\mathbf{J}| = (J_x^2 + J_y^2)^{1/2}$. Исключая H_{az} из функций $\psi_0(x, y, H_{az})$ и $h_t(x, y, H_{az}) = J(x, y, H_{az})/2$ в области внутри контура γ_0 , находим зависимость $\psi_0(x, y, h_t)$. По этой зависимости формула

$$h_t \frac{\partial \psi_0}{\partial h_t} = -\cot(\varphi - \psi) \quad (33)$$

позволяет найти угол $\varphi(x, y, z) - \psi(x, y, z)$ между локальными направлениями токов и вихревых линий в точке (x, y, z) , где z определяется соотношением $z - z_\gamma(x, y, H_{az}) = h_t(x, y, H_{az})/j_{c\perp}$. Подчеркнем, что $\varphi - \psi \neq \pi/2$, и, следовательно, токи не перпендикулярны вихревым линиям, если внутри контура γ_0 происходит изменение ориентации поверхностного поля с

ростом H_{az} . Иными словами, в области неполного проникновения магнитного потока в образец могут осуществляться критические Т-состояния. Из решения для бесконечно тонкой пластины (рис. 4) ясно, что эти Т-состояния всегда имеют место, если форма образца в плоскости xu отлична от диска или бесконечно длинной полосы. Условие отсутствия пересечения вихревых линий (18) в данном случае сводится к $|\cot(\varphi - \psi)| < j_{c\parallel}/j_{c\perp}$ и представляет собой ограничение на $h_t |\partial \psi_0 / \partial h_t|$, выполнение которого должно проверяться в каждом конкретном случае.

В заключение этого раздела кратко обсудим еще один эффект, который невозможно объяснить, пренебрегая толщиной тонкого сверхпроводника. В работе [55] были проведены магнитооптические исследования профилей магнитного поля на верхней поверхности тонкой прямоугольной пластины $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$, помещенной в перпендикулярное ее поверхности магнитное поле, и было сделано следующее интересное наблюдение. Если в сверхпроводник с помощью облучения тяжелыми ионами вводились протяженные дефекты под небольшим углом к его оси c (т.е. к нормали к его поверхности), то появлялась асимметрия профилей магнитного поля относительно центральной линии образца. Необычность этого эффекта состояла в том, что его невозможно объяснить в рамках уравнений (28)–(31), полученных в главном порядке по малому параметру d/L . При любой зависимости $J_c(H_z)$ профили магнитного поля будут симметричны в таких образцах прямоугольной формы. Чтобы получить асимметрию профилей, уравнение (29) необходимо записать с учетом членов следующего порядка по d/L . На примере бесконечно длинной сверхпроводящей полосы это сделано в работе [56], и для асимметрии профилей магнитного поля на ее верхней поверхности $H_z^+(x) - H_z^+(-x)$ была получена формула:

$$H_z^+(x) - H_z^+(-x) = \frac{d}{dx} \int_{-d/2}^{d/2} z j_y(x, z) dz. \quad (34)$$

Здесь ось z перпендикулярна плоскости полосы, а ось x направлена по ее ширине, и ее начало находится на продольной оси образца. Из формулы (34) следует, что асимметрия профилей $H_z(x)$ может возникнуть, если только распределение плотности тока j_y поперек толщины полосы не симметрично относительно ее средней плоскости $z = 0$. Введение в образец наклонных протяженных дефектов как раз и приводит к появлению подобной асимметрии распределения токов [56]. Это и объясняет результаты экспериментов [55].

3. Теория эффекта встряхивания вихревой среды в тонких плоских сверхпроводниках второго рода

В экспериментах [25,57] было обнаружено, что добавление слабого осциллирующего магнитного поля, перпендикулярного сильному постоянному магнитно-

му полю, приводит к быстрому затуханию токов, циркулирующих в критическом состоянии сверхпроводников второго рода. Поскольку слабое переменное магнитное поле «встряхивает» вихревую среду, сформированную большим постоянным полем, описанное явление затухания токов и связанной с ними намагниченности будем в дальнейшем называть эффектом встряхивания (vortex-shaking эффектом)*. В работе [25] постоянное и переменное магнитные поля лежали в плоскости сверхпроводящей пластины, а в экспериментах [57] только осциллирующее поле прикладывалось в плоскости образца, в то время как постоянное поле было перпендикулярно плоскости пластины. Эти две постановки экспериментов требуют различного подхода при объяснении их результатов. В первом случае, когда оба поля лежат в плоскости пластины, вихревые линии могут пересекаться в образце, и для объяснения экспериментов [24–26] в работах [22–24] была разработана соответствующая теория. Во втором случае пересечения вихревых линий не происходит, так как сверхпроводящие токи циркулируют в плоскости пластины, а вихревые линии почти перпендикулярны ей (см. условие (18)). Объяснению эффекта встряхивания вихревой среды во втором случае посвящена данная глава обзора, которая основана на работах [58–61].

Релаксация необратимой части намагниченности в экспериментах [57] была примерно экспоненциальной по времени, и, следовательно, эффект встряхивания вихревой среды позволяет существенно расширить область обратимого поведения намагниченности на плоскости магнитное поле H –температура T . Используя этот эффект, плавление вихревой решетки в кристаллах $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ было обнаружено [62] при температурах, очень близких к критической температуре T_c , где до этого его не удавалось наблюдать. Используя этот же метод встряхивания, было открыто [63], что переход порядок–беспорядок в вихревой решетке $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ является переходом первого рода, несмотря на то, что обычно при низких температурах пиннинг вихревой решетки маскирует соответствующий скачок равновесной намагниченности. В настоящее время метод встряхивания вихревой среды используется в различных экспериментах со сверхпроводниками второго рода (см., например, [64–67]).

Следует заметить, что иногда встряхивание вихревой решетки производят переменным магнитным полем, параллельным постоянному магнитному полю, и наблюдают некоторую релаксацию токов и в этом случае [68–70]. Однако этот эффект, по-видимому, связан с существованием двух разных фаз вихревой решетки в образце, одна из которых метастабильна, и встряхивание приводит к «отжигу» метастабильного состояния.

Еще один интересный эффект, который, как будет видно далее, тесно связан с эффектом встряхивания,

обнаружен и исследован в работах [71,72] (см. также [73]). Установлено, что если большое постоянное и малое переменное магнитные поля прикладываются перпендикулярно плоскости тонкой сверхпроводящей полосы, тогда эта полоса проявляет омическое сопротивление при токах, много меньших критического тока I_c . Наблюдавшееся постоянное во времени падение напряжения вдоль полосы означало, что имелся непрерывный перенос вихрей поперек образца, несмотря на то, что он находился в критическом состоянии с током $I < I_c$. Хотя авторы работ [71,72] не объяснили обнаруженный эффект, они предложили простые формулы, которые описывали все особенности экспериментальных данных. Измеряемое падение напряжения U было пропорционально и амплитуде, и частоте переменного магнитного поля, а также приложенному транспортному току I вдоль полосы, пока этот ток был меньше критического значения I_c . Кроме того, они экспериментально установили, что $U \propto I_c^{-1}$, и что напряжение U зависит от температуры T и от величины большого постоянного поля H_0 только через $I_c(T, H_0)$.

3.1. Эффект встряхивания в тонкой прямоугольной сверхпроводящей пластине

Принято считать, что малое переменное магнитное поле, приложенное перпендикулярно большому постоянному полю, только периодически наклоняет вихри в сверхпроводнике на малый угол. Это действительно так, если вихревая решетка находится в равновесном состоянии. Однако, когда сверхпроводник находится в критическом состоянии, т.е. когда критические токи циркулируют в образце, периодический наклон вихревых линий сопровождается их дрейфом [58–60]. Этот дрейф генерирует постоянное электрическое поле в образце, которое и приводит к затуханию циркулирующих в сверхпроводнике токов. Именно этот дрейф объясняет эффект встряхивания. Здесь будет изложена теория этого эффекта для тонких плоских сверхпроводников второго рода. Для определенности будем рассматривать образец в форме прямоугольной пластины.

Пусть тонкая прямоугольная пластина толщиной d и с поперечными размерами $2w$ и $2L$ ($d \ll w, L$) занимает пространство $|x| \leq w, |y| \leq L, |z| \leq d/2$; постоянное внешнее магнитное поле H_{az} направлено по оси z , в то время как слабое переменное магнитное поле $h_{ac} = h \cos \omega t$ приложено вдоль x , т.е. в плоскости пластины. Для простоты предполагаем, что критическая плотность тока $j_{c\perp}$, перпендикулярная локальной магнитной индукции \mathbf{B} , постоянна. Поле H_{az} считаем достаточно большим, так что оно превосходит не только нижнее критическое поле H_{c1} , но и поле полного проникновения магнитного потока в пластину, равное $H_p = (j_{c\perp} d / \pi) \ln(2e \cdot \min[w, L] / d)$ [35]. Кро-

* Используется также название «коллапс магнитного момента» [24–26].

ме того, чтобы не усложнять физические соображения математическими деталями, также предполагаем, что $H_{az} \gg h \gg J_c / 2$, где $J_c = dj_{c\perp}$. Это позволяет не рассматривать влияние собственных полей токов на форму вихревых линий в пластине.

Строго говоря, описание эффекта встряхивания в прямоугольной пластине требует решения трехмерной проблемы критического состояния. Однако, используя подход разд. 2.2, опять «расщепляем» трехмерную проблему на одномерную проблему критического состояния поперек толщины образца и на двумерную проблему для бесконечно тонкой пластины. Иными словами, сначала рассматриваем малый участок пластины вокруг некоторой точки (x, y) как «бесконечную» пластину толщиной d , помещенную в постоянное магнитное поле $H_z(x, y)$ и в переменное поле $h_{ac} = h \sin \omega t$, по которой течет ток $\mathbf{J}(x, y) = (J_x, J_y, 0)$ (\mathbf{J} есть плотность тока, проинтегрированная по толщине). Постоянное электрическое поле \mathbf{E} , полученное в результате решения одномерной задачи, затем используем как локальное электрическое поле $\mathbf{E}(x, y)$ для бесконечно тонкого сверхпроводника при вычислении временных зависимостей $J(x, y)$ и $H_z(x, y)$.

Рассмотрим сначала два простых предельных случая, которые описывают так называемые поперечный и продольный эффекты встряхивания в бесконечно длинной сверхпроводящей полосе. Первый из них соответствует случаю $L \gg w$, а второй — $L \ll w$. Поскольку переменное магнитное поле направлено по x , т.е. вдоль стороны, которая имеет размер w , а токи в критическом состоянии полосы текут вдоль ее длины, т.е. вдоль $\max(w, L)$, то в случае поперечного эффекта переменное магнитное поле перпендикулярно токам, а в случае продольного эффекта оно параллельно им.

3.1.1. Поперечный эффект встряхивания. Начнем с поперечного эффекта встряхивания в полосе [59,74], когда $w \ll L$. В этом случае нетрудно получить выражение для электрического поля E из простых наглядных соображений (рис. 5). При условии $H_{az} \gg h \gg J_c / 2$ вихревые линии в любой момент времени t представляют собой прямые, которые лежат в плоскости $x-z$ под углом $\theta = h_{ac}(t) / H_z$ к оси z . Токи с плотностью $j_c = \pm j_{c\perp}$ текут вдоль y и их распределение по толщине пластины показано на этом же рисунке. Точки z_+ и z_- , в которых плотность тока j_c меняет знак, находятся из условия, что j_c , проинтегрированная по толщине, равна J . В этих точках вихревая линия остается неподвижной при изменении h_{ac} , поскольку здесь движущая сила равна нулю. В результате такого анализа находим, что в течение одной половины цикла ($0 \leq t \leq \pi / \omega$) каждая линия поворачивается вокруг неподвижной точки с координатой $z = z_+ = J / (2j_{c\perp})$, а в течение второй половины ($\pi / \omega \leq t \leq 2\pi / \omega$) вокруг другой неподвижной точки с $z = z_- = -z_+$. В итоге вихревая линия «шагает» вдоль x (рис. 5), и ее сдвиг за полный цикл переменного магнитного поля есть

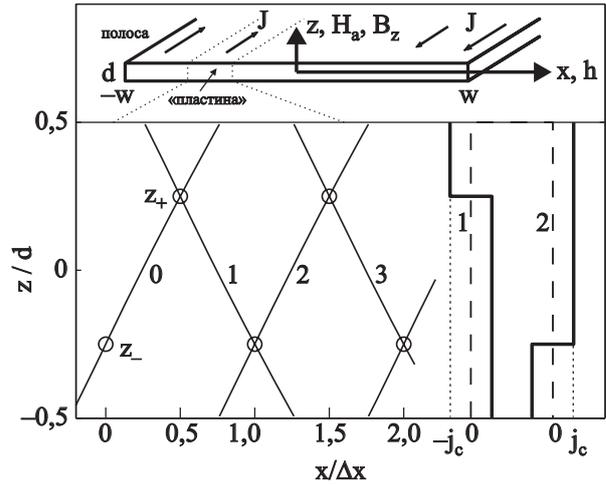


Рис. 5. Геометрия полосы и приложенных магнитных полей (верхняя вставка). Вихревая линия, «шагающая» слева направо через участок полосы (который рассматривается как «бесконечная» пластина), показана при временах $t\omega / \pi = 0, 1, 2, 3$ [74]. Точки, вокруг которых поворачивается вихревая линия, отмечены кружками. Здесь $h / J_c = 5$, $J / J_c = 0,5$, что дает $z_+ = -z_- = 0,25d$ и $\Delta x = 9,5(\mu_0 J / B_z)d$; Δx — сдвиг вихревой линии за период переменного поля; x измеряется от произвольной точки «пластины». Схема на правой вставке показывает профили тока поперек толщины полосы во время первой и второй половин периода.

$$\Delta x = 2(z_+ - z_-) \operatorname{tg} \theta_{\max} = \frac{2Jh}{j_{c\perp} H_z}. \quad (35)$$

Если учесть собственные поля токов, то эта формула обобщается следующим образом [59]:

$$\Delta x = \frac{2J}{j_{c\perp} H_z} [h - h_p(J)], \quad (36)$$

где $h_p(J) = (J_c - |J|) / 2$ — поле полного проникновения параллельного магнитного потока в пластину с током J ; $J_c = j_{c\perp} d$. Формула (36) верна, если $h \geq h_p(J)$. В противном случае x -компонента магнитного поля не проникает полностью в образец, и имеется участок вихревой линии, который совершенно неподвижен, и поэтому $\Delta x = 0$. Иными словами, дрейф вихревых линий возникает, если переменное магнитное поле имеет достаточную величину для того, чтобы проникнуть в плоский сверхпроводник по всей его толщине. В этом случае, как видно на рис. 5, вихревые линии периодически наклоняются несимметрично относительно центральной плоскости образца $z = 0$, и именно это приводит к смещению этих линий перпендикулярно циркулирующим токам.

Электрическое поле, генерируемое сдвигом вихревых линий, есть $E_y = (\omega / 2\pi) \Delta x B_z$, и, следовательно, окончательно приходим к формуле

$$E_y = 0, \quad h < h_p(J);$$

$$E_y = \frac{\mu_0 \omega d \bar{J}}{\pi} [h - h_p(J)], \quad h \geq h_p(J), \quad (37)$$

где $\tilde{J} \equiv J/J_c$. Описанная картина движения вихревой линии была предложена много лет назад в работе [75], и формула (37) эквивалентна выражению (2.8) из этой работы.

3.1.2. *Продольный эффект встряхивания.* Рассмотрим теперь продольный эффект встряхивания в полосе [60], когда $L \ll w$ и переменное магнитное поле направлено вдоль длины образца. В отличие от поперечного эффекта встряхивания наклон вихревых линий в этом случае симметричен относительно плоскости $z = 0$ и происходит вдоль токов J_x . Механизм движения вихревых линий в y -направлении (т.е. перпендикулярно токам) теперь совершенно другой, чем при поперечном встряхивании, и он объясняется на рис. 6. Для того чтобы вихревая линия наклонилась вдоль x , плотность токов $\vec{j}(z)$ должна иметь компоненту j_y , которая антисимметрична по z . С другой стороны, требование, что плотность тока, проинтегрированная по толщине образца, равна J_x , приводит к ненулевой компоненте j_x . Так как элементы вихревой линии двигаются вдоль силы Лоренца, то наклон этой линии обязательно сопровождается ее сдвигом в направлении $[\mathbf{J}_x \times \mathbf{H}_z]$. Отметим, что направление этого сдвига не зависит от того, увеличивается или уменьшается переменное магнитное поле. Поэтому осцилля-

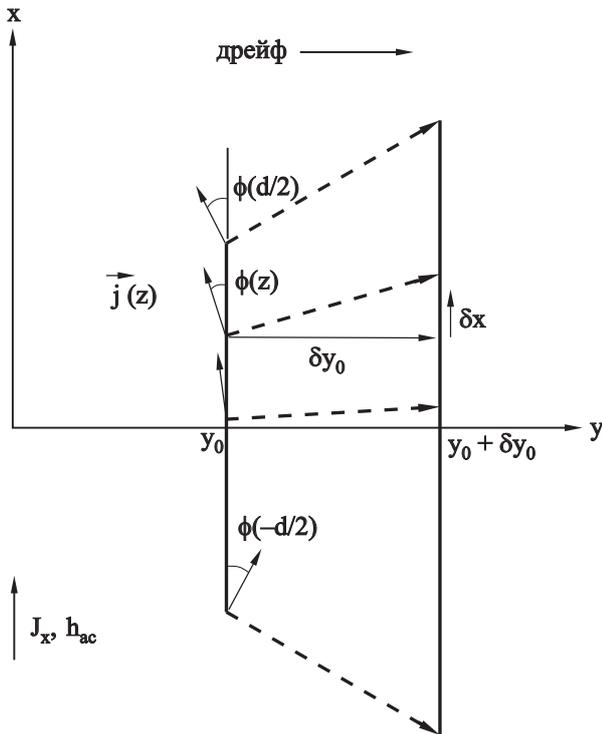


Рис. 6. Сдвиг вихревой линии при увеличении магнитного поля от h_{ac} до $h_{ac} + \delta h$ [60]. Жирные сплошные линии — проекции вихревой линии на плоскость xu . При увеличении наклона этой линии она одновременно смещается вдоль y от $y = y_0$ к $y = y_0 + \delta y_0$. Проекции сдвигов элементов вихревой линии показаны стрелками с компонентами $\delta x(z)$ и δy_0 . Эти стрелки перпендикулярны локальным токам $j_c(z)$ (сплошные стрелки), текущим в плоскости xu под углом $\phi(z)$ к оси x .

