

А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина

БИФУРКАЦИИ И МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057 Киев Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

Abstract The system generator with inertial nonlinearity is considered. The bifurcation picture is illustrated by the simple examples with using the comparison method and Lyapunov functions.

Key words: bifurcation, nonlinear monotone systems, chaos, multistable system.

Введение.

Теории бифуркаций и качественного анализа берут свое начало в работах А. Пуанкаре А.М. Ляпунова, А.А. Андропова. Элементы теории бифуркаций содержатся в ряде современных работ [1, 4 – 7, 9 – 13]. Подход применения в качественном анализе уравнений в вариациях, в которых коэффициенты зависят от частного решения, содержится в [4]. Работа в целом посвящена также классификации физических объектов, порождающих многомерные аттракторы. Рассматриваемая задача содержит мультистабильность. В радиофизике мультистабильность указывает на сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, обусловленных определенными начальными условиями [2].

§ 1. Постановка задачи.

В работе [1] приводится обобщенное уравнение генератора, блок-схема которого состоит из селективного элемента (например, колебательного контура) и усилителя

$$\ddot{x} + F_1(x, z, \mu) + F_2(x, z, \mu) = 0; \dot{z} = F_3(x, z, \mu).$$

Здесь x – переменная, совершающая колебания; μ – совокупность параметров; F_i – в общем нелинейные функции. Переменная $z(t)$ связана с переменной $x(t)$ посредством дифференциального оператора первого порядка, т.е. связь отклика $z(t)$ на переменную $x(t)$ инерционна.

Рассмотрим генератор с квадратичной инерционной нелинейностью в виде безразмерной системы, приведенной в [1],

$$\frac{dx}{dt} = mx - xz + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{dz}{dt} = -b(z - x^2), \quad (1)$$

где m, b – положительные постоянные коэффициенты. Колебательный контур описывается уравнением

$$\ddot{x} - (m - z)\dot{x} + (\dot{z} + 1)x = 0, \quad (2)$$

инерционный преобразователь представлен оператором $\dot{z} = -b(z - x^2)$.

Генератор с экспоненциальной инерционной нелинейностью в виде безразмерной системы приведен в [2],

$$\frac{dx}{dt} = mx - xz + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{dz}{dt} = -b(z - e^x + 1). \quad (3)$$

Здесь имеет место колебательный контур (2). Инерционный преобразователь представлен оператором $\dot{z} = -b(z - e^x + 1)$.

Хорошо изучены аттракторы, которые связаны с механизмом орбитальной потери устойчивости в системе с двумя особыми точками. В известной задаче Лоренца переход неустойчивых траекторий от одного седло-фокуса к другому создает очевидный механизм орбитальной потери устойчивости, который порождает странный аттрактор. Качественное исследование задачи Лоренца изложено в монографии [11]. В консервативной системе бистабильный осциллятор – периодическое воздействие возникает аналогичный механизм, который включает две особые точки [4]. В системе Рикитак также имеет место два узлоцентра [10].

Пусть $x = \bar{x}(t)$ – периодическое решение n -мерной автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (4)$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния системы в момент $t \in R$, $F: U \rightarrow R^n$ – гладкая функция, определенная на некотором подмножестве $U \subseteq R^n$. Введем в рассмотрение малое отклонение в окрестности решений \bar{x}_i ($i=1,2,\dots,n$): $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$). Рассмотрим δx_i в качестве новых координат. Система в координатах δx_i (линейная) примет следующий вид: $d\delta x / dt = A(\bar{x})\delta x$, $\delta x \in R^n$, где $A(\bar{x}) = \partial F / \partial x|_{x=\bar{x}}$, называется *системой в вариациях* [4]. При помощи анализа корней характеристического уравнения матрицы $A(\bar{x})$ можно построить разделяющую кривую (сепаратрису), которая разделяет разные по качеству области фазового сечения, а также получить оценки параметров орбитально устойчивой системы.

В аналитически заданных системах обыкновенных дифференциальных уравнений $dx/dt = A(t)x$ введем характеристические показатели нетривиальных решений $\Lambda_j = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} [t^{-1} \ln \|x_j(t)\|]$ ($j=1,2,\dots,n$), где $x_j(t) - j$ -е фундаментальное решение системы, $\|0\|$ – норма. Числа Λ_j называются обобщенными характеристическими показателями произвольной системы. Для системы в вариациях, описывающей эволюцию возмущений δx вблизи частного решения $\bar{x}(t)$ нелинейной системы, совокупность Λ_j называют характеристическими показателями Ляпунова (ХПЛ) частного решения $\bar{x}(t)$ (или фазовой траектории).

