

О. Н. Петрищев, Н. С. Трушко

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИЗЛУЧЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН
ЕДИНИЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ШУМОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ**

*Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»
e-mail: petrishchev@ukr.net; n.trushko@gmail.com*

Abstract. A problem on excitation of the propagating radially Lamb waves is solved, when the isotropic elastic plate is loaded by a system of volume and surface loads applied in the finite area of plate. Basing on the general solutions, a mathematical model is constructed for a process of emission of ultra-sound waves in an isotropic plate by the unit source of acoustical emission noises of two model configurations – linear and point sources. The fact of quality correspondence of results presented for the linear pulsing source and results obtained before by P.Torwick for the equivalent by the physical sense problem emission of the plane Lamb waves by a longitudinal harmonic force acting on the half-strip end is established. On the base of the chosen model of emission in the case of point source, the estimation of efficiency of extraction of elastic vibrations energy from the source and energy transport over the plate by different modes and for different frequencies is made.

Key words: acoustical emission, Lamb waves, nondestructive testing.

Введение.

Среди достаточно большого перечня методов неразрушающего контроля и технической диагностики состояния материалов в последнее время становится все более актуальным и востребованным метод акустической эмиссии. Существенные преимущества этого метода состоят в следующем. Во-первых, итог применения метода состоит не в установлении текущего характера разрушений, а формировании на основе полученных данных прогноза о развитии разрушений в зависимости от условий дальнейшей эксплуатации объекта. Такое прогнозирование не предполагает привлечения внешних по отношению к методу расчетов или обращения к проектировочным расчетам конструкции и истории эксплуатации, предшествующей диагностике [11]. Во-вторых, в отличие от активных методов, в которых выбор параметров излучения следует считать фактором, в той или иной мере опосредующим получаемую информацию, здесь ее «первоисточником» является сам дефект [9]. В-третьих, процесс диагностики не требует постоянного активного участия персонала после установки и настройки диагностической системы. Более того, в ходе диагностики персонал и блоки аналитической обработки данных системы могут быть размещены на значительном удалении от объекта, что немаловажно в случае потенциальной опасности аварийной ситуации для окружающих [1, 11]. Преобладает практика применения метода в режиме непрерывного мониторинга – как правило весьма длительного, вплоть до снабжения объекта диагностической системой на весь срок его эксплуатации.

В результате экспериментальных исследований достоверно установлена связь спектральных и энергетических характеристик шумов акустической эмиссии с масштабами деформационных процессов в материалах [2, 3, 9, 11, 14, 16, 19, 20, 25, 27]. Более того, наличествующее понимание механики разрушения [10, 17, 21 – 23] позволяет дать этой связи состоятельную, в некоторых пределах, физическую трактовку.

Экспериментально доказанным фактом является то, что с помощью метода акустической эмиссии можно измерять уровень напряжений (деформаций) материала конструкции, обнаруживать различные дефекты и определять их координаты, оценивать степень опасности дефектов, а также решать другие задачи при оценке состояния конструкций и сооружений. Однако эти методы не нашли такого уровня практического применения, который был бы адекватен их реальным возможностям. Объясняется это их относительной новизной, наличием ряда не развитых в достаточной мере вопросов теории. К перечню нерешенных вопросов теории метода акустической эмиссии, в первую очередь, относится вопрос о механизме доставки энергии источника шума акустической эмиссии в точку наблюдения, где располагается регистрирующий ультразвуковые волны электроакустический преобразователь, в элементах конструкций как волноводах. Особенностью постановки и исследования данного вопроса является тот известный факт [5], что в области высоких частот (коротких волн) в пластинах и стержнях существует определенное зависимость от частоты количество распространяющихся нормальных волн, каждая из которых имеет свой определенный вес в энергетическом балансе динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) объекта. При этом далеко не каждая нормальная волна может быть эффективно зарегистрирована преобразователем с реальными характеристиками, расположенном на поверхности твердого тела. От этого утверждения легко прийти к выводу, что вопрос анализа характера переноса энергии упругих колебаний в волноводах целесообразно рассматривать совместно с вопросом оценки влияния физических параметров преобразователей на регистрируемый сигнал.

Настоящая статья посвящена первому из двух вышеупомянутых вопросов теории. Ниже рассмотрены случаи НДС безграничной пластины, создаваемого модельными источниками упругих возмущений различной конфигурации. Пластина выбрана в качестве модельного представления типовых объектов, диагностируемых методом акустической эмиссии – тонкостенных резервуаров, труб и т.п. Особенности применения метода для технической диагностики состояния объектов различного рода рассмотрены в работах [1, 6, 7, 9 – 11, 19, 20, 24, 26, 28, 30].

Предваряя исследование закономерностей излучения волн Лэмба пульсирующими источниками, которые располагаются в объеме изотропного упругого слоя, рассмотрим схему решения граничной задачи о возбуждении гармонических волн системой объемных и поверхностных нагрузок.

1. Постановка и схема решения граничной задачи о возбуждении осесимметричных, радиально распространяющихся волн Лэмба внешними силами, существующими в объеме и на поверхности изотропного упругого слоя.

Предположим, что внешние силы, распределение которых в объеме V изотропного упругого слоя задано вектором объемной плотности $\vec{f}^*(x_k)e^{i\omega t}$ ($\vec{f}^*(x_k)$ – амплитудное значение вектора объемной плотности; x_k – k -ая ($k = 1, 2, 3$) координатная ось правовинтовой декартовой системы координат (рис. 1); $i = \sqrt{-1}$; ω – круговая частота смены знака внешних сил; t – время), а на поверхности S слоя – поверхностными плотностями $\sigma_{3j}^*(x_k)e^{i\omega t}$ ($j = 1, 2, 3$).