ции этого поля приводят к непрерывному дрейфу вихревых линий перпендикулярно току J_x . Анализ этого дрейфа в случае $H_{az} \gg h \gg J_c/2$ дает следующее выражение для электрического поля [60]:

$$E_x = \frac{\mu_0 \omega d}{\pi} h g(\tilde{J}_x), \quad (38)$$

где функция $g(u)$ определяется соотношением $u(g) = g \operatorname{arsinh}(1/g)$, и $\tilde{J}_x \equiv J_x/J_c$.

Отметим существенную разницу между продольным и поперечным эффектами встряхивания. При поперечном встряхивании магнитные поля и токи строго перпендикулярны друг другу, и все критические состояния являются бинновскими. При продольном встряхивании угол между локальными магнитными полями и токами в рассматриваемом случае $H_{az} \gg h \gg J_c$ также близок к $\pi/2$, однако строгой перпендикулярности полей и токов нет, и при продольном встряхивании (а также в общем случае) осуществляются критические Т-состояния. Эта небольшая неперпендикулярность приводит к заметной неколлинеарности токов поперек толщины образца. При продольном встряхивании распределение токов по толщине полосы в различные моменты времени показано на рис. 7.

3.1.3. *Общий случай.* Дрейф вихревых линий в прямоугольной пластине при произвольном направлении тока \mathbf{J} происходит от комбинации механизмов дрейфа, свойственных поперечному и продольному эффек-

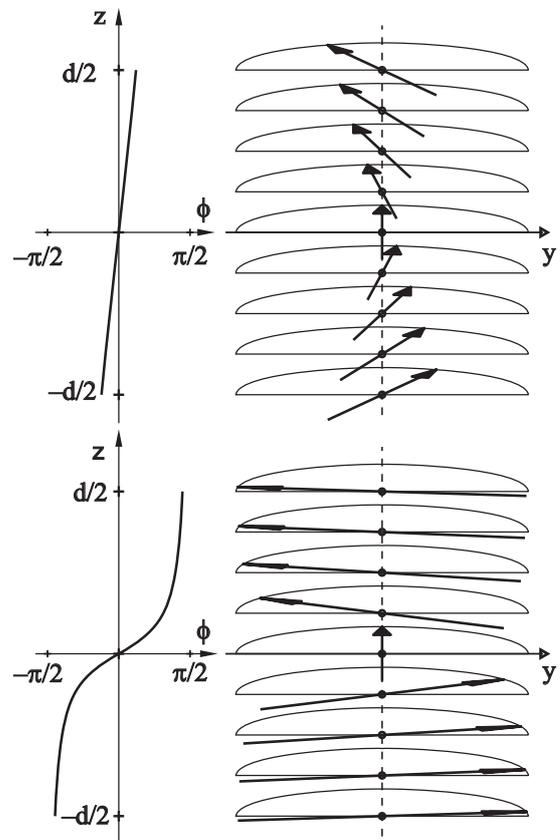


Рис. 7. Направление токов $j_c(z)$, текущих в плоскостях xu , как функция z [60]. Слева: угол $\phi(z)$ между j_c и осью x . Вверху: начало релаксации, $\tilde{J}_x = 0,975$. Внизу: $\tilde{J}_x = 0,4$.

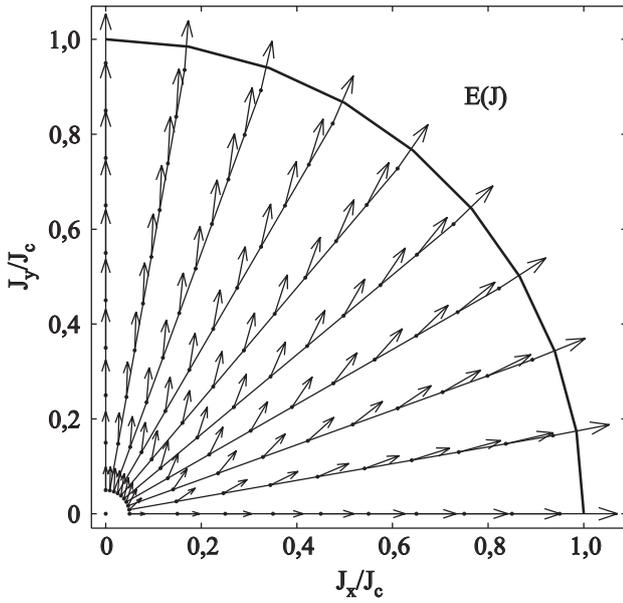


Рис. 8. Ориентация электрического поля $E(J_x, J_y)$, построенная на основе уравнений (40)–(43) [58]. Отклонение направления E от J наиболее существенно при малых токах J , и отклонение исчезает, когда J направлен вдоль x или y . Длина стрелок пропорциональна $E^{1/4}$.

там встряхивания в бесконечной полосе. Формулы для электрического поля в этом общем случае могут быть получены из уравнений (15), (17) [45]. В итоге, найдем, что электрические поля, обусловленные дрейфом, имеют вид [58]:

$$E_x^{dr}(t) = \mu_0 |\dot{h}_{ac}(t)| d \cdot e_x, \quad E_y^{dr}(t) = \mu_0 |\dot{h}_{ac}(t)| d \cdot e_y, \quad (39)$$

где постоянные e_x, e_y находятся из формул

$$|\tilde{J}_x| = e_x \left[\operatorname{arsinh} \left(\frac{1+2e_y}{2e_x} \right) + \operatorname{arsinh} \left(\frac{1-2e_y}{2e_x} \right) \right], \quad (40)$$

$$|\tilde{J}_y| = \left[e_x^2 + \left(e_y + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[e_x^2 + \left(e_y - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (41)$$

и $\tilde{J}_x = J_x / J_c, \tilde{J}_y = J_y / J_c, J_c = j_{c\perp} d$. Наконец, усредняя поля (39) по периоду переменного магнитного поля, приходим к формулам

$$E_x = \frac{2}{\pi} \mu_0 \omega h d e_x (\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) \operatorname{sgn}(J_x), \quad (42)$$

$$E_y = \frac{2}{\pi} \mu_0 \omega h d e_y (\tilde{J}_x, \tilde{J}_y) \operatorname{sgn}(J_y), \quad (43)$$

в которых $\operatorname{sgn}(x) = 1$ для $x > 0$, и $\operatorname{sgn}(x) = -1$ для $x < 0$. В предельных случаях поперечного и продольного встряхивания вихревой решетки в длинной полосе, когда $J_x = 0$ или $J_y = 0$, из этих формул получаются выражения, совпадающие с (37) при $h \gg h_p$ или с (38).

Уравнения (40)–(43) устанавливают связь между электрическим полем E и током J , которая необходима для вычисления релаксации магнитных полей и токов, циркулирующих в критическом состоянии бесконечно тонкой пластины. Отметим, что даже для рассматриваемого здесь случая изотропного пиннинга вихревых линий функции $e_x(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y), e_y(\tilde{J}_x, \tilde{J}_y)$ сильно анизотропны (см. рис. 8). При этом не только зависимости E от J различны для разных направлений J , но и направление E отклоняется от направления J к оси y , т.е. в общем случае $|E_y / E_x| \geq |J_y / J_x|$. Интересно, что по мере того, как в процессе релаксации токи затухают, анизотропия $E(J)$ становится даже более ярко выраженной (рис. 8).

Таким образом, описание процесса, связанного с периодическим встряхиванием вихревой среды в пластине, мы свели к двумерной проблеме релаксации токов в бесконечно тонком сверхпроводнике с ВАХ, задаваемой формулами (42), (43). Численные методы решения такой двумерной проблемы хорошо разработаны [36,76]. Анализ этой проблемы для прямоугольной пластины показал, что анизотропия электрического поля (42), (43) приводит к более быстрому затуханию токов J_y , текущих перпендикулярно к направлению h_{ac} , чем токов J_x , параллельных переменному магнитному полю; при этом в процессе релаксации токов появляются их дополнительные петли вблизи краев образца, которые обеспечивают сохранение тока [58]. Этот эффект особенно выражен для образцов с $w < L$, и новые петли токов порождают дополнительные максимумы и минимумы магнитного поля $H_z(x, y)$. Магнитная структура, появляющаяся в процессе релаксации, в принципе, может наблюдаться с помощью магнитооптики или датчиков Холла. Однако пока такие эксперименты не были проведены. Интересно, что если постоянное магнитное поле отклонено от нормали к плоскости пластины на угол θ , то это может усилить анизотропию релаксации токов и тем самым облегчит наблюдение дополнительных токовых петель в образце [77].

На рис. 9 показана релаксация магнитного момента M пластины под влиянием переменного магнитного поля. Речь идет только о неравновесной части магнитного момента; равновесная его часть не затухает и в приближении $B = \mu_0 H$ просто равна нулю. Как показано в [58], если время измеряется в единицах $t_1 = (\pi / \omega)(w / d)(J_c / h)$, вид функции $M(t) / M(0)$ зависит только от отношения L / w . Результаты численных расчетов, представленные на рис. 9, показывают, что в согласии с экспериментальными данными [57] релаксация магнитного момента является примерно экспоненциальной во времени. Точнее, $M(t)$ хорошо аппроксимируется функциями вида:

$$M(t) = M(0) \exp[-p(t / t_1)^q], \quad (44)$$

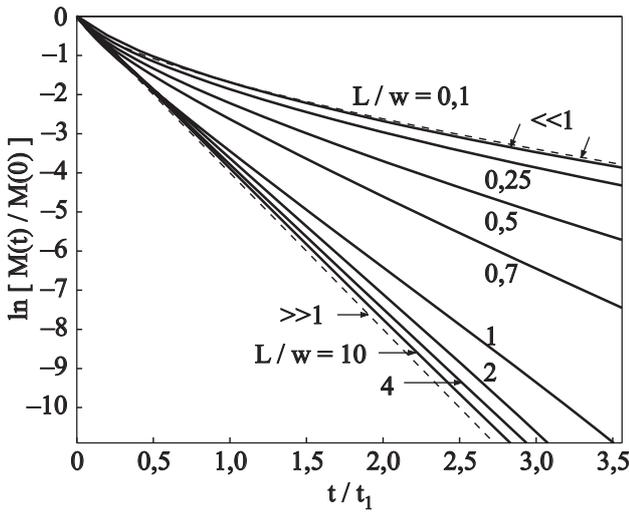


Рис. 9. Релаксация магнитного момента $M(t)$ прямоугольных сверхпроводящих пластин с различным отношением сторон $L/w = 10 - 0,1$ [58]. Здесь $M(0) = M_{sat} = -2J_c w^2(L - w/3)$ и $t_1 = (\pi/\omega)[\min(w, L)/d](J_c/h)$. Штриховые линии соответствуют поперечному ($L \gg w$) и продольному ($L \ll w$) эффектам встряхивания вихревой среды.

где $M(0) = M_{sat} = -2J_c w^2(L - w/3)$, а p и q — некоторые постоянные, зависящие от L/w . В случае поперечного встряхивания в длинной полосе ($L/w \gg 1$) находим $q = 1$ и $p = 4,01$, а при продольном встряхивании ($L/w \ll 1$) получаем $q = 0,64$, $p = 1,68$. Подчеркнем, в последнем случае зависимость $M(t)$ не является строго экспоненциальной по t , ввиду того, что E_x есть нелинейная функция J_x даже при малых токах (см. формулу (38)). В результате при больших временах затухание $M(t)$ становится более медленным, чем при поперечном эффекте встряхивания. Зависимость скорости релаксации магнитного момента пластины от отношения ее сторон L/w пока экспериментально не исследовалась.

3.2. Генерация постоянного электрического поля переменным магнитным полем в сверхпроводящей полосе

Рассмотрим теперь эффект, обнаруженный в работах [71,72]. Пусть сверхпроводник занимает пространство $|x| \leq w$, $|y| < \infty$, $|z| \leq d/2$, и магнитное поле $H_a(t) = H_0 + H_1 \cos \omega t$ приложено вдоль z , а транспортный ток I течет вдоль y . Подчеркнем, что сейчас переменное и постоянное магнитные поля параллельны друг другу, и ток I меньше своего критического значения I_c . Для простоты предполагаем, что $j_{c\perp} = \text{const}$, и поэтому $I_c = 2wdj_{c\perp}$. Если $d \ll w$, сверхпроводник представляет собой тонкую полосу в перпендикулярном поле, а при $d \gg w$ имеем пластину в поле, параллельном ее поверхности. В обоих случаях ширина образца равна $2w$. Покажем, что при этом

появляется падение напряжения U вдоль y , и в случае полосы U имеет все свойства, которые наблюдались в работах [71,72], т.е. $U \propto H_1 \omega I / I_c$.

3.2.1. Пластина в параллельном поле. Рассмотрим пластину ($d \gg w$) в параллельном ее поверхности поле. Этот случай впервые был исследован в работе [78]. Поскольку по предположению постоянное магнитное поле H_0 значительно превосходит поле полного проникновения магнитного потока в образец, $H_p = j_{c\perp} w$, в любой точке пластины наклон dH_z/dx профилей магнитного поля равен $\pm j_{c\perp}$. Приложенный ток I вызывает асимметрию этих профилей $H_z(x)$, и на поверхностях пластины $x = \pm w$ магнитные поля не одинаковы, $H(x = \pm w) = H_a \mp I/2d$. Из-за переменного магнитного поля $H_1 \cos \omega t$ как эти поля на поверхностях, так и профили $H_z(x)$ внутри образца осциллируют. Два предельных профиля, отвечающих $H_a = H_0 \pm H_1$, изображены на рис. 10. Если амплитуда H_1 переменного магнитного поля мала, то профили магнитного поля осциллируют только возле поверхностей пластины, а вблизи центра образца они «заморожены». Следовательно, за один цикл поля магнитный поток одной и той же величины входит и выходит на каждой поверхности пластины, и вихревые линии не пересекают центральную область образца. В этой ситуации усредненное по времени электрическое поле равно нулю.

Если H_1 превышает пороговое значение

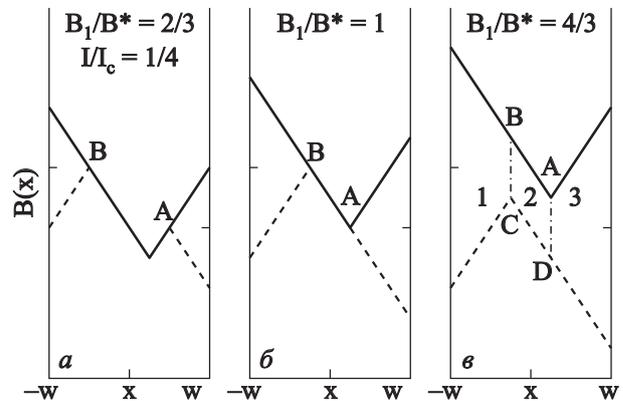


Рис. 10. Профили магнитной индукции $B(x) = \mu_0 H(x)$ в пластине, помещенной в поле $H_a = H_0 + H_1 \cos \omega t$ и несущей транспортный ток $I = I_c/4$, при $H_1 = 2H^*/3$ (а), $H_1 = H^*$ (б), $H_1 = 4H^*/3$ (в) [61]. Показаны два предельных профиля при $H_a = H_0 + H_1$ (сплошные линии) и $H_a = H_0 - H_1$ (штриховые линии). В случаях (а) и (б) центральная часть AB профиля $B(x)$ «заморожена». В случае (в) в течение одной половины цикла магнитный поток в областях 1 и 2 входит слева, а поток в 3 входит справа. В другой половине цикла поток 1 уходит налево, а потоки 2 и 3 направо. Таким образом, в течение цикла переменного поля поток 2, заключенный в параллелограмме $ABCD$, пересекает пластину слева направо.

$$H^* = (1 - I/I_c)H_p, \quad (45)$$

где $I_c = 2wdj_{c\perp}$ — критический ток, а $H_p = j_{c\perp}w$ — поле полного проникновения магнитного потока в образец при $I = 0$, то осциллирующие части профилей магнитного поля проникают все глубже в пластину и достигают друг друга. В этом случае процессы в образце напоминают работу насоса, и вихревые линии «прокачиваются» с одной стороны пластины на другую (рис. 10). Таким образом, асимметрия профилей магнитного поля приводит к тому, что в течение одного цикла поля на одной поверхности пластины входит магнитного потока в образец больше, чем выходит, а на другой ее стороне — наоборот. Усредненное по времени электрическое поле, генерируемое этим движением вихревых линий, равно $E_{av} = (\omega/2\pi)S_{ABCD}$, где $S_{ABCD} = \mu_0(2I/dj_{c\perp})(H_1 - H^*)$ — площадь параллелограмма $ABCD$ на рис. 10. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} E_{av} &= 0, & H_1 < H^*; \\ E_{av} &= \frac{I}{I_c} \frac{2\mu_0 w \omega}{\pi} (H_1 - H^*), & H_1 \geq H^*. \end{aligned} \quad (46)$$

Поле H^* имеет простой физический смысл. Это поле полного проникновения магнитного потока в пластину с током I . Поскольку каждая вихревая линия, которая движется с одной стороны образца на другую, проходит через все точки ширины пластины, усредненное поле E_{av} не зависит от x . Этот результат согласуется с усредненным по времени уравнением Максвелла $dE_{av}/dx = -\langle \partial B / \partial t \rangle = 0$ при периодически изменяющейся индукции B . Отметим также, что формула (46) точно совпадает с выражением (37), если в последнем вместо толщины пластины d использовать $2w$. Это совпадение не случайно, так как механизм дрейфа вихревых линий при поперечном встряхивании (разд. 3.1.1) есть по сути «прокачивание» компоненты поля h_x через толщину полосы.

Помимо усредненного поля E_{av} , может быть рассчитана и осциллирующая во времени часть электрического поля. Оказывается, что эта часть испытывает скачки в моменты времени, когда в пластине осуществляются критические состояния типа показанного на рис. 10,б [79]. Однако для рассматриваемого здесь эффекта эта часть поля не важна.

Формула (46) воспроизводит все характерные черты постоянного электрического поля, обнаруженные в экспериментах [71,72]. Она также предсказывает, что ненулевое электрическое поле может появляться, если только переменное магнитное поле превышает порог H^* , но в экспериментах [71,72] никакого заметного порога не обнаружено. Однако в них исследовались образцы в форме тонкой полосы, а не пластины.