Задача описания "механизма возникновения" сложных движений в системе с одной особой точкой предполагает решение следующих вопросов.

1. Построить сепаратрисы, которые разделяют поле координатной плоскости, связанной с бифуркационным процессом.
2. Установить неустойчивость траекторий генератора.
3. Доказать существование области, во внутрь которой втягиваются траектории генератора [11].
4. Описать явление мультистабильности в терминах полученных качественных результатов.

Существование области, в которую втягиваются неустойчивые траектории [11], указывает на то, что один знак сигнатуры спектра ХПЛ – минус (–). Так как рассматривается колебательный процесс трехмерной диссипативной системы, то сигнатура спектра ХПЛ имеет два таких знака (0, –), т.е. характеристические показатели имеют следующий вид: $\Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0$. Орбитально устойчивой траектории свойственно неравенство $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0$, орбитально неустойчивой – неравенство $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 > 0$.

Если доказано существование области, во внутрь которой втягивается траектория, то при наличии одной особой точки этого достаточно, чтобы утверждать об существовании аттрактора. Неустойчивость траектории по Ляпунову в данном случае может быть тождественна орбитальной неустойчивости и порождает один из знаков сигнатуры спектра (ХПЛ) в виде плюса (+).

Приведем ещё один подход для установления существования аттрактора в трехмерной системе.

Предположение 1. Система (4) неустойчива в окрестности нуля. Система (4) ($n=3$) имеет одну особую точку. Особая точка седлофокус имеет характеристические показатели $Re\lambda_1 > 0, Re\lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ с отрицательной седловой величиной $\sigma = Re\lambda_1 + Re\lambda_2 + \lambda_3 < 0$.

Предположение 2. На одной координатной плоскости и плоскостях, параллельных этой плоскости, система (4) относительно особой точки имеет круговую траекторию, которой соответствуют колебания осциллятора с затуханием. На двух других плоскостях и плоскостях, параллельных этим двум, траектория не уходит на ∞ .

Утверждение. Пусть для дифференциальной системы (4) выполняются условия Предположений 1, 2. Тогда в окрестности особой точки (седлофокус) образуется аттрактор.

Доказательство. Согласно Предположению 1 круговая траектория системы (4) относительно особой точки вида седлофокус – неустойчива. Согласно Предположению 2 существование круговой траектории с затуханием на одной из координатных плоскостей указывает на диссипативный характер движения. Предположение 2 указывает на то, что траектория не уходит на бесконечность, но остается в некоторой окрестности особой точки вида седлофокус. Таким образом, в системе (4) существует притягивающая траектория, которая не уходит на ∞ , но может быть орбитально неустойчивой.

§ 2. Бифуркационная картина на фазовых плоскостях.

Каждая из систем (1), (3) имеет одну особую точку $O(0, 0, 0)$. Введем малые отклонения $\delta x, \delta y, \delta z$ в системах (1), (3) от частных решений $\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)$ и составим уравнения в вариациях для систем (1), (3)

$$\frac{d\delta x}{dt} = (m - \bar{z})\delta x + \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \frac{d\delta y}{dt} = -\delta x; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - 2\bar{x}\delta x); \quad (5)$$

$$\frac{d\delta x}{dt} = (m - \bar{z})\delta x + \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \frac{d\delta y}{dt} = -\delta x; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - e^{\bar{x}}\delta x). \quad (6)$$

Характеристическое уравнение системы (5) имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + \bar{z} - m) + \lambda(b(\bar{z} - m) + 2b\bar{x}^2 + 1) + b = 0, \quad (7)$$

системы (6) –

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + \bar{z} - m) + \lambda(b(\bar{z} - m) + be^{\bar{x}}\bar{x} + 1) + b = 0. \quad (8)$$

Корни, соответствующие особой точке $O(0, 0, 0)$, систем (7), (8) находятся из уравнения $\lambda^3 + \lambda^2(b - m) + \lambda(-bm + 1) + b = 0$ либо $(\lambda + b)(\lambda^2 - m\lambda + 1) = 0$ и равны $\lambda_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - 1}$, $\lambda_3 = -b$. Для значений параметров

$$0 < m < 2; \quad b = 0, 2 \quad (9)$$

корни λ_1, λ_2 – комплексные. Покажем, что на оси z существуют точки, которым соответствует разделение уравнений (7), (8) на два. В точке $A(x=0, y=0, z=m+b)$ уравнения (7), (8) имеют вид $(\lambda + b)(\lambda^2 + b\lambda + 1) = 0$. Значения характеристических показателей в точке A – $\lambda_{1,2} = -b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - 1}$, $\lambda_3 = -b$. В точке $C(x=0, y=0, z=m)$ урав-

нения (7), (8) имеют вид $(\lambda + b)(\lambda^2 + 1) = 0$ и значения характеристических показателей в этой точке $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_3 = -b$. В характеристические уравнения (7),(8) не входит частное решение $\bar{y}(t)$, что указывает на то, что *бифуркационный процесс не связан с частным решением $\bar{y}(t)$* .

Таким образом, в точке C происходит смена знака действительной части двух комплексно-сопряженных корней. Это облегчает численное построение сепаратрисной кривой на плоскости xz . На плоскости xz с помощью характеристического уравнения (8) построим кривые, которые разделяют плоскость на области с определенным характером точек.

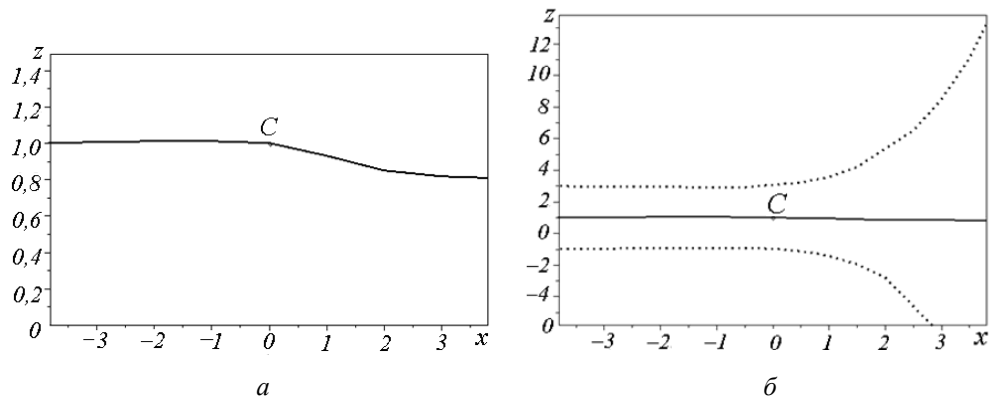


Рис. 1

На рис. 1, *а* приведена сепаратриса, которая разделяет плоскость бифуркаций xz генератора с экспоненциальной нелинейностью. Точки, лежащие ниже сепаратрисы, соответствуют положительным значениям действительной части комплексных корней. Корни на сепаратрисе такие: $Re\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 < 0$. Пунктиром на рис.1, *б* обозначены разделяющие кривые, на которых комплексные корни становятся действительными. На верхней ветви – $\lambda_{1,2} < 0$, $\lambda_3 < 0$ (здесь и далее значения параметров $(m,b) = (1; 0,2)$). Увеличение модуля действительных корней идет в точках кривых слева направо, например, в следующих точках характеристические показатели такие: $(x = -3, z = 2,9621)$ $\lambda_{1,2} = -0,9761$; $\lambda_3 = -0,2099$; $(x = 0, z = 3)$ $\lambda_{1,2} = -1$; $\lambda_3 = -0,2$; $(x = 3, z = 8,4107)$ $\lambda_{1,2} = -3,7984$; $\lambda_3 = -0,0139$. На нижней ветви – $\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 < 0$. Увеличение модуля действительных корней идет в точках кривых слева направо, например, в следующих точках характеристические показатели такие: $(x = -3, z = -0,9747)$ $\lambda_{1,2} = 0,9895$; $\lambda_3 = -0,2042$; $(x = 0, z = -1)$ $\lambda_{1,2} = 1$; $\lambda_3 = -0,2$; $(x = 3, z = -6,04115)$ $\lambda_{1,2} = 3,4293$; $\lambda_3 = -0,0170$. Поле на плоскости xz – несимметрично. Это порождает несимметричную область, во внутрь которой могут втягиваться траектории при образовании аттрактора.

§3. Доказательство существования области, во внутрь которой втягиваются траектории генератора с квадратичной нелинейностью.