3.2.2. Полоса в перпендикулярном поле. Рассмотрим теперь реалистичный случай тонкой полосы ($d \ll w$), помещенной в перпендикулярные ее плоско-

сти постоянное и переменное магнитные поля $H_a(t) = H_0 + H_1 \cos \omega t$ и несущей ток I [61]. Физическая картина транспорта вихревых линий поперек полосы качественно та же, что и в случае пластины, но при количественном описании эффекта теперь надо учесть тот факт, что связь между магнитным полем H_z и листовым током J (плотностью тока проинтегрированной по толщине полосы) является нелокальной. Проблема критического состояния для сверхпроводящей полосы либо с транспортным током, либо во внешнем магнитном поле, либо в случае, когда и ток, и поле приложены к образцу, решена в работах [4–6,80]. Используя эти решения, получаем следующую картину рассматриваемого эффекта. Когда большое постоянное магнитное поле H_0 и транспортный ток I приложены к образцу, в каждой точке полосы ток J достигает своего критического значения, $|J| = J_c = j_{c\perp}d$. При постоянных H_0 и I и включении дополнительного переменного магнитного поля профили тока $J(x,t)$ и локальной магнитной индукции $B_z(x,t)$ имеют, вообще говоря, сложные пространственные и временные зависимости. Однако пока амплитуда переменного магнитного поля H_1 меньше некоторого порога H^* существует область внутри полосы, в которой магнитный поток «заморожен». Следовательно, как и в пластине, вихревые линии не проходят с одного края полосы на другую, и усредненное по времени электрическое поле равно нулю. При больших амплитудах $H_1 \geq H^*$ переменное поле полностью проникает в полосу так, что при максимальном и минимальном приложенном поле $H_a = H_0 \pm H_1$ ток J достигает критического значения J_c практически во всех точках образца и изменяет знак только в одной точке полосы $x = \mp x_0$, где $x_0 = wI/I_c$ и $I_c = 2wdj_{c\perp}$. Два предельных профиля магнитного поля H_z , отвечающих этим кусочно-постоянным распределениям тока $J(x)$, имеют вид:

$$H_z(x) = H_0 \pm H_1 \pm H_{cr} \ln \frac{|x \mp x_0|}{(w^2 - x^2)^{1/2}}, \quad (47)$$

где $H_{cr} = j_{c\perp}d/\pi$, и верхний и нижний знаки отвечают максимальному и минимальному $H_a(t)$ соответственно (см. рис. 11). Магнитный поток, пересекающий полосу за один цикл переменного поля, дается площадью $ABCD$, изображенной на рис. 11. Вычисляя эту площадь, находим, что постоянное электрическое поле E_{av} по-прежнему описывается формулой (46), но с другой величиной порогового поля H^* , чем в пластине

$$H^* = \frac{H_{cr}}{2} \left[\frac{1}{\tilde{I}} \ln \left(\frac{1+\tilde{I}}{1-\tilde{I}} \right) + \ln \left(\frac{1-\tilde{I}^2}{4\tilde{I}^2} \right) \right], \quad (48)$$

где $\tilde{I} \equiv I/I_c$. Подчеркнем, что для тонкой полосы ($d \ll w$) это пороговое поле порядка $H_{cr} = j_{c\perp}d/\pi$ и,

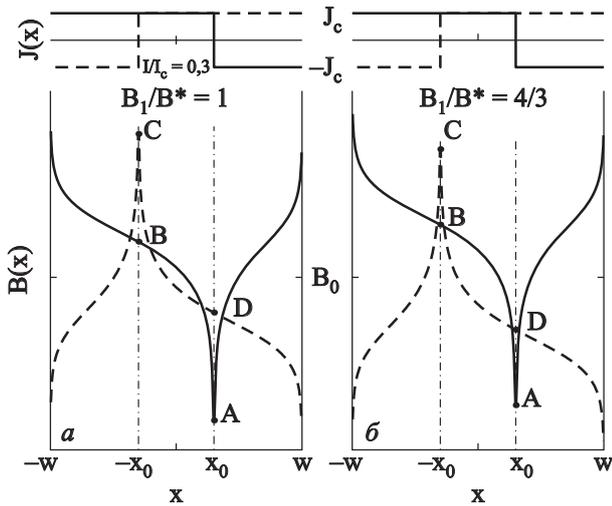


Рис. 11. Предельные профили магнитной индукции $B(x) = \mu_0 H(x)$ в полосе, помещенной в перпендикулярные ее плоскости постоянное и переменное магнитные поля $H_a = H_0 + H_1 \cos \omega t$ и несущей транспортный ток $I = 0,3I_c$, при амплитудах переменного поля $H_1 = H^*$ (а), $H_1 = 4H^*/3$ (б) [61]. Сплошная линия отвечает $H_0 + H_1$, а штриховая — $H_0 - H_1$. В случае (а) область «замороженного» потока только что исчезла и вихревые линии по-прежнему не пересекают полосу, так как площадь $ABCD$ равна нулю. В случае (б) в течение каждого цикла поля магнитный поток, заключенный в области $ABCD$, пересекает полосу слева направо. Вставка показывает профили тока $J(x)$, которые одинаковы в случаях (а) и (б).

следовательно, значительно меньше, чем порог в пластине, $H^* \approx H_p = j_{c\perp} w$. Это отчасти объясняет, почему в работах [71,72] никакого заметного порогового поля не было обнаружено (см. также ниже). Согласно (48), поле H^* — убывающая функция \tilde{I} . При $\tilde{I} < d/2w$ (т.е. при $I < j_{c\perp} d^2$) эта функция, как обычно, должна быть «обрезана», поскольку x_0 становится порядка d . В этом случае H^* порядка поля полного проникновения магнитного потока в полосу при $I = 0$, $H_p = H_{cr} \ln(2ew/d)$ [35].

Хотя формулы (46) и (48) объясняют зависимости экспериментальных данных [71,72] от частоты ω и амплитуды H_1 переменного магнитного поля, а также от приложенного тока I и от величины критического тока I_c , однако измеренное электрическое поле было примерно на два порядка больше, чем оценка $E_{av} \sim \omega \omega B_1$, которая следует из формулы (46) при $I \sim I_c$. Это расхождение можно объяснить следующим образом. В экспериментах [71,72] использовались сверхпроводящие пленки $a\text{-Mo}_3\text{Si}$ и $\text{Nd}_{1,85}\text{Ce}_{0,15}\text{CuO}_x$ толщиной 100 нм и размерами 1×1 см, в которых протравливались щели шириной около 20 мкм так, чтобы получить полосу размерами 20×200 мкм вместе с двумя токовыми контактами и двумя контактами для измерения напряжения (рис. 12). Выше при объяснении экспериментальных результатов предполагалось,

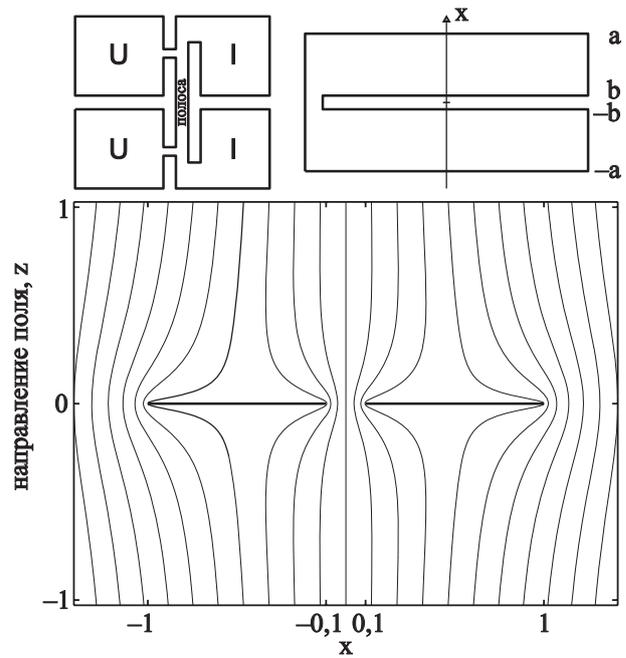


Рис. 12. Силовые линии магнитного поля вблизи двойной идеально экранированной полосы, показанной сверху справа ($b \leq |x| \leq a$, $a = 1$, $b = 0,1$, две жирные линии на основной части рисунка), в перпендикулярном магнитном поле H_1 [61]. Вверху слева схематически показана также форма пленки, использованной в экспериментах [71,72] (U и I обозначают контакты напряжения и тока).

что электрическое поле $E_{av} \sim \omega \omega B_1$ достаточно мало по сравнению с $\rho_{ff} j_{c\perp}$ (см. условие (8)). Однако для широкой пленки, окружающей полосу, условие (8) может быть не выполнено, и тогда переменное магнитное поле не проникает в такую пленку. Это поле экранируется токами, которые текут главным образом вблизи ее внешних краев и краев щелей. В свою очередь, эти токи приводят к появлению переменного поля внутри щелей и полосы, которое значительно больше, чем приложенное переменное магнитное поле.

Чтобы оценить усиление переменного поля, рассмотрим две параллельные полосы, помещенные в плоскости xu при $-a \leq x \leq -b$ и $b \leq x \leq a$, к которым приложено перпендикулярное магнитное поле H_1 . Будем считать, что магнитное поле не проникает в эти полосы. Тогда распределения экранирующих токов в полосах и магнитного поля вне их может быть получено с помощью методов, изложенных в [81]. Если ширина щели $2b$ много меньше, чем полная ширина двойной полосы $2a$, то перпендикулярное магнитное поле H_1 концентрируется в щели (см. рис. 12), и для индукции в щели имеем [61]

$$B(x) \approx B_1^{\text{eff}} (1 - x^2/b^2)^{-1/2}, \quad |x| < b, \quad (49)$$

$$B_1^{\text{eff}} = B(x=0) \approx B_1 \frac{a/b}{\ln(4a/b)} \gg B_1. \quad (50)$$

Таким образом, согласно формуле (50), фактор усиления переменного магнитного поля в экспериментах примерно равен величине B^{eff} / B_1 , которая порядка отношения полной ширины пленки к ширине щелей, окружающих полосу. Эффект фокусировки магнитного потока также объясняет отсутствие заметного порога по переменному магнитному полю в экспериментах [71,72]. Чтобы экспериментально проверить предложенное объяснение усиления поля, достаточно изменить ширину щелей в пленке, не изменяя полосу и подходящие к ней контакты. Это должно привести к изменению измеряемого электрического поля.

В заключение подчеркнем, что рассмотренный эффект генерации постоянного электрического поля переменным магнитным полем отличается от так называемого ratchet-эффекта (см., например, [82]), в котором направленное движение вихрей возникает из-за асимметрии потенциала сил пиннинга. В рассматриваемом случае пиннинг изотропен, и асимметрия профилей магнитного поля создается транспортным током.

4. Критические состояния в тонких плоских сверхпроводниках второго рода с анизотропным пиннингом вихревых линий

Для анизотропных сверхпроводящих материалов вполне естественно ожидать и анизотропию пиннинга вихревых линий. Известно только одно исключение из этого правила. В случае слабого коллективного пиннинга точечными дефектами в так называемом режиме пиннинга отдельных вихрей (single vortex pinning режим) критическая плотность тока $j_{c\perp}$, входящая в (27), не зависит от величины и направления магнитной индукции \mathbf{B} и, следовательно, при заданной температуре является постоянной величиной [83]. Еще одним специфическим режимом пиннинга является режим пиннинга малых вихревых связок (small bundle pinning режим), когда размер связки вихрей не превышает лондоновскую глубину проникновения магнитного поля. В этом случае $j_{c\perp}$ зависит от B_z [83], т.е. только от комбинации $|B| \cos \theta$, где θ — угол между направлением \mathbf{B} и осью анизотропии материала (ось c для высокотемпературных сверхпроводников), которая обычно перпендикулярна плоскости сверхпроводящих монокристаллов. Однако, если центры пиннинга не могут рассматриваться как точечные (т.е. если их размеры сравнимы или больше корреляционной длины ξ), или пиннинг не является слабым, следует ожидать заметную анизотропию пиннинга вихревых линий, и $j_{c\perp}$ зависит от θ и $|B|$ по отдельности. Кроме того, ясно, что любые протяженные дефекты, например двойниковые границы или дефекты, возникающие после облучения образца тяжелыми ионами, должны приводить к анизотропии пиннинга даже в изотропных сверхпроводящих материалах.

До недавнего времени была известна только одна работа [37], в которой исследовалось критическое состояние в образце в форме диска для некоторой определенной модели аксиальной анизотропии пиннинга вихревых линий. Однако в разд. 2.2 было объяснено, как учесть произвольную аксиальную анизотропию пиннинга для тонких плоских сверхпроводников любой формы, помещенных в перпендикулярное их плоскости внешнее магнитное поле H_a . Оказалось, что и анизотропия пиннинга, и зависимость $j_{c\perp}$ от $H = |\mathbf{B}| / \mu_0$ приводят к зависимости критического листового тока J_c от H_z , локального значения компоненты магнитного поля, перпендикулярной плоскости сверхпроводника. Выражение (27) позволяет найти $J_c(H_z)$ по $j_{c\perp}(H, \theta)$. Найденной зависимости $J_c(H_z)$ достаточно для решения двумерной проблемы критического состояния в бесконечно тонком сверхпроводнике. В итоге, все эти результаты дают возможность описывать трехмерные критические состояния с анизотропным пиннингом вихревых линий (см. разд. 2.2).

Для понимания влияния анизотропии пиннинга на критическое состояние в этом разделе детально проанализируем тот простой случай, в котором зависимостью $j_{c\perp}$ от $|H|$ можно пренебречь, и поэтому в первом приближении $j_{c\perp} = j_{c\perp}(\theta)$. Такое приближение вполне оправдано, если характерный масштаб H_0 полевой зависимости $j_{c\perp}$ значительно превышает характерное поле в критическом состоянии тонкого сверхпроводника, $H_0 \gg J_c$. Иными словами, использование этого приближения вполне допустимо для не слишком толстых образцов с $d \ll H_0 / j_{c\perp}$. Тогда $j_{c\perp}(\theta, |H|) \approx j_{c\perp}(\theta, 0)$. При этом, если плотность критического тока $j_{c\perp}(\theta, |H|)$ зависит от θ и $|H|$ по отдельности, а не от их комбинации $|H| \cos \theta$, невозможно пренебречь угловой зависимостью $j_{c\perp}$ даже в таких тонких образцах, поскольку характерный угол θ в образце порядка $j_{c\perp} d / H_z$, и он существенно изменяется поперек толщины сверхпроводника при $H_z \sim j_{c\perp} d$.

В подобных тонких сверхпроводниках анизотропия пиннинга может быть существенной и в сильных магнитных полях $H_a \sim H_0$. Поскольку в таких полях характерный угол θ в образце мал, анизотропия пиннинга будет проявлять себя, если угловая зависимость $j_{c\perp}$ имеет достаточно острый пик при $\theta = 0$. Ниже будет показано, что такая анизотропия приводит к так называемому fishtail-эффекту, который часто наблюдается в высокотемпературных сверхпроводниках [84–93]. В этом разделе будет также проанализировано критическое состояние в тонком плоском сверхпроводнике в условиях фазового перехода в вихревой решетке [63,64,94]. Именно с существованием такого перехода наиболее часто связывают упомянутый fishtail-эффект в высокотемпературных сверхпроводниках и пик-эффект в низкотемпературных сверхпроводящих материалах [95–112]. Наконец, в этой главе будет указан

путь восстановления угловой зависимости $j_{c\perp}(\theta)$ по профилям магнитного поля, измеренным на поверхности тонкого плоского сверхпроводника.

4.1. Критическое состояние в сверхпроводящей полосе с анизотропным пиннингом

Для понимания влияния анизотропного пиннинга на критическое состояние рассмотрим тонкую сверхпроводящую полосу в рамках простейшей модели для $j_{c\perp}(\theta)$ [113], в которой угловая зависимость критической плотности тока предполагается кусочно-постоянной (рис. 13):

$$\begin{aligned} j_{c\perp}(\theta) &= j_{c0}, & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ j_{c\perp}(\theta) &= j_{c1}, & \theta_0 \leq \theta \leq \pi/2, \end{aligned} \quad (51)$$

где постоянные j_{c0} , j_{c1} , и θ_0 — параметры модели. Используя соотношение (27), нетрудно проверить, что угловой зависимости (51) соответствует следующая зависимость $J_c(H_z)$:

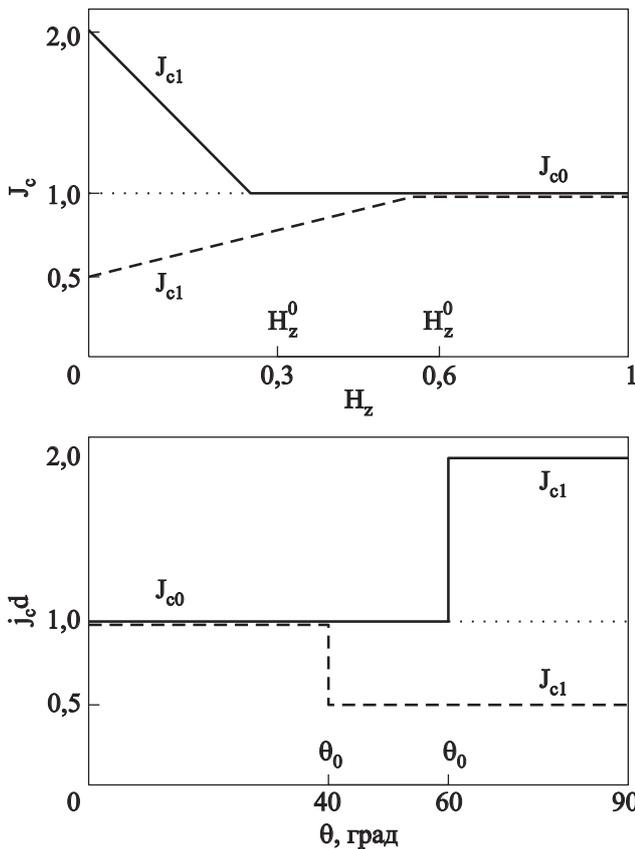


Рис. 13. Нижний график: модельная угловая зависимость $j_{c\perp}(\theta)$, формула (51), для случаев внутреннего пиннинга (сплошная линия) и пиннинга протяженными дефектами, параллельными оси z (штриховая линия) [113]. Верхний график показывает соответствующие зависимости $J_c(H_z)$, формула (52). Поле H_z и ток J_c измеряются в единицах J_{c0} , а угол θ в градусах. Для примера показаны зависимости для случаев: $J_{c1} = 2$, $\theta_0 = 60^\circ$ и $J_{c1} = 0,5$, $\theta_0 = 40^\circ$.

$$\begin{aligned} J_c(H_z) &= J_{c1} - \gamma H_z, & 0 \leq H_z \leq H_z^0, \\ J_c(H_z) &= J_{c0}, & H_z \geq H_z^0, \end{aligned} \quad (52)$$

где $\gamma = (J_{c1} - J_{c0}) / H_z^0$; $J_{c1} = j_{c1}d$; $J_{c0} = j_{c0}d$ и $H_z^0 = J_{c0} / 2 \operatorname{tg} \theta_0$ (рис. 13). Таким образом, случай $\gamma > 0$ отвечает пику в $j_{c\perp}(\theta)$ при $\theta = \pi/2$, относительная высота которого определяет отношение J_{c1} / J_{c0} , в то время как параметр H_z^0 связан с его шириной, $\operatorname{tg}[(\pi/2) - \theta_0] = 2H_z^0 / J_{c0}$. Следовательно, чем выше или уже такой пик в $j_{c\perp}(\theta)$, тем больше параметр $\gamma = (J_{c1} - J_{c0}) / H_z^0$. И наоборот, пик при $\theta = 0$ соответствует $\gamma < 0$; с уменьшением ширины этого пика параметр H_z^0 увеличивается, а относительная высота пика задает J_{c0} / J_{c1} . Поскольку в слоистых высокотемпературных сверхпроводниках внутренний пиннинг порождает пик в $j_{c\perp}(\theta)$ при $\theta = \pi/2$, а треки тяжелых ионов, нормальные плоскости образца, приводят к пику при $\theta = 0$, то можно считать, что зависимость (52) при $\gamma > 0$ приближенно моделирует внутренний пиннинг, а в случае $\gamma < 0$ — пиннинг протяженными дефектами, созданными при облучении сверхпроводника тяжелыми ионами.