Введем переменную $\zeta = z - Km$, где K – положительное число. Запишем уравнения (1) так:

$$\frac{dx}{dt} = mx - x(\zeta + Km) + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{d\zeta}{dt} = -b(\zeta + Km) + bx^2. \quad (10)$$

Введем функцию

$$2V = bx^2 + by^2 + \zeta^2 \quad (11)$$

и определим полную производную функции (11) в силу системы (10)

$$\frac{dV}{dt} = -bm(K-1)x^2 - b(\zeta^2 + \zeta Km). \quad (12)$$

В производную (12) не входят слагаемые с переменной y . Покажем, что траектория системы (10) притягивается во внутрь эллипса, определяемого уравнением $dV/dt = 0$.

На основе уравнения (12) имеем

$$-bm(K-1)x^2 - b\left(\zeta^2 + \zeta Km + \left(\frac{Km}{2}\right)^2\right) + b\left(\frac{Km}{2}\right)^2 = 0$$

(здесь отняли и прибавили постоянную величину), и далее –

$$m(K-1)x^2 + \left(\zeta + \frac{Km}{2}\right)^2 = \left(\frac{Km}{2}\right)^2. \quad (13)$$

Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \left(\zeta + \frac{Km}{2}\right)^2 / B^2 = 1 \quad \left(A = \frac{Km}{2\sqrt{m(K-1)}}; B = \frac{Km}{2} \right)$$

с центром в точке $x = 0$, $\zeta = -Km/2$. Область, находящаяся внутри эллипса (13), втягивает траекторию системы (10). Эта область порождает аттрактор. Доказать существование регулярного аттрактора можно с помощью принципа симметрии.

§4. Теорема о симметрии.

Принцип симметрии в трехмерных системах состоит в нахождении координатной плоскости, на которую пространственная интегральная кривая проецируется в замкнутую симметричную кривую. На двух других координатных плоскостях процесс должен быть устойчив и может сопровождаться симметрией.

Перенесем начало координат в точку C . Введем новую систему координат. Оси Cx , Cy , Cz будут параллельны осям Ox , Oy , Oz ; система уравнений (1) запишется так:

$$\frac{dx}{dt} = -xz + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{dz}{dt} = -b(z + m - x^2).$$

Представим систему трех дифференциальных нелинейных уравнений в следующем виде:

$$dx/dt = -xz + y; \quad dy/dt = -x; \quad dz/dt = -b(z + m + f(x)), \quad (14)$$

где m, b – положительные параметры.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию единственности решений в каждой точке x . Предположим, что замкнутая траектория лежит на поверхности и имеет определенный вид симметрии. Можно получить плоскость, на которую траектория проецируется в замкнутую кривую. Замкнутая траектория имеет определенные проекции на две другие плоскости. Последние две проекции на координатные плоскости могут иметь симметрию, но не обязательно замыкание. Еще одно предположение касается неустойчивости системы (14) в окрестности нуля. Поскольку двумерные проекции доступны прогнозированию геометрической симметрии и устойчивости, то все приведенное выше можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Рассмотрим систему (14) при следующих предположениях.

- 1) Система (14) имеет неустойчивое решение в окрестности нуля.
- 2) Движение на плоскости xz системы (14) определяется системой

$$dx/dt = -xz; \quad dz/dt = -b(z + m + f(x)), \quad (15)$$

которая содержит два устойчивых симметричных положения равновесия. Тогда в трехмерной системе (15) существует замкнутая интегральная кривая.

Доказательство. Движение на плоскости xu уравнений (14) определяется системой

$$dx/dt = y; \quad dy/dt = -x, \quad (16)$$

которая имеет симметричную замкнутую траекторию: особая точка центр, траектория на плоскости имеет симметрию относительно осей x, y . Движение на плоскость yz уравнений (14) определяется системой

$$dy/dt = 0; \quad dz/dt = -bz - m. \quad (17)$$

Особая точка системы (17) имеет показатели характеристического уравнения $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -b$. Пусть начальные условия системы (14) возбуждают образование замкнутой симметричной траектории системы (16). Тогда возмущается система (15), образуются траектории, стремящейся к особым точкам с координатами $(\pm x_0, 0)$. Колебания системы (15) приобретает вид установившегося процесса, который характеризуется интегральной кривой с симметрией в пространстве xuz . При этом проекция системы (17) на плоскость yz этому установившемуся процессу не противодействует. Теорема доказана.

Рассмотрим движение траектории системы (14) на плоскости xz , которая определяется системой уравнений

$$dx/dt = -xz; \quad dz/dt = -b(z + m - x^2). \quad (18)$$

Находим особые точки системы (18). Примем $z = 0$. Система (18) имеет две особые точки, координаты которых $x = \pm\sqrt{m}, z = 0$. Особые точки $C_1(\sqrt{m}, 0), C_2(-\sqrt{m}, 0)$ имеют характеристические показатели $\lambda_{1,2} = -b/2(1 \pm \sqrt{1 - 8m/b})$. Возникновение замкнутой траектории в системе (14) связано с начальным возмущением по переменной x , которое вызывает возмущение переменной y . Так как все предполагаемые условия теоремы удовлетворяются, то можно утверждать о существовании замкнутой кривой в системе (14).

Применим метод сравнения для доказательства неустойчивости системы (1). Введем функции $V_1 = x^2/2, V_2 = y^2/2, V_3 = x^2/2 + z^2/2$. Производные функций $V_j (j = 1, 2, 3)$ в силу системы (1) допускают оценки

$$\frac{dV_1}{dt} = mx^2 - x^2z + xy \leq mx^2 + y^2/2 + x^2/2 + z^2/2 + x^4/2,$$

$$\frac{dV_2}{dt} = -xy \leq x^2/2 + y^2/2,$$

$$\frac{dV_3}{dt} = bx^2z + mx^2 - x^2z + xy - bz^2 \leq (m + b/2)x^2/2 + y^2/2 + (1 - b)(x^2 + z^2)/2 + (1 + b)x^4/2.$$

Здесь производные двух переменных заменены на сумму

$$\pm bx^2z \leq bx^4/2 + bz^2/2, \quad \pm xy \leq x^2/2 + y^2/2, \quad \pm x^2z \leq x^4/2 + z^2/2.$$

Запишем систему сравнения

$$\frac{d\mathcal{G}_1}{dt} = 2m\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3 + 2\mathcal{G}_1^2, \quad \frac{d\mathcal{G}_2}{dt} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2; \quad (19)$$

$$\frac{d\mathcal{G}_3}{dt} = (2m + b)\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + (1 - b)\mathcal{G}_3 + 2(1 + b)\mathcal{G}_1^2.$$

При выполнении условия $b < 1$ система сравнения (19) показывает, что траектория уходит от нуля. Зададим следующие значения параметров: $(m, b) = (1; 0,2)$.

Предлагаемая теорема о симметрии носит геометрический характер. Рассматривается механизм образования периодической трехмерной кривой с симметрией. При анализе движений на координатных плоскостях основная составляющая – находящаяся плоскость, на которой образуется симметричная по двум осям замкнутая кривая (плоскость xu). Две остальные координатные плоскости стабилизируют качественную картину и симметрию в случае устойчивости особых точек систем (15), (17).

На рис. 2, а изображено сечение предельного цикла генератора и граница области, во внутрь которой втягивается цикл ($K = 2,5; A = 1,53; B = 1,25$) при значениях параметров $(m, b) = (1; 0,2)$. Начальное возмущение $x_0 = -2,5$. На рис. 2, б приведено наглядное изображение траектории предельного цикла.

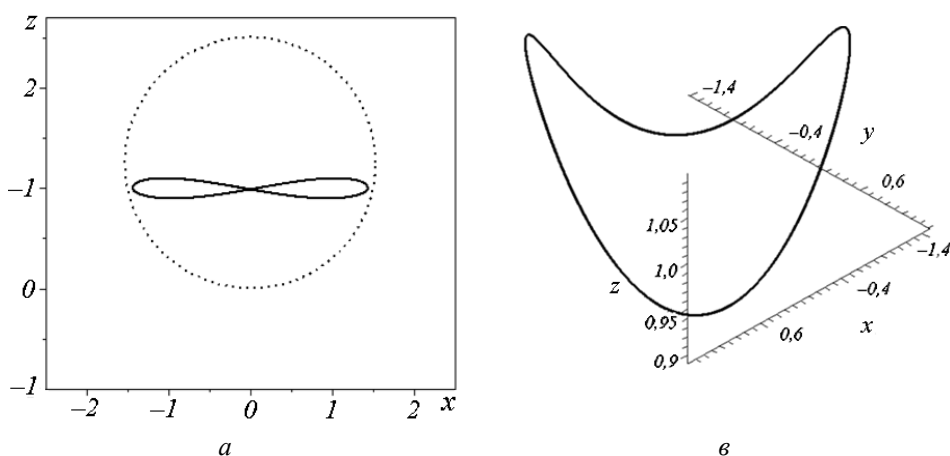


Рис.2

§5. Доказательство неустойчивости траектории генератора с экспоненциальной нелинейностью.