Пусть бесконечно длинная сверхпроводящая полоса шириной $2w$ и толщиной d заполняет пространство $-w \leq x \leq w$, $-\infty < y < \infty$, $-d/2 \leq z \leq d/2$, и увеличивающееся внешнее магнитное поле H_a приложено вдоль z . Для соответствующей бесконечно тонкой полосы уравнения (29)–(31) приобретают вид:

$$H_z(x) = H_a + \frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w \frac{J(t) dt}{t-x}, \quad (53)$$

где $J(x) \equiv \int_{-d/2}^{d/2} j_y(x, z) dz$ — плотность тока, проинтегрированная по толщине образца,

$$J(x) = -\frac{x}{|x|} J_c[H_z(x)], \quad b \leq |x| \leq w, \quad (54)$$

$$H_z(x) = 0, \quad |x| \leq b. \quad (55)$$

Функция $J_c(H_z)$ описывается формулами (52), а линии $x = \pm b$ задают положение фронта магнитного потока в полосе, т.е. при $x = \pm b$ поле H_z обращается в нуль. Параметр b зависит от H_a и должен находиться вместе с $J(x)$ и $H_z(x)$. Система уравнений (53)–(55) может быть сведена к линейному сингулярному интегральному уравнению с ядром типа Коши [113]. Используя теорию таких уравнений [81], в [113] были найдены в квадратурах функции $J(x)$, $H_z(x)$ и фронт магнитного потока b при любом заданном значении H_a . Некоторые профили $J(x)$ и $H_z(x)$ представлены на рис. 14.

Анализ полученного решения в окрестности точки $x = b$, в которой H_z достигает нуля, показал, что в случае $\gamma > 0$ функция $|J(x)|$ имеет острый пик при $x = b$, а при $\gamma < 0$ ток $J(x)$ есть монотонная функция,

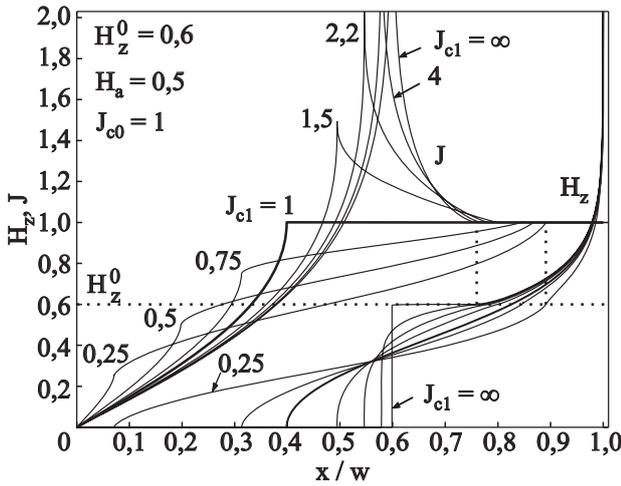


Рис. 14. Некоторые профили $J(x)$ и $H_z(x)$ в сверхпроводящей полосе в поле $H_a = 0,5$ для различных зависимостей $J_c(H_z)$, формула (52), с параметрами: $H_z^0 = 0,6$ и $J_{c1} = 0,25, 0,5, 0,75, 1, 1,5, 2,2, 4$, и ∞ [113]. Величины J и H_z измеряются в единицах J_{c0} . Пунктирные линии указывают поле $H_z = H_z^0$ и точку $x = a$, в которой $J(a) = J_{c0}$ и $H_z(a) = H_z^0$. В пределе $J_{c1} \rightarrow \infty$ поле $H_z(x)$ при $x = b$ резко возрастает до значения H_z^0 и остается постоянным при $b \leq x \leq a$.

но ее производная по x обращается в бесконечность в этой точке (рис. 14). Поле H_z вблизи точки $x = b$ обращается в нуль по закону

$$H_z = C(x^2 - b^2)^\beta, \quad |x| \geq b, \quad (56)$$

где C — некоторая постоянная, а $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg(\gamma/2)$.

Из этого результата заключаем, что чем больше γ , тем резче изменяется профиль $H_z(x)$ в окрестности этой точки. В предельном случае высокого или узкого пика в $j_{c\perp}(\theta)$ при $\theta = \pi/2$, то есть при $\gamma \rightarrow +\infty$, постоянная C в формуле (56) переходит в H_z^0 , а $\beta \rightarrow 0$. Это означает, что мы имеем резкую «ступеньку» высотой H_z^0 при $x = b$ (см. рис. 14). Кроме того, в этом предельном случае решение практически перестает зависеть от высоты пика J_{c1} . В частности, положение фронта магнитного потока b/w есть функция только H_a/H_{cs} и ширины пика в $j_c(\theta)$, которая связана с параметром H_z^0/H_{cs} . Здесь для удобства введено обозначение: $H_{cs} \equiv J_{c0}/\pi$. Следовательно, измерение $b(H_a)$ в этом случае в принципе может дать информацию не только о $H_{cs} = J_{c0}/\pi$, но также и о ширине этого пика. Например, когда пик узкий, то есть когда $H_z^0 \ll J_{c0}$, имеем следующее выражение для b :

$$\left(\frac{b}{w}\right)^2 \approx \frac{1 + 0,39(H_z^0/H_{cs})^2 \tanh^2(H_a/H_{cs})}{\cosh^2(H_a/H_{cs})}. \quad (57)$$

* Следует иметь в виду, что формула (58) справедлива, если только до облучения и после него магнитное поле увеличивается от нуля до заданного значения H_a . Если облучение происходит при фиксированном магнитном поле, то $b_1 = b$; см. разд. 5.

Отметим, что для всего интервала изменения H_a правая часть (57) не может быть хорошо аппроксимирована зависимостью (6) для изотропного случая с некоторым новым эффективным J_c , если параметр H_z^0 отличен от нуля. Еще одно проявление анизотропии пиннинга при $\gamma > 0$ состоит в том, что в петле намагниченности появляется пик при $H_a = 0$ [52].

Рассмотрим теперь случай малых отрицательных значений γ , когда $H_z^0 \gg H_{cs} = J_{c0}/\pi$, но отношение J_{c0}/J_{c1} не близко к единице. Этот случай может дать представление о пиннинге протяженными дефектами, порождающими пик в $j_c(\theta)$ при $\theta = 0$. Действительно, если предположить, что характерная ширина этого пика θ_0 мала ($\theta_0 \ll \pi/2$), тогда из определений H_z^0 и γ следует, что $H_z^0 \approx J_{c0}/2\theta_0 \gg H_{cs}$ и $|\gamma| < 2\theta_0 \ll \pi$. Так как решение с $\gamma = 0$ и $J_c = J_{c1}$ описывает критическое состояние в полосе до ее облучения тяжелыми ионами, создающими дефекты (предполагаем, что протяженные дефекты не изменяют $j_c(\theta)$ при $\theta > \theta_0$), разница между решениями, соответствующими $\gamma \neq 0$ и $\gamma = 0$, дает информацию о пиннинге вихревых линий этими дефектами. В рассматриваемом случае эта разница мала и может быть проанализирована аналитически. В результате заключаем, что после облучения уменьшается глубина проникновения магнитного поля в образец $w - b$, и находим следующее соотношение между положениями фронта магнитного потока b и b_1 , полученными при одном и том же H_a в полосе с дефектами и без них*:

$$\operatorname{arccosh} \frac{w}{b_1} - \operatorname{arccosh} \frac{w}{b} = \frac{|\gamma|}{\pi} g(h), \quad (58)$$

где $h \equiv \pi H_a / J_{c1}$, $w/b_1 = \cosh(h)$ и функция $g(h)$ имеет вид:

$$g(h) = \int_0^h \ln(2 \cosh t) dt. \quad (59)$$

Коэффициент

$$\frac{|\gamma|}{\pi} \approx \frac{2\theta_0}{\pi} \frac{j_c(0) - j_c(\pi/2)}{j_c(0)}$$

в (58) определяется характеристиками пиннинга протяженными дефектами, т.е. шириной и высотой пика в $j_c(\theta)$ (а точнее, его «площадью»). Поскольку g есть нелинейная функция h , точная зависимость $b(H_a)$ опять не может быть описана формулой (6) с некоторым эффективным J_c . В полевой зависимости намагниченности M наличие пика в $j_c(\theta)$ при $\theta = 0$ может привести к немонотонному поведению M при достаточно больших магнитных полях (см. следующий раздел).

4.2. Fishtail-эффект в тонких плоских сверхпроводниках

В кристаллах высокотемпературных сверхпроводников часто наблюдается немонотонная зависимость ширины петли магнитного гистерезиса от величины внешнего магнитного поля, то есть, так называемый fishtail-эффект [84–93]. Поскольку обычно подразумевается, что ширина петли гистерезиса пропорциональна плотности критического тока $j_{c\perp}$ [2,114], на этом основании делается вывод и о немонотонном поведении этой плотности. В настоящем разделе будет показано, что даже при монотонном уменьшении $j_{c\perp}$ с ростом абсолютной величины магнитного поля H fishtail-эффект может появиться, если имеется искривление вихревых линий в образце, а их пиннинг в сверхпроводнике является анизотропным [115–117]. Это связано с тем, что в анизотропном случае критическая плотность тока $j_{c\perp}$ не однородна по образцу, и в достаточно широкой области магнитных полей нет простой связи магнитного момента образца с $j_{c\perp}$. Иными словами, общепринятый способ определения $j_{c\perp}(H)$ с помощью петли гистерезиса может привести к неправильному результату при заметной анизотропии пиннинга вихревых линий.

Проанализируем магнитный момент M тонкого плоского сверхпроводника, помещенного в перпендикулярное магнитное поле H_a . Для определенности рассмотрим сверхпроводник в форме тонкой прямоугольной пластины шириной $2w$, длиной $2L$ и толщиной d , $d \ll w, L$. Пусть внешнее поле H_a заметно превосходит поле полного проникновения магнитного потока в образец H_p , т.е. $H_a \gg H_p$, а плотность критического тока имеет вид: $j_{c\perp} = j_{c\perp}^0(\theta)f(H)$, где $f(H)$ — монотонно убывающая функция H , нормированная так, что $f(0) = 1$. Кроме того, предполагается, что собственные поля токов значительно меньше характерного масштаба, на котором изменяется функция $f(H)$, т.е. $dj_{c\perp}^0(0)|f'(H)| \ll 1$. Пусть функция $j_{c\perp}^0(\theta)$, описывающая угловую зависимость критической плотности тока, имеет пик при $\theta = 0$ и в окрестности этой точки справедливо разложение:

$$j_{c\perp}^0(\theta) \approx j_{c\perp}^0(0)(1 - \alpha\theta), \quad (60)$$

где α — положительная постоянная. Учитывая, что $H_a \gg H_p \sim j_{c\perp}^0(0)d$ и, следовательно, угол θ мал во всех точках образца, из (27) и (60) находим [115]

$$J_c(H_z) \approx j_{c\perp}^0(0)f(H_z)d \left(1 - \frac{\alpha j_{c\perp}^0(0)f(H_z)d}{4H_z} \right). \quad (61)$$

Здесь мы пренебрегли незначительной разницей между H и H_z . Отметим, что $f(H_z)$ есть убывающая функция H_z , а выражение в скобках монотонно возрастает с ростом H_z . Этот растущий множитель связан с тем, что с увеличением H_z вихревые линии становятся все менее искривленными, и из-за наличия максимума

вблизи $\theta = 0$ угловая часть тока $j_{c\perp}^0(\theta)$ возрастает. В итоге, произведение растущего и убывающего множителей может привести к немонотонной зависимости $J_c(H_z)$. Поскольку вариации H_z по образцу относительно малы по сравнению с H_a (они порядка H_p), в главном приближении можно положить $H_z = H_a$ в (61).

Поскольку при постоянном J_c магнитный момент прямоугольной пластины с $L > w$ имеет вид [114]:

$$|M| = \frac{2}{3}w^2(3L - w)J_c(H_a), \quad (62)$$

формула (62) показывает, что немонотонная зависимость $J_c(H_a)$ приводит к fishtail-эффекту в петле магнитного гистерезиса. Отметим, при сделанных предположениях поле H_m , при котором $J_c(H_a)$ достигает максимума, может быть достаточно большим и превышать H_p . Например, если

$$f(H) = \frac{H_0}{H_0 + H} \quad (63)$$

(по предположению, постоянная $H_0 \gg dj_{c\perp}^0(0)$), то для H_m получаем

$$H_m \approx (\alpha j_{c\perp}^0(0)dH_0/4)^{1/2} \gg j_{c\perp}^0(0)d \sim H_p.$$

Подчеркнем, что поле H_m зависит от толщины образца d , если fishtail-эффект обусловлен угловой зависимостью критической плотности тока.

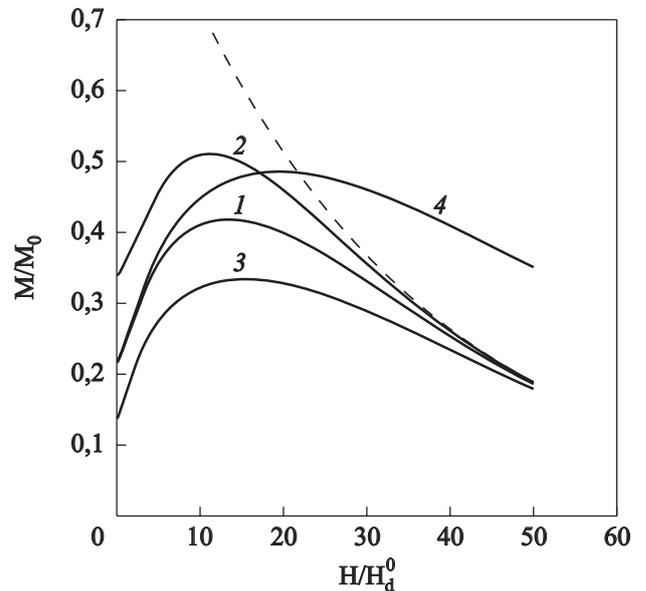


Рис. 15. Зависимости $M(H_a)$ в случае сверхпроводящего диска, рассчитанные с использованием формул (27), (64), (65) для $\beta_j = 2/3$ и нескольких наборов остальных параметров [117]: $\theta_1 = 0,01$, $\theta_2 = 0,1$, $H_0 = 30$ (1); $\theta_1 = 0,02$, $\theta_2 = 0,1$, $H_0 = 30$ (2); $\theta_1 = 0,005$, $\theta_2 = 0,1$, $H_0 = 30$ (3); $\theta_1 = 0,01$, $\theta_2 = 0,1$, $H_0 = 50$ (4). Штриховая линия отвечает изотропному случаю ($\theta_2 = 0$) с $H_0 = 30$. Здесь $M_0 = \pi R^3 dj_{c\perp}^0(0)/3$, а H_0 выражена в единицах $H_d^0 = dj_{c\perp}^0(0)/2$.

На рис. 15 показаны зависимости $M(H_a)$ для тонкого сверхпроводящего диска радиусом R и толщиной d , рассчитанные численно для следующей угловой зависимости $j_{c\perp}^0(\theta)$ [117]:

$$j_c^0(\theta) = j_c^0(0)[\psi(\theta)]^{\beta_j},$$

$$\psi(\theta) = \left(\frac{\theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta^2} \right)^{1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_2, \quad (64)$$

$$\psi(\theta) = \psi(\theta_2), \quad \theta_2 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Здесь β_j , θ_1 , θ_2 — некоторые постоянные параметры модели. Такая форма угловой зависимости $j_{c\perp}^0(\theta)$ типична для случаев, когда имеются протяженные дефекты [83]. В этой ситуации углы θ_1 и θ_2 могут быть связаны с так называемыми lock-in переходом и углом захвата (trapping angle) соответственно. При этих расчетах функция $f(H)$ была выбрана в виде:

$$f(H) = \exp(-H/H_0). \quad (65)$$

Как показано в [117], при угловой зависимости, описываемой формулами (64), приближенно имеет место скейлинг кривых $M(H_a)$, т.е. зависимости $M(H_a)$ для различных значений параметров укладываются практически на одну кривую, если M и H_a нормированы на высоту M_m и положение H_m максимума соответствующей кривой. Интересно, что подобный скейлинг действительно нередко наблюдается для монокристаллов YBaCuO [91,92].

4.3. Критическое состояние в сверхпроводящей полосе с переходом порядок–беспорядок в вихревой решетке

При переходе порядок–беспорядок в вихревой решетке [63,64,94], который индуцируется точечными центрами пиннинга при определенной величине локальной магнитной индукции B_{dis} , происходит трансформация вихревой среды из квазиупорядоченного брэгговского стекла [118] в неупорядоченную аморфную вихревую фазу посредством образования дислокаций в вихревой решетке (см. [119] и ссылки там). При таком переходе пиннинг вихрей усиливается, это приводит к резкому возрастанию критической плотности тока при индукции B_{dis} . В настоящее время пик-эффект в низкотемпературных сверхпроводниках [95–102] и fishtail-эффект в высокотемпературных сверхпроводниках [84–93] чаще всего объясняют именно этой генерацией дислокаций [95–101,103–106,108–112]. В экспериментах, использующих наборы малых холловских датчиков, помещенных на поверхности плоского сверхпроводника [94], или в магнитооптических измерениях профилей магнитного поля на этой поверхности [120,121] переход в вихревой решетке идентифицируют с изломом градиента локального магнитного поля. Однако, как было замечено в работе [122], для тонкого плоского образца предположение о резком скачке тока на фронте перехода должно было бы привести к появлению пика (или провала) в профиле маг-

нитного поля, подобного тому, что имеет место на краях сверхпроводника, вместо наблюдаемого излома градиента. Численный анализ этой проблемы показал [122], что вблизи фронта, на котором происходит изменение градиента, существует область, в которой плотность тока, проинтегрированная по толщине образца, непрерывно изменяется от одного своего критического значения до другого, и фронт отвечает только одной из двух границ этой области. Внутри области обязательно существует смесь двух вихревых фаз. Полученное в работе [123] аналитическое решение уравнений критического состояния для тонкой полосы, в которой происходит переход порядок–беспорядок, подтверждает эту точку зрения и дает полное описание этой проблемы.

Приведем основные результаты работы [123]. Рассмотрим такую же тонкую и бесконечно длинную сверхпроводящую полосу, помещенную в перпендикулярное ее плоскости внешнее магнитное поле H_a , как и в разд. 4.1, но теперь пиннинг вихревых линий предполагаем изотропным, так что $J_c = dj_{c\perp}$. Полагая, что в каждой точке образца устанавливается локальное равновесное состояние, переход порядок–беспорядок в вихревой решетке будем описывать следующим образом:

$$J_c(B_z) = J_{c1}, \quad B_z < B_{\text{dis}},$$

$$J_c(B_z) = J_{c2}, \quad B_z > B_{\text{dis}}, \quad (66)$$

где J_{c1} , J_{c2} — некоторые постоянные и $J_{c2} > J_{c1}$. Подчеркнем, что в отличие от (52) теперь зависимость $J_c(B_z)$ связана не с анизотропией пиннинга, а со скачком критической плотности тока $j_{c\perp}$ при $B = B_{\text{dis}}$. Поскольку нас интересует критическое состояние только при магнитных полях вблизи перехода порядок–беспорядок, в дальнейшем не рассматриваем влияние этого перехода на процесс начального проникновения внешнего магнитного поля в образец и на перемагничивание полосы при расчете петли магнитного гистерезиса.

Уравнения критического состояния для случая, например, возрастающего H_a гласят:

$$|J(x)| = J_{c1}, \quad 0 \leq x^2 \leq b_1^2, \quad (67)$$

$$H_z(x) = H_{\text{dis}}, \quad b_1^2 \leq x^2 \leq b_2^2, \quad (68)$$

$$|J(x)| = J_{c2}, \quad b_2^2 \leq x^2 \leq w^2. \quad (69)$$

Здесь $|x| = b_1$ определяет границу области, в которой $|J(x)| = J_{c1}$ и $H_z(x) < H_{\text{dis}}$, т.е. в которой существует упорядоченная вихревая фаза, а $|x| = b_2$ описывает границу области, занятой аморфной вихревой фазой, в которой $|J(x)| = J_{c2}$ и $H(x) > H_{\text{dis}}$ (см. рис. 16). На этих границах поле H достигает H_{dis} , и при $b_1 \leq |x| \leq b_2$ имеем $H(x) = H_{\text{dis}}$, в то время как ток J лежит в интервале $J_{c1} \leq |J| \leq J_{c2}$. Отметим, что эти уравнения критического состояния описывают, как

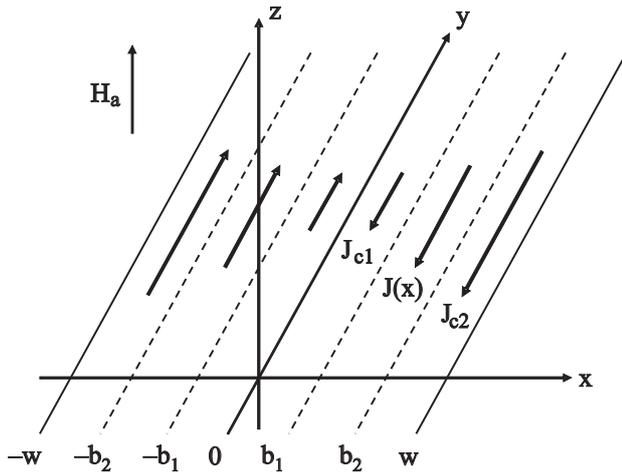


Рис. 16. Распределение тока J в тонкой полосе с переходом порядок–беспорядок, который описывается моделью (66) [123]. Линии $x = \pm b_2$, $x = \pm b_1$ указывают границы аморфной и упорядоченной вихревых фаз соответственно. При $b_1 < |x| < b_2$ существует смесь двух вихревых фаз с $J_{c1} \leq J(x) \leq J_{c2}$. Показан случай увеличивающегося внешнего магнитного поля H_a , когда $b_2 > b_1$.

специальный случай, и ситуацию, когда $b_1 = b_2$, т.е. когда имеет место непосредственный контакт упомянутых выше областей. Однако оказывается, что границы b_1 и b_2 не могут быть выбраны произвольно, и непосредственный контакт областей запрещен. В противном случае условие локального равновесия среды (66) не может быть согласовано с условиями критического состояния (67)–(69) [123].

Используя теорию линейных сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши [81], в работе [123] были получены явные аналитические формулы для токов $J(x)$ и магнитных полей $H_z(x)$ в случаях увеличивающегося и уменьшающегося внешнего магнитного поля H_a . Пример профилей $J(x)$ и $H_z(x)$ показан на рис. 17. Подчеркнем, что, в согласии с численными результатами [122], резкое изменение градиента функций $H_z(x)$ и $J(x)$ происходит только при $|x| = b_2$, т.е. на границе аморфной вихревой фазы, в то время как на границе упорядоченной фазы $|x| = b_1$ профили остаются гладкими. В интервале $b_1 < x < b_2$ существует смесь упорядоченной и аморфной вихревых фаз, и концентрации этих фаз, n_{ord} и n_{dis} , в точке x определяются током $J(x)$:

$$n_{dis}(x) = [J(x) - J_{c1}] / [J_{c2} - J_{c1}],$$

$$n_{ord}(x) = 1 - n_{dis}(x).$$

По-видимому, эту смесь можно представлять как капли или островки одной из фаз в другой с концентрацией и размером капель (островков), изменяющимися по x . Если образец не слишком тонкий, то вполне возможно, что образование неупорядоченной фазы начинается на верхней и нижней его поверхностях, и поэтому имеются два фронта $z = \pm z_{front}(x)$, разделяющих

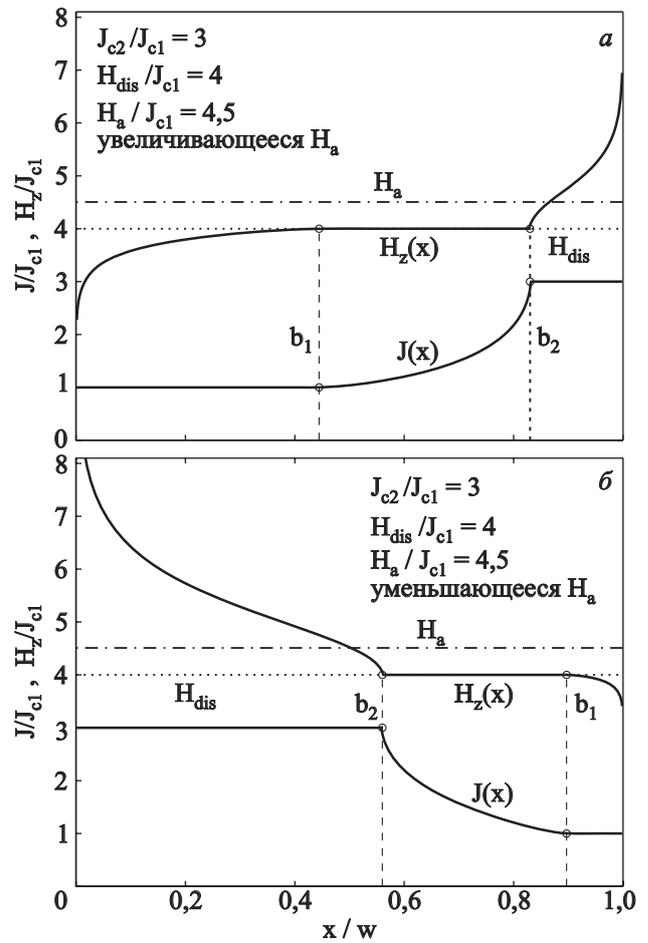


Рис. 17. Профили магнитного поля $H_z(x)$ и тока $|J(x)|$ в полосе при $J_{c2} / J_{c1} = 3$, $H_{dis} / J_{c1} = 4$ и $H_a / J_{c1} = 4,5$ для случаев увеличивающегося (а) и уменьшающегося (б) H_a [123].

фазы по толщине полосы. Тогда положения этих фронтов определяются равенством: $z_{front} = (d/2)n_{ord}(x)$. Однако в рамках используемого здесь статического подхода, который не учитывает кинетику образования вихревых фаз, невозможно выбрать между этими двумя сценариями.

Для магнитного момента полосы, рассчитанного на единицу ее длины $M_z = \int_{-w}^w xJ(x) dx$, в случае увеличивающегося H_a в [123] были получены два эквивалентных выражения:

$$M_z(H_a) = -J_{c1}b_1b_2 - J_{c2}\sqrt{w^2 - b_1^2}\sqrt{w^2 - b_2^2} = -J_{c1}w^2 \frac{b_2}{b_1}, \quad (70)$$

где границы b_1 и b_2 находятся из уравнений:

$$\frac{b_1^2}{w^2} = \frac{J_{c1}^2 b_2^2}{J_{c1}^2 b_2^2 + J_{c2}^2 (w^2 - b_2^2)}, \quad (71)$$

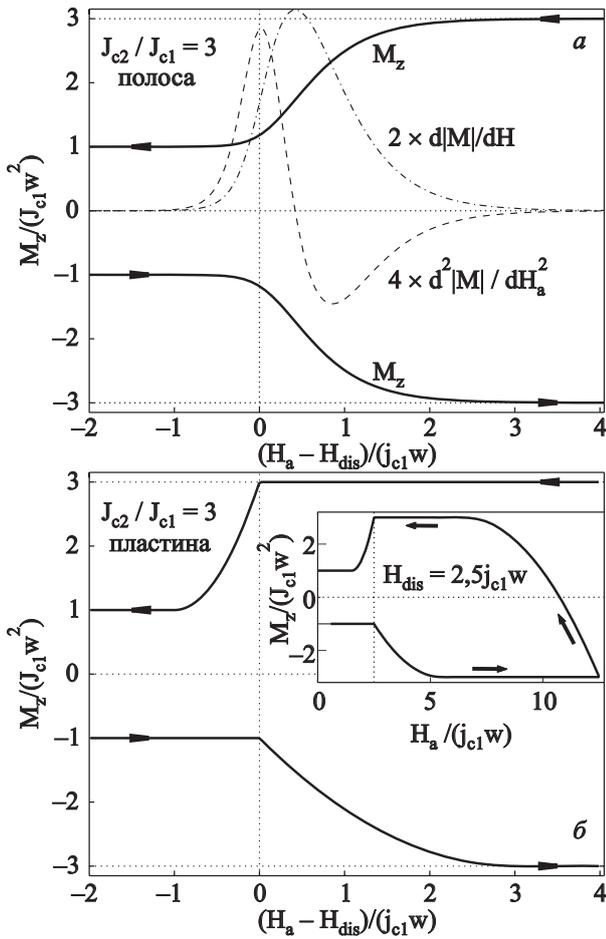


Рис. 18. Петля намагниченности (сплошные линии) для полосы в перпендикулярном магнитном поле (а) и для пластины в параллельном поле (б) при $J_{c2} / J_{c1} = 3$ [123]. Отметим разные масштабы оси H_a , что связано с сильно отличающимися полями полного проникновения магнитного потока в полосу и в пластину. Стрелки указывают направление изменения H_a . Штриховые линии показывают первую и вторую производные безразмерного магнитного момента $|M_z|$ по H_a / J_{c1} . На вставке показан пример половины петли намагниченности для пластины.

$$H_{dis} = H_a + \frac{J_{c1}}{\pi} \ln \frac{\sqrt{b_1 + b_2}}{\sqrt{b_2 - b_1}} + \frac{J_{c2}}{\pi} \ln \frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{\sqrt{w^2 - b_1^2} + \sqrt{w^2 - b_2^2}}. \quad (72)$$

Для уменьшающегося H_a магнитный момент $M_z(H_a)$ отличается только знаком. На рис. 18 показан пример петли намагниченности для сверхпроводящей полосы. Интересно, что максимум $d|M_z(H_a)|/dH_a$ находится всегда немного выше точки $H_a = H_{dis}$, в то время как положение максимума второй производной $d^2|M_z(H_a)|/dH_a^2$ практически совпадает с этой точкой. Иными словами, точка $H_a = H_{dis}$ есть, фактически, точка максимальной кривизны для кривой $|M_z(H_a)|$. Этот результат может быть полезным при анализе fishtail-эффекта или пик-эффекта в тонких плоских сверхпроводниках. Для сравнения на этом же рисунке показана петля намагниченности для бесконечной пластины толщиной $2w$, помещенной во

внешнее магнитное поле H_a , параллельное ее поверхности. В противоположность случаю полосы в перпендикулярном поле петля намагниченности для пластины в параллельном поле не симметрична относительно оси $M_z = 0$. Эта асимметрия главным образом связана с тем, что с увеличением H_a резкая граница между упорядоченной и аморфной вихревыми фазами появляется в пластине только при $H_a \geq H_{dis}$, в то время как при уменьшении поля H_a граница существует при $H_a < H_{dis}$. С другой стороны, в полосе границы b_1 и b_2 существуют и выше и ниже поля H_{dis} для увеличивающегося и уменьшающегося H_a . Все это показывает важность учета реальной геометрии эксперимента при интерпретации данных по намагниченности тонких плоских сверхпроводников в перпендикулярном магнитном поле.

Выше предполагалось, что в каждой точке образца локально устанавливается равновесное состояние вихревой решетки. Однако в работе [99] выдвинуто предположение, что из-за неоднородности поверхностного барьера вихревая решетка проникает в сверхпроводник в неупорядоченном состоянии даже при $H_a \leq H_{dis}$. Это приводит к возникновению метастабильных состояний аморфной вихревой фазы в образце, которые «отжигаются» в процессе перемещения вихрей по сверхпроводнику. Такие состояния действительно наблюдались в NbSe₂ [99] и в Bi₂Sr₂CaCu₂O₈ [120,121,124,125], и существование подобных состояний позволяет объяснить ряд эффектов в этих сверхпроводниках [99,126,127]. Таким образом, представленную в этом разделе теорию можно рассматривать только как первый шаг в описании пик-эффекта и fishtail-эффекта в сверхпроводниках второго рода. Полная теория должна учитывать возможность появления метастабильных состояний.

4.4. Определение анизотропии критической плотности тока по экспериментальным данным

Один из методов анализа пиннинга вихревых линий в тонких плоских сверхпроводниках, помещенных в перпендикулярное их плоскости магнитное поле, состоит в измерении профилей магнитного поля $H_z(x, y)$ на их верхней поверхности (см. обзор [128] и ссылки там). Профили магнитного поля измеряются либо с помощью магнитооптики [128–130], либо с помощью миниатюрных датчиков Холла [131]. К настоящему времени разработаны и успешно применяются различные процедуры, которые позволяют по этим профилям $H_z(x, y)$ восстановить пространственное распределение листового тока $J(x, y)$ (т.е. плотности тока, проинтегрированной по толщине образца) [128,132–139]. В частности, если образец представляет собой тонкую длинную сверхпроводящую полосу, уравнение (53) может быть обращено в явном виде [132], и в результате имеем следующее выражение для $J(x)$ через $H_z(x)$:

$$J(x) = 2\pi \int_{-w}^w \frac{H_z(v) - H_{az}}{v-x} \left(\frac{w^2 - v^2}{w^2 - x^2} \right)^{1/2} dv. \quad (73)$$

Исключая x и y из $H_z(x, y)$ и $J(x, y)$ (в области, в которой H_z изменяется при изменении внешнего магнитного поля), можно найти также функцию $J_c(H_z)$ из экспериментальных данных. Таким образом, проблема восстановления критической плотности тока $j_{c\perp}(\mathbf{H})$ из экспериментальных профилей $H_z(x, y)$ фактически сводится к определению этой плотности по листовому току $J_c(H_z)$, который задается соотношением (27). Подчеркнем, что $j_{c\perp} = J_c / d$ только в простейшем случае $J_c(H_z) = \text{const}$.

Критическая плотность тока $j_{c\perp}$ может быть непосредственно восстановлена по зависимости $J_c(H_z)$, если последняя определяется главным образом угловой зависимостью этой плотности, а зависимостью $j_{c\perp}$ от абсолютной величины магнитного поля H можно пренебречь, т.е. если $j_{c\perp}(\theta, H) \approx j_{c\perp}(\theta)$ [52,140]. Действительно, в этом случае дифференцирование выражения (27) по H_z дает

$$j_{c\perp}(\theta)d = J(H_z) - H_z \frac{dJ(H_z)}{dH_z},$$

$$\text{tg } \theta = \frac{J(H_z)}{2H_z}. \quad (74)$$

По сути, формулы (74) есть параметрическая запись функции $j_{c\perp}(\theta)$, в которой H_z играет роль параметра. Эта функция приводит к заданной зависимости $J(H_z)$ согласно уравнению (27).