Установим неустойчивость траектории системы (3) с помощью метода сравнения. Прежде напомним некоторые положения и теорему, согласно которой устанавливается данное качество. Метод сравнения включает составление уравнений сравнения (уравнений вида Вазжевского), которые обладают свойством квазимонотонности. В работах [3, 8] приведены основные источники и результаты устойчивости теории устойчивости монотонных систем.

Рассмотрим систему

$$\frac{d\mathcal{G}_j}{dt} = q_j(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k), \quad j = 1, \dots, k, \quad (20)$$

при следующих предположениях.

1. Система (20) является системой Вазжевского, т.е. компоненты вектор-функции $q(\mathcal{G})$ являются квазимонотонно возрастающими функциями. Для квазимонотонного возрастания функции $q(\mathcal{G})$ необходимо и достаточно выполнения условий $\partial q_j / \partial \mathcal{G}_i \geq 0$ при $j \neq i$.

2. Правая часть системы (20) непрерывна и решение задачи Коши для любого $\mathcal{G}_0 \in R^k$ локально единственно.

Теорема о неустойчивости системы Вазжевского в конусе K (см. [3, 8]).
Если для системы Вазжевского выполняются предположения 1, 2 и существует

последовательность $\mathcal{G}_m \in K$, $\mathcal{G}_m \rightarrow 0$, при $m \rightarrow \infty$ такая, что для каждого m выполняются неравенства

$$q_j(\mathcal{G}_m) \geq 0, \quad j=1, \dots, k, \quad (21)$$

причем, хотя бы для одного j неравенство (21) строгое и найдется окрестность нуля V такая, что на множестве $K_{\mathcal{G}_m} \cap V$ векторное поле не равно нулю, тогда нулевое решение системы (20) – неустойчиво в конусе.

Введем функции $x^2/2, y^2/2, z^2/2$. Производные этих функций в силу системы (3) допускают оценки

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{dt} &= mx^2 - x^2z + xy < (m+1/2)x^2 + y^2/2 + z^2/2 + x^4/2; \\ y \frac{dy}{dt} &= -xy \leq x^2/2 + y^2/2; \end{aligned} \quad (22)$$

$$z \frac{dz}{dt} = -bz^2 + be^x z - bz < (-b+1)z^2/2 + b/2(e^x)^2 + b^2/2.$$

В системе (22) произведения двух переменных $x^2z, xy, e^x z$ заменены на сумму квадратов, например, $\pm x^2z \leq x^4/2 + z^2/2$. Также представлены $\pm e^x z < (e^x)^2/2 + z^2/2, \pm bz < b^2/2 + z^2/2$.

Запишем систему

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{G}_1}{dt} &= 2(m+1/2)\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3 + 2\mathcal{G}_1^2; & \frac{d\mathcal{G}_2}{dt} &= \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2; \\ \frac{d\mathcal{G}_3}{dt} &= (-b+1)\mathcal{G}_3 + b/2(e^{\sqrt{2}\mathcal{G}_1})^2 + b^2/2. \end{aligned} \quad (23)$$

Если в системе (23) справа – функции, которые удовлетворяют условиям теоремы о неустойчивости, то система (3) – неустойчива.

§6. Доказательство существования области, во внутрь которой втягиваются траектории генератора с экспоненциальной нелинейностью.

Введем переменную $\zeta = z - (Km + b)$, где K – положительное число. Представим нелинейность в виде степенного ряда до квадратичного члена включительно $e^x = 1 + x + x^2/2$ и запишем уравнения (3) так:

$$\frac{dx}{dt} = mx - x(\zeta + Km + b) + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{d\zeta}{dt} = -b(\zeta + Km + b) + bx + bx^2/2. \quad (24)$$

Введем функцию

$$V = \frac{bx^2}{2} + \frac{by^2}{2} + \zeta^2$$

и определим полную производную функции V в силу системы (24)

$$\frac{dV}{dt} = -b(m(K-1) + b)x^2 - 2b\zeta^2 - 2b\zeta(Km + b) + 2bx\zeta. \quad (25)$$

В производную (25) не входят слагаемые с переменной y .

В равенстве (25) производные двух переменных $2x\zeta$ заменим на сумму квадратов, так как $\pm 2x\zeta \leq x^2 + \zeta^2$, тогда производная функции допускает оценку

$$\frac{dV}{dt} \leq -b(m(K-1)-1+b)x^2 - b\zeta^2 - 2b\zeta(Km+b). \quad (26)$$

Здесь правая часть неравенства (26) – непрерывная при $x \geq 0$, $\zeta \geq 0$ такая, что уравнение сравнения

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = -b(m(K-1)-1+b)x^2 - b\zeta^2 - 2b\zeta(Km+b) \quad (27)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x_0, \zeta_0)$ для каждой точки из области определения.

Нетрудно показать, что траектории лежат внутри эллипса, определяемого уравнением $d\mathcal{G}/dt = 0$. На основе уравнения (27) имеем

$$(m(K-1)-1+b)x^2 + \zeta^2 + 2\zeta(Km+b) = 0;$$

$$(m(K-1)-1+b)x^2 + (\zeta + (Km+b))^2 = (Km+b)^2.$$

Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{(\zeta + (Km+b))^2}{B^2} = 1 \quad \left(A = \frac{Km+b}{\sqrt{m(K-1)-1+b}}; B = Km+b \right) \quad (28)$$

с центром в точке $x=0$, $\zeta = -(Km+b)$. Область, находящаяся внутри эллипса (28), удерживает внутри себя траектории системы (3). Для этой области $d\mathcal{G}/dt < 0$. Полученная область является приближенной в силу представления нелинейного члена степенным рядом. Система (3) описывает колебательный процесс в окрестности нуля и, функция \exp^x ограничена ($-\infty < x < +\infty$). Поэтому неустойчивая по Ляпунову траектория не уходит на ∞ при начальном возмущении по x . Таким образом, доказано существование области, в которую втягивается траектория системы (3). Эта область определяет существование аттрактора.

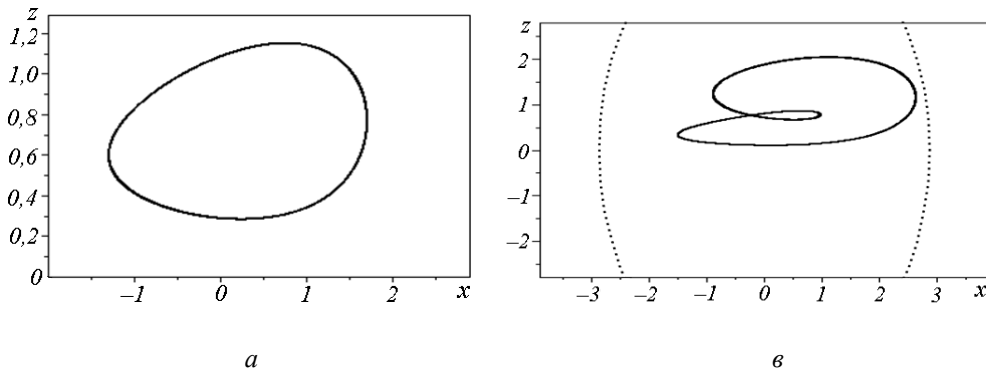


Рис. 3

Существование регулярного аттрактора в системе (3) не определяется теоремой симметрии. Регулярный аттрактор может образовываться, если бифуркационный процесс порождает симметрию сепаратрис (рис.1, а, б). Можно полагать, что слабая несимметрия в окрестности нуля еще позволяет траектории замкнуться. Параметр m в уравнении (2) определяет величину отрицательной диссипации. Уменьшая величину параметра m в системе (3), можно получить замы-

кание траектории. При увеличении параметра отрицательной диссипации система становится орбитально неустойчивой. Пусть при $m \leq m_k$ устанавливается устойчивый процесс и, как показывает эксперимент, существует замкнутая траектория в системе (3). На рис. 3, а приведена траектория для значений параметров $(m, b) = (0,7; 0,2)$. С увеличением параметра m изображающая точка замедляет движение и траектория имеет кратное увеличение периода. Замедление движения связано с бифуркационной картиной на плоскости xz (рис.1). На рис. 3, б приведена граница приближенной области для параметров $(m, b) = (0,92; 0,2)$ и проекция аттрактора на плоскость xz . Таким образом, путь к странному аттрактору идет через кратное увеличение периода.