В качестве примера рассмотрим экспериментальные данные работы [139]. В этой работе профили магнитного поля были измерены на поверхности пленки $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$, которая была облучена тяжелыми ионами перпендикулярно ее поверхности. По профилям магнитного поля в этой работе были восстановлены профили тока $J(x, y)$, а затем, исключая x и y из $H_z(x, y)$ и $J(x, y)$, была получена и зависимость $J_c(H_z)$ (рис. 19). Оказалось, что в пленке до облучения ток $J_c(H_z)$ практически не зависел от H_z , а после облучения экспериментальные данные работы [139] достаточно хорошо аппроксимировались зависимостью [140]:

$$J_c(H_z) = j_c(0)d \left[1 + p \exp\left(-\frac{qH_z}{H_{cr}}\right) \right], \quad (75)$$

где $H_{cr} = j_c(0)d/2 \approx 500$ Э, а $p \approx -0,45$ и $q \approx 3$ — безразмерные постоянные (см. рис. 19). Поскольку толщина пленки была $d \approx 0,4$ мкм, находим, что $j_c(0) \approx 2 \cdot 10^7$ А/см².

Если предположить, что полученная в [139] функция $J_c(H_z)$ определяется главным образом угловой зависимостью критической плотности тока, т.е., что $j_{c\perp}(\theta, H) \approx j_{c\perp}(\theta)$, и использовать формулы (74), на-

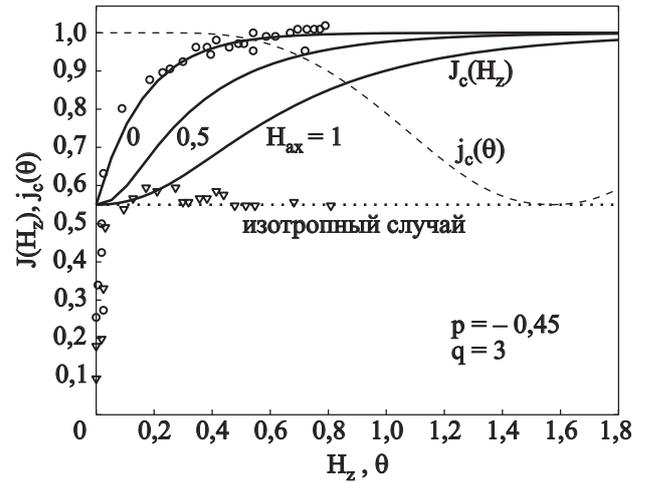


Рис. 19. Экспериментальные зависимости $J_c(H_z)$ в пленке $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ с протяженными дефектами вдоль оси c (○) и без них (△) [139]. Сплошная линия с $H_{ax} = 0$ показывает зависимость (75) с $p = -0,45$, $q = 3$, а штриховая линия дает соответствующую угловую зависимость критической плотности тока $j_{c\perp}(\theta)$, формула (76) [140]. Пунктирная линия показывает $j_{c\perp}(\theta)$ в случае изотропного пиннинга с $j_{c\perp}(\theta) = j_{c\perp}(\pi/2)$. Плотность тока измеряется в единицах $j_c(0)$, а J_c и H_z в единицах $j_c(0)d$. Остальные сплошные кривые дают рассчитанные зависимости $J_c(H_z)$ в наклонном магнитном поле с $H_{ax} = 0,5, 1$ (см. разд. 5).

ходим следующую $j_{c\perp}(\theta)$, которая соответствует функции (75) [140]:

$$j_{c\perp}(\theta) = j_c(0) [1 + p(1 + qt) \exp(-qt)],$$

$$\text{tg } \theta = t^{-1} [1 + p \exp(-qt)], \quad (76)$$

где $t = H_z / H_{cr}$. Эта зависимость $j_{c\perp}(\theta)$ также представлена на рис. 19. Согласно (76), параметр $j_c(0)$ есть критическая плотность тока при $\theta = 0$, а $(1 + p)j_c(0)$ совпадает с $j_{c\perp}(\theta = \pi/2)$. Поскольку пиннинг протяженными дефектами не эффективен при $\theta = \pi/2$, величина $j_{c\perp}(\pi/2)$ соответствует критической плотности тока в той же самой пленке без протяженных дефектов, т.е. до ее облучения (рис. 19). В заключение отметим, что для проверки использованного выше предположения $j_{c\perp}(\theta, H) \approx j_{c\perp}(\theta)$ было бы полезно измерить профили магнитного поля в наклонных магнитных полях, поскольку такие профили могут быть рассчитаны по найденной $j_{c\perp}(\theta)$ (см. [140,141], а также следующий раздел).

5. Критические состояния в тонкой сверхпроводящей полосе в наклонном магнитном поле

В различных экспериментах часто встречается ситуация, когда сверхпроводник II рода в форме тонкой пластинки помещен в магнитное поле, направленное под некоторым углом к ее плоскости (см., например,

работы [39–43,55,142–145]). Однако даже для сверхпроводника простейшей формы — бесконечно длинной полосы критическое состояние в наклонном внешнем магнитном поле теоретически исследовано только при условии, что величина поля H_a значительно превышает поле полного проникновения магнитного потока в образец H_p [145]. В области же сравнительно небольших полей $H_a \leq H_p$ надежные результаты отсутствовали. Ясно, что изучение критических состояний в этой области магнитных полей расширило бы возможности метода, в котором критическая плотность тока определяется по профилям магнитного поля на верхней поверхности плоского образца, разд. 4.4. В дальнейшем ограничимся рассмотрением критического состояния в тонкой и бесконечно длинной сверхпроводящей полосе, которая заполняет пространство $|x| \leq w$, $|y| < \infty$, $|z| \leq d/2$ с $d \ll w$. Как и ранее, предполагаем, что толщина полосы d превышает лондоновскую глубину проникновения, а нижнее критическое поле H_{c1} достаточно мало, так что мы можем считать $B = \mu_0 H$. Кроме того, рассматриваем только трехмерные анизотропные сверхпроводники, оставляя в стороне явно выраженные слоистые материалы, в которых длина когерентности поперек слоев меньше расстояния между ними.

При анализе критического состояния следует различать две ситуации. В первой из них магнитное поле наклоняется в плоскости xz , т.е. перпендикулярно циркулирующим в полосе токам. В этом случае при любом угле наклона θ внешнего поля к оси z во всех точках образца магнитные поля и токи перпендикулярны друг другу, и в полосе имеют место биновские критические состояния. Во второй ситуации поле наклоняется вдоль циркулирующих токов, т.е. в плоскости yz , и в этом случае в полосе осуществляются критические Т-состояния. Кроме того, критические состояния, даже в биновском случае, зависят от того в какой последовательности прикладываются к образцу различные компоненты внешнего магнитного поля. Далее предполагаем, что внешнее поле H_a монотонно увеличивается, и будем рассматривать три сценария его включения. В первом сценарии H_a увеличивается при постоянном угле наклона θ ; во втором сначала включается его z -компонента H_{az} , а уже затем компонента внешнего магнитного поля в плоскости полосы; в третьем сценарии последовательность включения компонент противоположная. При этом подразумевается, что во всех сценариях конечный вектор \mathbf{H}_a один и тот же.

5.1. Биновские критические состояния

Начнем со случая, когда постоянное и однородное внешнее магнитное поле H_a приложено под углом θ к оси z в плоскости xz ($H_{ax} = H_a \sin \theta$, $H_{ay} = 0$, $H_{az} = H_a \cos \theta$), и пусть плотность критического тока $j_{c\perp}$ не зависит ни от величины, ни от направления

локального магнитного поля \mathbf{H} [146]. Как и в разд. 2.2, малость параметра d/w позволяет расщепить проблему двумерного критического состояния в полосе конечной толщины на две более простые задачи: одномерную задачу поперек толщины образца и задачу для бесконечно тонкой полосы. Решение проблемы критического состояния для бесконечно тонкой полосы хорошо известно [4–6] (см. формулы (5)–(7)). При решении проблемы критического состояния поперек толщины рассматриваем небольшой участок полосы вокруг произвольной точки x как «бесконечную» пластину толщиной d , помещенную в параллельное ее поверхности постоянное магнитное поле H_{ax} и несущую ток $J(x)$, задаваемый формулой (5). Критическое состояние в такой пластине детально изучено [5,6], и это позволяет найти распределения магнитных полей и токов по толщине полосы. Так как критическое состояние в пластине, вообще говоря, зависит от того, в какой последовательности были приложены к образцу магнитное поле H_{ax} и ток J , появляется упомянутая выше зависимость критического состояния в полосе от истории включения полей H_{ax} и H_{az} . Анализ, проведенный в работе [146], показал, что различия в критических состояниях для разных сценариев включения магнитного поля имеют место только в центральной части полосы ($|x| < b$), в которую не проникает перпендикулярная плоскости полосы компонента магнитного поля H_z (в частности, свободное от вихрей ядро, существующее при $|x| < b$, асимметрично, и его форма зависит от последовательности включения H_{ax} и H_{az}). Однако это различие практически не проявляется в профилях магнитного поля $H_z(x)$ на ее верхней поверхности, которые зависят только от H_{az} , но не от H_{ax} . Различие в критических состояниях обнаруживает себя лишь в небольшом изменении компоненты магнитного момента полосы M_x , параллельной ее плоскости [146]. Следовательно, при постоянном $j_{c\perp}$ измерение $H_z(x)$ в наклонном внешнем магнитном поле не несет какой-либо новой информации по сравнению со случаем $H_{ax} = 0$.

Однако ситуация существенно изменяется, когда критическая плотность тока $j_{c\perp}$ зависит от \mathbf{H} , например от $|H|$ или от угла θ между локальным направлением \mathbf{H} и осью z [147]. В этом случае $j_{c\perp}$ не постоянна по толщине полосы, поскольку \mathbf{H} , а значит, и $j_{c\perp}$ изменяются с изменением z , и критическое значение листового тока J_c не сводится к $j_{c\perp} d$. Необходимая для описания критического состояния функция $J_c(H_z)$ теперь находится из уравнения, которое получается непосредственным обобщением формулы (27),

$$d = \int_{H_x^-}^{H_x^+} \frac{dh}{j_{c\perp}(h, H_z)}. \quad (77)$$

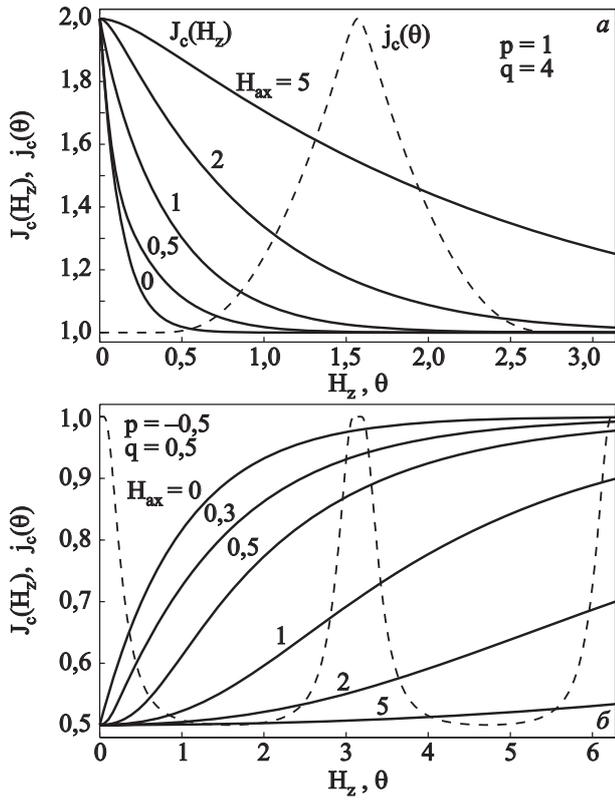


Рис. 20. Зависимости $j_{c\perp}(\theta)$ (штриховые линии), формулы (76), для $p=1$, $q=4$ ((а) максимум $j_{c\perp}$ при $\theta = \pi/2$) и для $p=-0,5$, $q=0,5$ ((б) максимум $j_{c\perp}$ при $\theta = 0$) [147]. Сплошные линии показывают соответствующие $J_c(H_z, H_{ax})$ при $H_{ax} = 0, 0,3, 0,5, 1, 2, 5$. $j_{c\perp}$ измеряется в единицах $j_c(0)$, а J_c и H_z в $j_c(0)d$.

Здесь $H_x^- = H_{ax} - 0,5J_c(H_z)$ и $H_x^+ = H_{ax} + 0,5J_c(H_z)$ — x -компоненты магнитного поля на нижней и верхней поверхностях полосы. Только в рамках модели, в которой $j_{c\perp}$ не зависит от \mathbf{H} , уравнение (77) дает $J_c = j_{c\perp}d$ при любом H_{ax} . В общем же случае функция $J_c(H_z)$ зависит также от параметра H_{ax} , т.е. $J_c = J_c(H_z, H_{ax})$. В такой ситуации критическое состояние зависит от сценария включения внешнего магнитного поля не только в той части полосы $|x| < b$, где существует свободное от вихрей ядро, но и в области, в которой компонента H_z отлична от нуля.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $J_c(H_z)$ при $H_{ax} = 0$ описывается функцией (75), в которой $j_c(0)$, p и q — некоторые постоянные параметры [$j_c(0)$, $q > 0$, а p может иметь любой знак]. Этой функции $J_c(H_z)$ соответствует критическая плотность тока (76), которая зависит только от угла θ между локальным направлением \mathbf{H} и осью z , $j_{c\perp} = j_{c\perp}(\theta)$. Угловая зависимость этой критической плотности тока и рассчитанные по формуле (77) функции $J_c(H_z, H_{ax})$ показаны на рис. 20. Используя функции $J_c(H_z, H_{ax})$, проанализируем профили $H_z(x)$ для различных типов анизотропии пиннинга и для различных сценариев включения внешнего магнитного поля H_a [147].

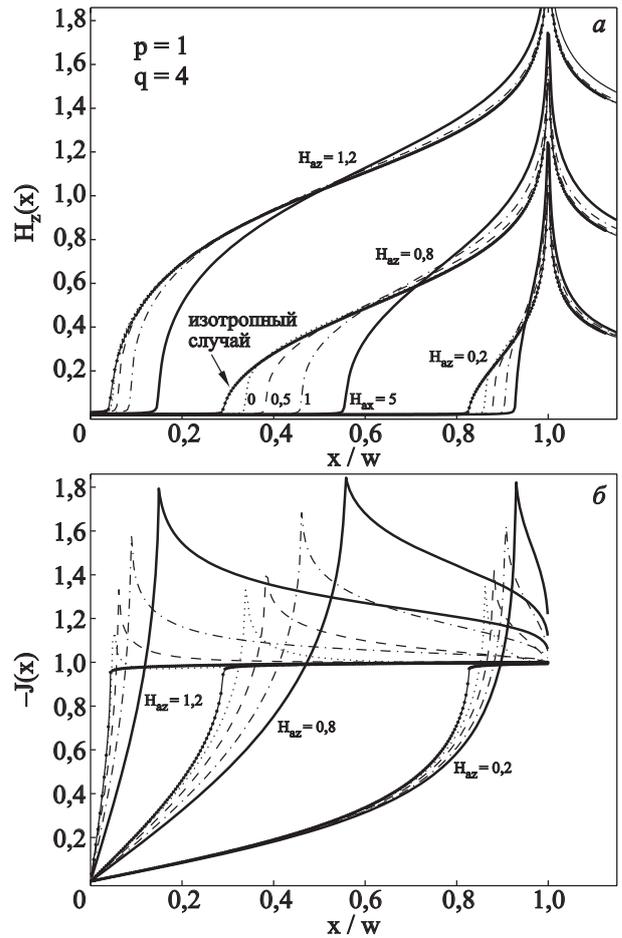


Рис. 21. Профили $H_z(x)$ (а) и тока $J(x)$ (б) в полосе, для которой $j_{c\perp}(\theta)$ описывается (76) с $p=1$, $q=4$ [147]. Сначала включается H_{ax} , а затем H_{az} (третий сценарий). $H_{az} = 0,2, 0,6, 1,2$. Магнитные поля и J в единицах $j_c(0)d$. Пунктирные, штриховые, штрих-пунктирные и сплошные линии показывают $H_{ax} = 0, 0,5, 1$ и 2 соответственно. Для сравнения сплошные линии с точками указывают профили в изотропном случае ($p = 0$). Пунктирные линии также отвечают второму сценарию включения поля.

В случае $p > 0$ начнем анализ с третьего сценария, когда компонента H_{ax} включается до H_{az} . Соответствующие профили $H_z(x)$ и тока $J(x)$ показаны на рис. 21. Отметим, что для третьего сценария $|J(x)| = J_c$ в любой точке x , в которой $H_z(x) \neq 0$, и глубина проникновения H_z в полосу зависит от H_{ax} . Иная ситуация имеет место, когда H_{ax} и H_{az} включаются в противоположном порядке (второй сценарий). После включения H_{az} профили магнитного поля показаны пунктирными линиями на рис. 21. Последующее увеличение H_{ax} не изменяет ни $J(x)$, ни $H_z(x)$. Действительно, как видно на рис. 20, $J_c(H_z)$ увеличивается с ростом H_{ax} . Следовательно, если бы ток $J(x)$ был равен своему критическому значению $J_c[H_z(x)]$, глубина проникновения компоненты H_z должна была бы уменьшиться по сравнению со случаем, показанным пунктирными линиями на рис. 21, и вихревые линии возле точек обращения H_z в нуль

должны были бы двигаться против силы Лоренца, направленной к центру полосы, что невозможно. Таким образом, для второго сценария ток $J(x)$ меньше своего критического значения для всех x . Это означает, что, хотя поперек толщины полосы в ее областях с ненулевым H_z реализуется критическое состояние, в котором плотность тока $j_y(x, z)$ равна критическому значению, существует граница $z = z_c(x)$, на которой эта плотность тока изменяет знак, и поэтому величина $|J|$ меньше, чем J_c [147]. Наконец, для первого сценария включения H_a , при котором H_{az} и H_{ax} увеличиваются одновременно, профили $H_z(x)$ для тех же самых значений H_{az} и H_{ax} совпадают с профилями для третьего сценария, показанными на рис. 21.

Рассмотрим теперь случай $p < 0$ в формулах (76), рис. 20. Этот случай описывает пиннинг протяженными дефектами, введенными в полосу перпендикулярно ее плоскости, разд. 4.4. На рис. 22 показаны соответствующие профили $H_z(x)$ и $J(x)$. Отметим, что эти профили совпадают для всех трех сценариев включения H_a . Однако вид профилей и глубина проникновения H_z в полосу зависят от H_{ax} . Когда H_{ax} увеличивается, профили стремятся к тем, что имеют место в сверхпроводнике с изотропным пиннингом, в котором $j_{c\perp}(\theta) = j_{c\perp}(\pi/2)$ (т.е. в образце без протяженных дефектов). Изменение профилей происходит в довольно узком интервале H_{ax} . Этот результат можно понять из следующих простых соображений. Когда H_{ax} увеличивается, средний угол наклона вихревых линий в образце H_{ax}/H_z также растет. Когда этот наклон превышает характерную ширину пика в $j_{c\perp}(\theta)$ на рис. 20, пиннинг в основном определяется $j_{c\perp}(\pi/2)$, а область пика становится неэффективной. Отметим также, что профили, представленные на рис. 22, указывают на «более медленное» проникновение внешнего поля в образец (т.е. на меньшие глубины проникновения H_z) после введения в него протяженных дефектов. Это находится в согласии с экспериментальными результатами работы [139].