О мультистабильности. Физическое явление мультистабильности связано с несимметрией поля относительно оси z и состоит в следующем. Несимметричная функция, входящая в инерционный преобразователь, порождает несимметричное поле (рис. 1, а, б), которое формирует несимметричную притягивающую область. В одном случае рождаются предельные циклы (при сравнительно слабой отрицательной диссипации). В другом случае – предельный цикл и странный аттрактор (при сильной отрицательной диссипации). Приведем таблицу, из которой видно, что знаки и величины начальных возмущений (x_0) влияют на характер аттрактора ($(m, b) = (1; 0,2)$).

x_0	Установившийся режим движения
0,1	Странный аттрактор
-0,1	Предельный цикл
0,5	Предельный цикл
-0,5	Странный аттрактор
± 1	Предельный цикл
$\pm 1,5$	Предельный цикл
2,5	Странный аттрактор
-2,5	Предельный цикл

На рис. 4, а, б приведены предельный цикл и странный аттрактор, соответствующие данным таблицы. Здесь траектории регулярного и странного аттракторов изображены на фоне сепаратрис, которые разделяют поле плоскости xz (рис. 1).

Таким образом, для $m > m_k$ могут быть предельный цикл (рис. 4, а) и странный аттрактор (рис. 4, б), порожденный орбитальной неустойчивостью.

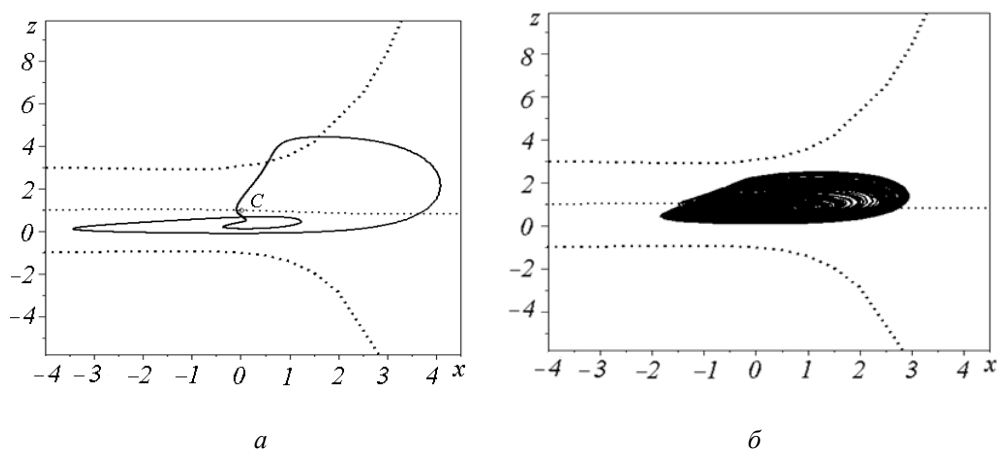


Рис.4

В заключение отметим, что качественный анализ бифуркаций для трехмерных систем может также описывать *механизм возникновения сложных движений*.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто генератор з інерційною нелінійністю. Біфуркаційна картина ілюструється на простих прикладах із застосуванням методу порівняння та функцій Ляпунова.

1. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
2. *Коблянский С.А., Шабунин А.В., Астахов В.В.* Вынужденная синхронизация периодических колебаний в системе с фазовой мультистабильностью // *Нелинейная динамика*. – 2010. – **6**, N 2. – С. 277 – 289.
3. *Мартынюк А.А., Оболенский А.Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского // *Дифференциальные уравнения*. – 1980. – **16**, N 8. – С. 1392 – 1407.
4. *Никитина Н.В.* Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – К.: Феникс, 2012. – 235 с.
5. *Anishchenko V.S., Astakhov S.V., Vadivasova T.E.* Diagnostics of the Degree of Noise Influence on a Nonlinear System Using relative Metric Entropy // *Regular and Chaotic Dynamics*. – 2010. – **15**, № 2 – 3. – P. 263 – 276.
6. *Krys'ko V.A., Yakovleva T.V., Dobriyan V.V., Papkova I.V.* Chaotic Synchronization of Vibration of the Multilayer Mechanical Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 6. – P. 410 – 420.
7. *Leonov G.A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St. Peterburg: University Press, 2008. – 160 p.
8. *Martyniuk A.A.* Asymptotic Stability Criterion for Nonlinear Monotonic Systems and Its Applications (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 5. – P. 475 – 534.
9. *Martyniuk A.A., Nikitina N.V.* Bifurcation Processes Periodically Perturbed Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 1. – P. 103 – 113.
10. *Martyniuk A.A., Nikitina N.V.* On Stability and Bifurcations in a Model of Earth Magnetic // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 6. – P. 510 – 520.
11. *Neimark, Yu.I., Landa, P.S.* Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
12. *Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – World Scientific, 1998. – 416 с.
13. *Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – World Scientific, 2001. – 592 p.

Поступила 21.11.2012

Утверждена в печать 30.09.2014