Результаты этого раздела показывают, что измерение распределения магнитного поля H_z по поверхности сверхпроводящей пластины во внешнем наклонном магнитном поле расширяет возможности метода определения критической плотности тока $j_{c\perp}(\mathbf{H})$ по таким экспериментальным данным. Подчеркнем, что, поскольку профили поля H_z в наклонном магнитном поле определяются функцией двух переменных $J_c(H_z, H_{ax})$, эти профили, в принципе, дают возможность найти критическую плотность тока $j_{c\perp}(\theta, |H|)$, которая в общем случае также зависит от двух переменных. В частности, для экспериментальных данных работы [139] функции $J_c(H_z, H_{ax})$ представлены на рис. 19. Это открывает возможность проверить зависимость $j_{c\perp}(\theta)$, извлеченную из этих данных и представленную на этом же рисунке*. Следует также отме-

* Эксперименты в наклонном магнитном поле в [139] не проводились.

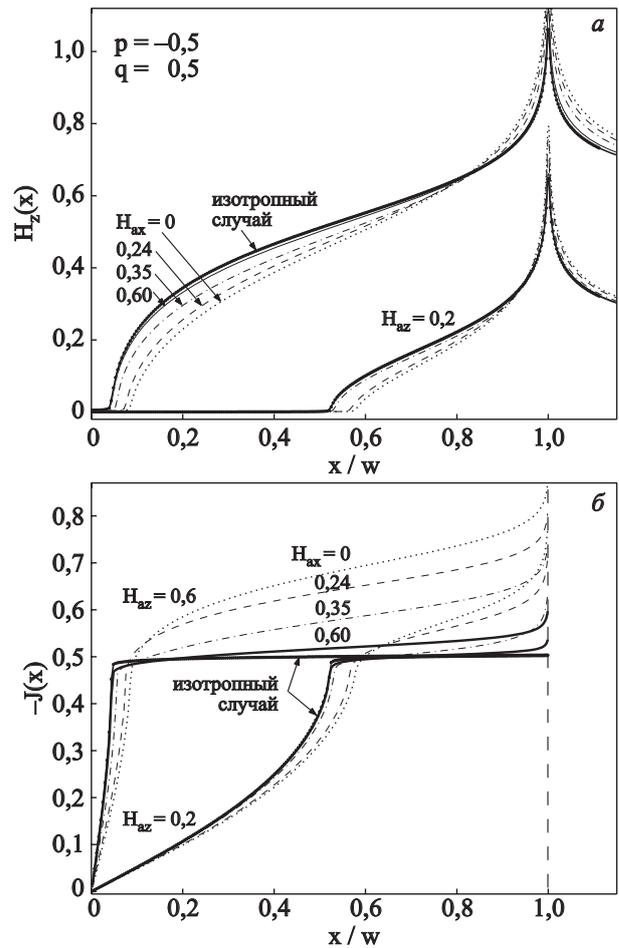


Рис. 22. Профили $H_z(x)$ (а) и тока $J(x)$ (б) в полосе с анизотропным пиннингом, который описывается (76) с $p = -0,5$, $q = 0,5$ [147] (см. рис. 20). Здесь $H_{az} = 0,2, 0,6$; пунктирные, штриховые, штрих-пунктирные и сплошные линии соответствуют $H_{ax} = 0, 0,24, 0,35$ и $0,6$ соответственно. Магнитные поля и J в единицах $j_c(0)d$. При любом $H_{ax} > 0,6$ профили практически совпадают с теми, что для $H_{ax} = 0,6$, а при $H_{ax} < 0,2$ они близки к тем, что при $H_{ax} = 0$. Профили при $H_{ax} = 0,6$ также почти совпадают с профилями для изотропного пиннинга с $j_{c\perp}(\theta) = j_{c\perp}(\pi/2)$ (сплошные линии с точками). Профили $H_z(x)$ и $J(x)$ одинаковы для всех трех сценариев включения H_a .

тить, что при экспериментальном изучении профилей H_z во внешнем наклонном магнитном поле с помощью магнитооптики на результаты измерений оказывает влияние компонента поля, параллельная плоскости пластины, и это обстоятельство необходимо учитывать при обработке экспериментальных данных [136].

В заключение укажем еще на один эффект. Если пиннинг вихревых линий в сверхпроводнике является анизотропным, в наклонном поле появляется асимметрия распределения токов по толщине образца, а это, в свою очередь, приводит к небольшой асимметрии профилей $H_z(x)$ на верхней поверхности полосы [56]. В работе [148] для разных сценариев включения на-

клонного внешнего магнитного поля было продемонстрировано хорошее согласие теоретических и экспериментальных результатов для этой асимметрии профилей поля на поверхности Nb_3Sn пластины.

5.2. Критические T -состояния с постоянным $j_{c\perp}$

Рассмотрим теперь случай, когда внешнее магнитное поле, приложенное к бесконечно длинной полосе, наклоняется вдоль ее оси, т.е. в плоскости yz [45]. Иными словами, рассмотрим ситуацию, когда сначала включается компонента H_{az} , а затем в момент времени $t = 0$ к полосе прикладывается поле H_{ay} . В этом случае в образце при $t > 0$ будут осуществляться критические T -состояния, поскольку H_{ay} направлено вдоль токов, которые генерируются в биновском критическом состоянии полосы, возникшем после включения H_{az} . Для простоты предполагаем далее, что критическая плотность токов $j_{c\perp}$ постоянна (не зависит от \mathbf{H}), и пусть H_{az} значительно превышает $J_c = j_{c\perp}d$, так что в начальный момент времени $t = 0$ полоса находится в биновском критическом состоянии, в котором компонента H_z полностью проникла в образец. В этом состоянии листовый ток J_y имеет вид: $J_y(x) = J_c$ при $-w \leq x < 0$ и $J_y(x) = -J_c$ при $w \geq x > 0$.

Как и в предыдущих разделах, при решении проблемы критического состояния в полосе используем процедуру расщепления, сводя эту проблему к решению соответствующей одномерной задачи по толщине образца и к проблеме для бесконечно тонкой полосы. Решение одномерной проблемы дает следующие выражения для компонент электрического поля E_x и E_y [45]:

$$E_x = -\mu_0 \dot{H}_{ay} z, \tag{78}$$

$$E_y = \frac{\mu_0 \dot{H}_{ay} d}{2} \cos \theta g(J \cos \theta / J_c), \tag{79}$$

где функция $g(u)$ определяется соотношением $u(g) = g \operatorname{arsinh}(1/g)$, а угол θ задает наклон локального магнитного поля к оси z . Поле E_x обусловлено наклоном вихрей вдоль y , когда H_{ay} прикладывается к сверхпроводящей полосе. Отметим, что $\int_{-d/2}^{d/2} E_x(z) dz = 0$, так как верхняя ($z > 0$) и нижняя ($z < 0$) части вихревой линии смещаются в противоположных направлениях при ее наклоне. С другой стороны, E_y не зависит от z . Эта компонента электрического поля происходит от дрейфа вихря как целого в x направлении, когда H_{ay} прикладывается к образцу. Ситуация практически совпадает с той, что имела место при рассмотрении продольного эффекта встряхивания в полосе (см. раздел 3.1.2). Различие состоит в том, что теперь магнитное поле H_{ay} увеличивается монотонно, а не осциллирует вокруг $H_{ay} = 0$, и в дан-

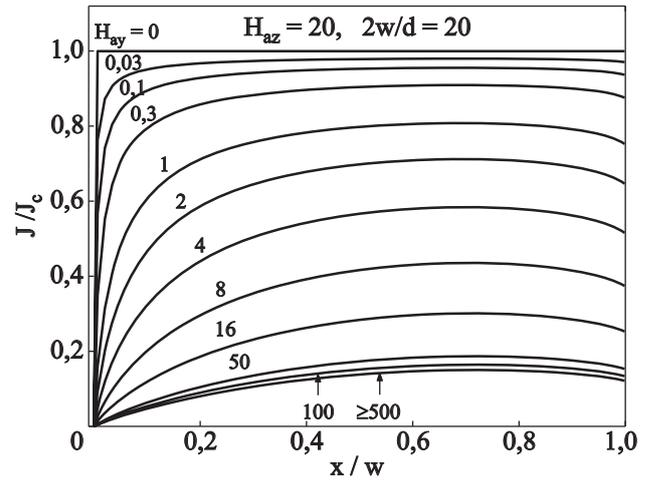


Рис. 23. Ток $J(x) \equiv |J_y(x)|$ в полосе с $2w/d = 20$ и $H_{az} = 20$ при различных увеличивающихся значениях H_{ay} [45]. Магнитные поля в единицах $J_c = j_{c\perp}d$.

ном случае допускаются достаточно большие, даже по сравнению с H_{az} , значения H_{ay} .

Используя (79), в работе [45] были рассчитаны профили $J(x, H_{ay}) \equiv |J_y(x, H_{ay})|$, которые осуществляются в полосе в процессе увеличения H_{ay} , т.е. по мере наклона приложенного магнитного поля в направлении ее оси. Эти профили показаны на рис. 23. Их форма похожа на форму профилей в продольном эффекте встряхивания, и их амплитуда тоже уменьшается с ростом H_{ay} . Однако в отличие от эффекта встряхивания, эта амплитуда не падает до нуля, а стремится к конечному пределу, который, как оказывается, зависит только от параметра $P = (d/2w)(H_{az}/J_c)$ [45]. Таким образом, при $H_{ay} \gg H_{az}$ пространственные распределения $J(x, H_{ay})$ [а значит, и $H_z(x, H_{ay})$] достигают ненулевых предельных профилей. Другими словами, с ростом H_{ay} скорость затухания токов J уменьшается так резко, что эти токи не достигают нуля даже в пределе $H_{ay} \rightarrow \infty$. Однако надо иметь в виду, что условие (18), обеспечивающее отсутствие пересечения вихревых линий, в данном случае сводится к неравенству [45]

$$\operatorname{tg} \theta \approx \frac{H_{ay}}{H_{az}} < \frac{j_{c\parallel}}{j_{c\perp}}, \tag{80}$$

которое и накладывает ограничение на H_{ay} сверху для применимости полученного результата.

На рис. 24 показан магнитный момент полосы M_z , рассчитанный на единицу ее длины в критических T -состояниях, развивающихся в процессе увеличения H_{ay} . В начальный момент времени, когда осуществляется биновское критическое состояние, $M_z(0) = -J_c w^2$. Увеличение H_{ay} приводит к релаксации M_z . При этом нормированный магнитный момент $M_z(H_{ay})/M_z(0)$ зависит только от H_{ay}/H_{az} и пара-

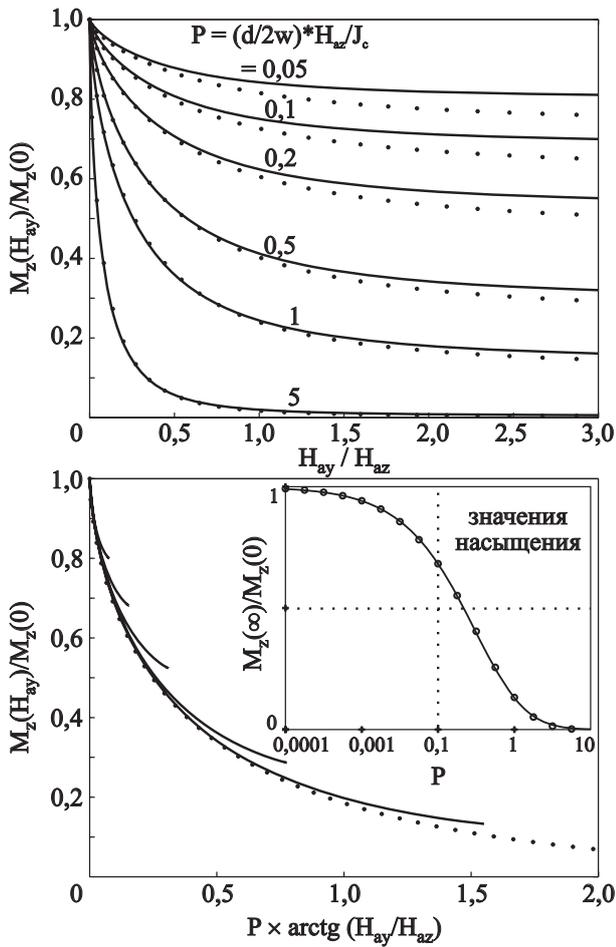


Рис. 24. Магнитный момент полосы M_z как функция H_{ay} / H_{az} (вверху) и как функция $P \arctg (H_{ay} / H_{az})$ (внизу) для $P \equiv (d / 2w) H_{az} / J_c = 0,05, 0,1, 0,2, 0,5, 1, 5$ [45]. Точки показывают аппроксимацию (81). На вставке показана зависимость $M_z(\infty)$ от P (сплошная линия с кружками).

метра P , и этот магнитный момент достаточно хорошо аппроксимируется функцией [45]:

$$\frac{M_z(H_{ay})}{M_z(0)} \approx \exp \{-1,67 [P \arctg (H_{ay} / H_{az})]^{0,65}\}. \quad (81)$$

Интересно, что при $H_{ay} \ll H_{az}$ эта функция согласуется с выражением (44), если положить $H_{ay} = (\omega t / \pi) h$, а в (44) использовать значения $p = 1,68$ и $q = 0,64$, характерные для продольного эффекта встряхивания. Значения насыщения магнитного момента $M_z(\infty) / M_z(0)$ определяются вышеупомянутыми предельными профилями тока и зависят от единственного параметра $P = (d / 2w) H_{az} / J_c$ (см. рис. 24).

Когда включается поле H_{ay} , не только изменяется компонента магнитного момента M_z , но также появляется магнитный момент вдоль оси полосы M_y . Появление (и рост) компоненты магнитного момента M_y с увеличением наклона внешнего магнитного поля связано с переориентацией циркулирующих в образце токов. При такой переориентации возникают токи, текущие в плоскости xz . Однако, как отмечено выше,

токи, циркулирующие в плоскости xz , и порожденная ими компонента M_z , вообще говоря, не затухают до нуля, по крайней мере, пока не начнется пересечение вихревых линий в образце. Таким образом, распределение токов по образцу становится весьма сложным при, казалось бы, очень простой геометрии эксперимента.

Представленные выше результаты для релаксации $J(x, H_{ay})$ [а значит, и $H_z(x, H_{ay})$] к предельным профилям и магнитного момента $M_z(H_{ay})$ к его предельным значениям могут быть проверены в экспериментах, которые подобны тем, что выполнены в работах [142,143]. Однако в отличие от работ [142,143] магнитное поле H_{az} должно включаться до H_{ay} . Это гарантирует отсутствие пересечения вихревых линий при не слишком больших значениях H_{ay} . Если же подобно экспериментам [142,143] поле H_{ay} включается до H_{az} , то в образце будут реализовываться совершенно иные критические состояния, которые до сих пор теоретически не изучены.

1. C.P. Bean, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 250 (1962).
2. A.M. Campbell and J.E. Evetts, *Adv. Phys.* **50**, 1249 (2001).
3. E.H. Brandt, *Rep. Progr. Phys.* **58**, 1465 (1995).
4. E.H. Brandt, M.V. Indenbom, and A. Forkl, *Europhys. Lett.* **22**, 735 (1993).
5. E.H. Brandt and M.V. Indenbom, *Phys. Rev.* **B48**, 12893 (1993).
6. E. Zeldov, J.R. Clem, M. McElfresh, and M. Darwin, *Phys. Rev.* **B49**, 9802 (1994).
7. P.N. Mikheenko and Yu.E. Kuzovlev, *Physica C* **204**, 229 (1993).
8. C.Y. Pang, A.M. Campbell, and P.G. MacLaren, *IEEE Trans. Magn.* **17**, 134 (1981).
9. L. Prigozhin, *J. Comput. Phys.* **129**, 190 (1996).
10. L. Prigozhin, *J. Comput. Phys.* **144**, 180 (1998).
11. Ph. Vanderbemden, Z. Hong, T.A. Coombs, S. Denis, M. Ausloos, J. Schwartz, I.B. Rutel, N. Hari Babu, D.A. Cardwell, and A.M. Campbell, *Phys. Rev.* **B75**, 174515 (2007).
12. Ph. Vanderbemden, Z. Hong, T.A. Coombs, M. Ausloos, N. Hari Babu, D.A. Cardwell, and A.M. Campbell, *Supercond. Sci. Technol.* **20**, 174 (2007).
13. J.R. Clem, *Phys. Rev.* **B26**, 2463 (1982).
14. J.R. Clem, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1425 (1977).
15. E.H. Brandt, *J. Low Temp. Phys.* **44**, 33 (1981).
16. J.R. Clem and A. Perez Gonzalez, *Phys. Rev.* **B30**, 5041 (1984).
17. A. Perez Gonzalez and J.R. Clem, *Phys. Rev.* **B31**, 7048 (1985).
18. R. Boyer and M.A.R. LeBlanc, *Solid State Commun.* **24**, 261 (1977).
19. R. Boyer, G. Fillion, and M.A.R. LeBlanc, *J. Appl. Phys.* **51**, 1692 (1980).
20. F. Perez-Rodriguez, A. Perez-Gonzalez, J.R. Clem, G. Gandolfini, and M.A.R. LeBlanc, *Phys. Rev.* **B56**, 3473 (1997).

21. M.A.R. LeBlanc, D. LeBlanc, A. Golebiowski, and G. Fillion, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3309 (1991).
22. И.Ф. Волошин, А.В. Калинов, С.Е. Савельев, Л.М. Фишер, В.А. Ямпольский, Ф. Перес Родригес, *ЖЭТФ* **111**, 1071 (1997).
23. С.Е. Савельев, Л.М. Фишер, В.А. Ямпольский, *ЖЭТФ* **112**, 936 (1997).
24. L.M. Fisher, A.V. Kalinov, S.E. Savel'ev, I.F. Voloshin, V.A. Yampol'skii, M.A.R. LeBlanc, and S. Hirscher, *Physica C* **278**, 169 (1997).
25. L.M. Fisher, A.V. Kalinov, I.F. Voloshin, I.V. Baltaga, K.V. Il'enko, and V.A. Yampol'skii, *Solid State Commun.* **97**, 833 (1996).
26. L.M. Fisher, K.V. Il'enko, A.V. Kalinov, M.A.R. LeBlanc, F. Perez-Rodriguez, S.E. Savel'ev, I.F. Voloshin, and V.A. Yampol'skii, *Phys. Rev.* **B61**, 15382 (2000).
27. J. Gilchrist, *Supercond. Sci. Technol.* **7**, 849 (1994).
28. Y. Yeshurun, A.P. Malozemff, and A. Shaulov, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 911 (1996).
29. I.M. Babich and G.P. Mikitik, *Phys. Rev.* **B48**, 1303 (1993).
30. I.M. Babich and G.P. Mikitik, *Phys. Rev.* **B54**, 6576 (1996).
31. I.M. Babich, G.P. Mikitik, and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B66**, 014520 (2002).
32. I.M. Babich, G.P. Mikitik, and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B68**, 052509 (2003).
33. I.M. Babich, G.P. Mikitik, and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B70**, 174508 (2004).
34. E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B49**, 9024 (1994).
35. E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B54**, 4246 (1996).
36. E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B64**, 024505 (2001).
37. L.W. Conner, A.P. Malozemoff, and I.A. Campbell, *Phys. Rev.* **B44**, 403 (1991).
38. B. Roas, L. Schultz, and G. Saemann-Ischenko, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 479 (1990).
39. B. Holzapfel, G. Kreiselmeyer, M. Kraus, S. Bouffard, S. Klaumünzer, L. Schultz, and G. Saemann-Ischenko, *Phys. Rev.* **B48**, 600 (1993).
40. V.F. Solovjov, V.M. Pan, and H.C. Freyhard, *Phys. Rev.* **B50**, 13724 (1994).
41. М.А. Оболенский, А.В. Бондаренко, В.А. Шкловский, М. Эль-Сидави, Р.В. Вовк, А.В. Самойлов, Д. Ниархос, М. Писсас, Г. Каллиас, А.Г. Сиваков, *ФНТ* **21**, 1200 (1995) [*Low Temp. Phys.* **21**, 917 (1995)].
42. И.Ф. Волошин, А.В. Калинов, К.И. Кугель, А.Л. Рахманов, Л.М. Фишер, *ЖЭТФ* **111**, 2158 (1997).
43. V. Pan, Y. Cherpak, V. Komashko, S. Pozigun, C. Tretiachenko, A. Semenov, E. Pashitskii, and A.V. Pan, *Phys. Rev.* **B73**, 054508 (2006).
44. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B71**, 012510 (2005).
45. E.H. Brandt and G.P. Mikitik, *Phys. Rev.* **B76**, 064526 (2007).
46. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
47. J. Bardeen and M.J. Stephen, *Phys. Rev.* **140**, 1197 (1965).
48. Ch. Jooss and V. Born, *Phys. Rev.* **B73**, 094508 (2006).
49. C. Romero-Salazar and F. Perez-Rodriguez, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 5256 (2003).
50. C. Romero-Salazar and F. Perez-Rodriguez, *Physica C* **404**, 317 (2004).
51. V.A. Shklovskij, *Fiz. Nizk. Temp.* **25**, 153 (1999) [*Low Temp. Phys.* **25**, 109 (1999)].
52. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B62**, 6800 (2000).
53. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B79**, 020506(R) (2009).
54. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B60**, 592 (2000).
55. K. Itaka, T. Shibauchi, M. Yasugaki, T. Tamegai, and S. Okayasu, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5144 (2001).
56. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B72**, 064506 (2005).
57. M. Willemin, C. Rossel, J. Hofer, H. Keller, A. Erb, and E. Walker, *Phys. Rev.* **B58**, 5940 (1998).
58. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B69**, 134521 (2004).
59. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 027002 (2002).
60. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B67**, 104511 (2003).
61. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B64**, 092502 (2001).
62. M. Willemin, A. Schilling, H. Keller, C. Rossel, J. Hofer, U. Welp, W.K. Kwok, R.J. Olsson, and G.W. Crabtree, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4236 (1998).
63. N. Avraham, B. Khaykovich, Yu. Myasoedov, M. Rappaport, H. Shtrikman, D.E. Feldman, T. Tamegai, P.H. Kes, M. Li, M. Konczykowski, Kees van der Beek, and E. Zeldov, *Nature* **411**, 451 (2001).
64. H. Beidenkopf, N. Avraham, Y. Myasoedov, H. Shtrikman, E. Zeldov, B. Rosenstein, E.H. Brandt, and T. Tamegai, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 257004 (2005).
65. H. Beidenkopf, T. Verdene, Y. Myasoedov, H. Shtrikman, E. Zeldov, B. Rosenstein, D. Li, and T. Tamegai, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 167004 (2007).
66. N. Avraham, E.H. Brandt, G.P. Mikitik, Y. Myasoedov, M. Rappoport, E. Zeldov, C.J. van der Beek, M. Konczykowski, and T. Tamegai, *Phys. Rev.* **B77**, 214525 (2008).
67. S. Goldberg, Y. Segev, Y. Myasoedov, I. Gutman, N. Avraham, M. Rappoport, E. Zeldov, T. Tamegai, C.W. Hicks, and K.A. Moler, *Phys. Rev.* **B79**, 064523 (2009).
68. S.O. Valenzuela and V. Bekkeris, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4200 (2000).
69. X.S. Ling, S.R. Park, B.A. McClain, S.M. Choi, D.C. Dender, and J.W. Lynn, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 712 (2001).
70. G. Ravikumar, H. Küpfer, A. Will, R. Meier-Hirmer, and Th. Wolf, *Phys. Rev.* **B65**, 094507 (2002).
71. M.P. Risse, M.G. Aikele, S.G. Doettinger, R.P. Huebener, C.C. Tsuei, and M. Naito, *Phys. Rev.* **B55**, 15191 (1997).
72. M.G. Aikele, R.P. Huebener, D. Weischer, and C.C. Tsuei, *Physica C* **290**, 109 (1997).
73. A. Uksusman, Y. Wolfus, A. Friedman, A. Shaulov, and Y. Yeshurun, *J. Appl. Phys.* **105**, 093921 (2009).
74. E.H. Brandt and G.P. Mikitik, *J. Low Temp. Phys.* **131**, 1033 (2003).
75. N. Sakamoto, F. Irie, and K. Yamafuji, *J. Phys. Soc. Jpn.* **41**, 32 (1976).
76. E.H. Brandt, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3025 (1995).

77. E.H. Brandt and G.P. Mikitik, *Supercond. Sci. Tech.* **20**, S111 (2007).
78. В.В. Андрианов, В.Б. Зенкевич, В.В. Кургузов, В.В. Сычев, *ЖЭТФ* **58**, 1523 (1970).
79. М.Л. Нестеров, Т.М. Слипенко, В.А. Ямпольский, *ФНТ* **31**, 656 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 498 (2005)].
80. W.T. Norris, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **3**, 489 (1970).
81. Н.И. Мухалишвили, *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*, Наука, Москва (1968).
82. Y. Togawa, K. Harada, T. Akashi, H. Kasai, T. Matsuda, F. Nori, A. Maeda, and A. Tonomura, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 087002 (2005).
83. G. Blatter, M.V. Feigel'man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin, and V.M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994).
84. M. Däumling, J.M. Seuntjens, and D.C. Larbalestier, *Nature* **346**, 332 (1990).
85. G. Yang, P. Shang, S.D. Sutton, I.P. Jones, J.S. Abell, and C.E. Gough, *Phys. Rev.* **B48**, 4054 (1993).
86. J.L. Vargas and D.C. Larbalestier, *Appl. Phys. Lett.* **60**, 1741 (1994).
87. Y. Yeshurun, N. Bontemps, L. Burlachkov, and A. Kapitunik, *Phys. Rev.* **B49**, 1548 (1994).
88. L. Klein, E.R. Yacoby, Y. Yeshurun, A. Erb, G. Müller-Vogt, V. Breit, and H. Wühl, *Phys. Rev.* **B49**, 4403 (1994).
89. A.A. Zhukov, H. Küpfer, H. Claus, H. Wühl, M. Kläser, and G. Müller-Vogt, *Phys. Rev.* **B52**, R9871 (1995).
90. A. Erb, J.-Y. Genoud, F. Marti, M. Däumling, E. Walker, and R. Flükiger, *J. Low Temp. Phys.* **105**, 1023 (1996).
91. G.K. Perkins, L.F. Cohen, A.A. Zhukov, and A.D. Caplin, *Phys. Rev.* **B51**, 8513 (1995).
92. M. Jirsa, L. Pust, D. Dlouhý, and M.R. Koblischka, *Phys. Rev.* **B55**, 3276 (1997).
93. G.K. Perkins, L.F. Cohen, A.A. Zhukov, and A.D. Caplin, *Phys. Rev.* **B55**, 8110 (1997).
94. B. Khaykovich, E. Zeldov, D. Majer, T.W. Li, P.H. Kes, and M. Konczykowski, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2555 (1996).
95. R. Wördenweber, P.H. Kes, and C.C. Tsuei, *Phys. Rev.* **B33**, 3172 (1986).
96. R. Wördenweber and P.H. Kes, *Cryogenics* **29**, 321 (1989).
97. S. Bhattacharya and M.J. Higgins, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2617 (1993).
98. M.J. Higgins and S. Bhattacharya, *Physica C* **257**, 232 (1996).
99. Y. Paltiel, E. Zeldov, Y.N. Myasoedov, H. Shtrikman, S. Bhattacharya, M.J. Higgins, Z.L. Xiao, E.Y. Andrei, P.L. Gammel, and D.J. Bishop, *Nature* **403**, 398 (2000).
100. Y. Paltiel, E. Zeldov, Y. Myasoedov, M.L. Rappaport, G. Jung, S. Bhattacharya, M.J. Higgins, Z.L. Xiao, E.Y. Andrei, P.L. Gammel, and D.J. Bishop, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3712 (2000).
101. M. Marchevsky, M.J. Higgins, and S. Bhattacharya, *Nature* **409**, 591 (2001).
102. S.S. Banerjee, A.K. Grover, M.J. Higgins, G.I. Menon, P.K. Mishra, D. Pal, S. Ramakrishnan, T.V. Chandrasekhar Rao, G. Ravikumar, V.C. Sahnó, S. Sarkar, and C.V. Tomy, *Physica C* **355**, 39 (2001).
103. K. Deligiannis, P.A.J. de Groot, M. Oussena, S. Pinfeld, R. Langan, R. Gagnon, and L. Taillefer, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2121 (1997).
104. H. Küpfer, Th. Wolf, C. Lessing, A.A. Zhukov, X. Lançon, R. Meier-Hirmer, W. Schauer, and H. Wühl, *Phys. Rev.* **B58**, 2886 (1998).
105. T. Nishizaki, T. Naito, and N. Kobayashi, *Phys. Rev.* **B58**, 11169 (1998).
106. S. Kokkaliaris, P.A.J. de Groot, S.N. Gordeev, A.A. Zhukov, R. Gagnon, and L. Taillefer, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5116 (1999);
107. S. Kokkaliaris, A.A. Zhukov, P.A.J. de Groot, R. Gagnon, L. Taillefer, and T. Wolf, *Phys. Rev.* **B61**, 3655 (2000).
108. D. Giller, A. Shaulov, Y. Yeshurun, and J. Giapintzakis, *Phys. Rev.* **B60**, 106 (1999).
109. T. Nishizaki, T. Naito, S. Okayasu, A. Iwase, and N. Kobayashi, *Phys. Rev.* **B61**, 3649 (2000).
110. H. Küpfer, Th. Wolf, R. Meier-Hirmer, and A.A. Zhukov, *Physica C* **332**, 80 (2000).
111. M. Pissas, S. Lee, A. Yamamoto, and S. Tajima, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 097002 (2002).
112. M. Zehetmayer, M. Eisterer, J. Jun, S.M. Kazakov, J. Karpinski, B. Birajdar, O. Eibl, and H.W. Weber, *Phys. Rev.* **B69**, 054510 (2004).
113. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B62**, 6812 (2000).
114. E.M. Gyorgy, R.B. van Dover, K.A. Jackson, L.F. Schneemeyer, and J.V. Waszczak, *Appl. Phys. Lett.* **55**, 283 (1989).
115. И.М. Бабич, Г.П. Микитик, *Письма в ЖЭТФ* **64**, 538 (1996).
116. I.M. Babich and G.P. Mikitik, *Phys. Rev.* **B58**, 14207 (1998).
117. G.P. Mikitik, *Physica C* **332**, 398 (2000).
118. T. Giamarchi and P. Le Doussal, *Phys. Rev.* **B55**, 6577 (1997).
119. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B64**, 184514 (2001).
120. D. Giller, A. Shaulov, T. Tamegai, and Y. Yeshurun, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3698 (2000).
121. C.J. van der Beek, S. Colson, M.V. Indenbom, and M. Konczykowski, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4196 (2000).
122. M.V. Indenbom, E.H. Brandt, C.J. van der Beek, and M. Konczykowski, *Phys. Rev.* **B70**, 144525 (2004).
123. I.M. Babich, G.P. Mikitik, and E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B74**, 224501 (2006).
124. B. Kalisky, D. Giller, A. Shaulov, and Y. Yeshurun, *Phys. Rev.* **B67**, 140508 (2003).
125. B. Kalisky, A. Shaulov, and Y. Yeshurun, *Phys. Rev.* **B68**, 012502 (2003).
126. B. Kalisky, Y. Bruckental, A. Shaulov, and Y. Yeshurun, *Phys. Rev.* **B68**, 224515 (2003).
127. B. Kalisky, Y. Myasoedov, A. Shaulov, T. Tamegai, E. Zeldov, and Y. Yeshurun, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 107001 (2007).
128. Ch. Jooss, J. Albrecht, H. Kuhn, S. Leonhardt, and H. Kronmüller, *Rep. Prog. Phys.* **65**, 651 (2002).
129. M.V. Indenbom, Th. Shuster, M.R. Koblischka, A. Forkl, H. Kronmüller, L.A. Dorosinskii, V.K. Vlasko-Vlasov,

- A.A. Polyanskii, R.L. Prozorov, and V.I. Nikitenko, *Physica* **C209**, 259 (1993).
130. M.R. Koblichka and R.J. Wijngaarden, *Supercond. Sci. Technol.* **8**, 199 (1995).
131. E. Zeldov, D. Majer, M. Konczykowski, A.I. Larkin, V.M. Vinokur, V.B. Geshkenbein, N. Chikumoto, and H. Shtrikman, *Europhys. Lett.* **30**, 367 (1995).
132. E.H. Brandt, *Phys. Rev.* **B46**, 8628 (1992).
133. B.J. Roth, N.G. Sepulveda, and J.P. Wikswo, Jr., *J. Appl. Phys.* **65**, 361 (1989).
134. P.D. Grant, M.V. Denhoff, W. Xing, P. Brown, S. Gvorkov, J.C. Irwin, B. Heinrich, H. Zhou, A.A. Fife, and A.R. Cragg, *Physica* **C229**, 289 (1994).
135. R.J. Wijngaarden, H.J.W. Spoelder, R. Surdeanu, and R. Griessen, *Phys. Rev.* **B54**, 6742 (1996).
136. T.H. Johansen, M. Baziljevich, H. Bratsberg, Y. Galperin, P.E. Lindelof, Y. Shen, and P. Vase, *Phys. Rev.* **B54**, 16264 (1996).
137. A.E. Pashitski, A. Gurevich, A.A. Polyanskii, D.S. Larbalestier, A. Goyal, E.D. Specht, D.M. Kroeger, J.A. DeLuca, and J.E. Tkaczyk, *Science* **275**, 367 (1997).
138. Ch. Jooss, R. Warthmann, A. Forkl, and H. Kronmüller, *Physica* **C299**, 215 (1998).
139. F. Laviano, D. Botta, A. Chiodoni, R. Gerbaldo, G. Ghigo, L. Gozzelino, and E. Mezzetti, *Phys. Rev.* **B68**, 014507 (2003).
140. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *Physica* **C437-438**, 204 (2006).
141. G.P. Mikitik and E.H. Brandt, *AIP Conference Proceedings* **850**, 829 (2006).
142. M.V. Indenbom, A. Forkl, B. Ludescher, H. Kronmüller, H.-U. Habermeier, B. Leibold, G. D'Anna, T.W. Li, P.H. Kes, and A.A. Menovsky, *Physica* **C226**, 325 (1994).
143. M.V. Indenbom, C.J. van der Beek, V. Berseth, W. Benoit, G. D'Anna, A. Erb, E. Walker, and R. Flükiger, *Nature* **385**, 702 (1997).
144. M.A. Avila, L. Civale, A.V. Silhanek, R.A. Ribeiro, O.F. de Lima, and H. Lanza, *Phys. Rev.* **B64**, 144502 (2001).
145. A.A. Zhukov, G.K. Perkins, Yu.V. Bugoslavsky, and A.D. Caplin, *Phys. Rev.* **B56**, 2809 (1997).
146. G.P. Mikitik, E.H. Brandt, and M. Indenbom, *Phys. Rev.* **B70**, 014520 (2004).
147. E.H. Brandt and G.P. Mikitik, *Phys. Rev.* **B72**, 024516 (2005).
148. D.G. Gheorghe, M. Menghini, R.J. Wijngaarden, E.H. Brandt, G.P. Mikitik, and W. Goldacker, *Phys. Rev.* **B73**, 224512 (2006).

Critical states in thin flat type-II superconductors in perpendicular or inclined magnetic field
(Review Article)

G.P. Mikitik

The critical state theory of the vortex-lattice in type-II superconductors is considered without the assumption that the circulating currents are perpendicular to the local magnetic fields in the sample. Using this theory, several critical state problems are solved for thin flat superconductors in an external magnetic field perpendicular to their plane: a theory of vortex-shaking effect is developed for rectangular superconducting platelets, the critical states are studied in superconducting samples with anisotropic flux-line pinning and in those with the order-disorder transition in their vortex lattice. Besides, the critical states in a long superconducting strip in an inclined magnetic field are investigated.

PACS: 74.25.Sv Critical currents;
74.25.Uv Vortex phases (includes vortex lattices, vortex liquids, and vortex glasses).

Keywords: critical states of type-II superconductors, vortex-shaking effect, anisotropic pinning of vortex lines, critical current density, inclined magnetic field.