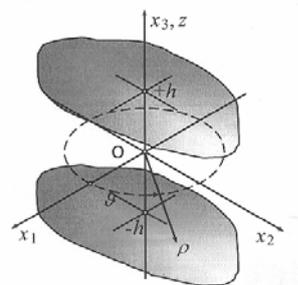


Рис. 1

В этом случае вектор смещения $\bar{\mathbf{u}}(x_k)e^{i\omega t}$ материальных частиц деформируемого твердого тела удовлетворяет уравнению установившихся гармонических колебаний, которое в терминах амплитуд физических полей, т. е. величин $\bar{\mathbf{f}}^*(x_k)$, $\sigma_{3j}^*(x_k)$ и $\bar{\mathbf{u}}(x_k)$ записывается в следующем виде [12]:

$$(\lambda + 2G)\text{grad div } \bar{\mathbf{u}}(x_k) - G \text{rot rot } \bar{\mathbf{u}}(x_k) + \rho_0 \omega^2 \bar{\mathbf{u}}(x_k) - \bar{\mathbf{f}}^*(x_k) = 0 \forall x_k \in V, \quad (1)$$

где λ , G и ρ_0 – модули упругости (константы Ламе) и плотность изотропного твердого тела.

Единственность решения векторного уравнения (1) обеспечивается граничными условиями, которые имеют смысл третьего закона Ньютона и записываются в следующем виде:

$$2G\varepsilon_{3j}(x_k) + \delta_{3j}\lambda e(x_k) - \sigma_{3j}^*(x_k) = 0 \forall x_k \in S, \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где $\varepsilon_{3j}(x_k)$ – амплитудное значение гармонически изменяющегося во времени по закону $e^{i\omega t}$ компонента тензора бесконечно малых деформаций; δ_{3j} – символ Кронекера, равный единице при $j = 3$ и равный нулю при $j \neq 3$; $e(x_k) = \text{div } \bar{\mathbf{u}}(x_k)$ – дилатация или амплитуда объемной деформации элемента твердого тела.

Первая попытка решения задачи (1) – (2) для пространственно-развитых волн Лэмба зафиксирована в работе [4]. Позже, в 1985 г. опубликована работа [13], в которой автор, используя теоремы Бетти [12], построил формальные решения для компонентов тензора Грина. Однако, в [4, 13] не представлены расчетные соотношения, которые можно использовать в качестве базовых при построении математических моделей процессов возбуждения упругих волн.

Для эффективного решения задачи (1) – (2) необходимо иметь в своем распоряжении соотношения, которые определяют соответствующие свободные колебания (собственные функции или нормальные волны), т. е. общие решения задачи (1) – (2) при $\bar{\mathbf{f}}^*(x_k) = 0$ и $\sigma_{3j}^*(x_k) = 0$. Указанная однородная граничная задача элементарно решена в терминах скалярного и векторного потенциалов [12]. В цилиндрической системе координат, начало которой располагаем срединной плоскости $z = 0$ изотропной пластины (рис. 1), в случае осесимметричных, радиально распространяющихся, волн при $u_\varphi(\rho, z) \equiv 0$, результат общего решения однородной граничной задачи (1) – (2) в дальней, относительно начала координат, области представим в виде неортогонального разложения по симметричным относительно срединной плоскости слоя (индекс s) и антисимметричным (индекс a) волнам Лэмба. При этом вектор смещения материальных частиц упругого слоя определяем выражениями

$$\bar{\mathbf{u}}(\rho, z)e^{i\omega t} = \left\{ \sum_{n=1}^N \bar{\mathbf{u}}^s(\rho, z, \gamma_n) + \sum_{m=1}^M \bar{\mathbf{u}}^a(\rho, z, \gamma_m) \right\} e^{i\omega t}, \quad (3)$$

где N и M – количество распространяющихся на данной частоте ω симметричных и антисимметричных волн Лэмба с амплитудами векторов смещений материальных частиц $\bar{\mathbf{u}}^s(\rho, z, \gamma_n)$ и $\bar{\mathbf{u}}^a(\rho, z, \gamma_m)$, соответственно; γ_n и γ_m – корни дисперсионных уравнений $\Delta_s(\gamma_n) = 0$ и $\Delta_a(\gamma_m) = 0$, которые имеют смысл условий существования симметричных (индекс s) и антисимметричных (индекс a) волн Лэмба. Условия существования или дисперсионные уравнения имеют следующий вид:

$$\Delta_s(\gamma_n) = (\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \cos(\alpha_n h) \sin(\beta_n h) + 4\gamma_n^2 \alpha_n \beta_n \sin(\alpha_n h) \cos(\beta_n h) = 0, \quad (4)$$

$$\Delta_a(\gamma_m) = (\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \sin(\alpha_m h) \cos(\beta_m h) + 4\gamma_m^2 \alpha_m \beta_m \cos(\alpha_m h) \sin(\beta_m h) = 0, \quad (5)$$

где γ_q , β_q и α_q ($q = n, m$) – проекции волновых векторов \vec{k}_ℓ и \vec{k}_s не взаимодействующих продольных волн (индекс ℓ) и волн сдвига (индекс s) на координатные оси ρ и z . Модули этих векторов k_ℓ и k_s определяются частотой смены знака НДС пластины по следующим формулам: $k_\ell = \omega / \sqrt{(\lambda + 2G) / \rho_0}$; $k_s = \omega / \sqrt{G / \rho_0}$ ($\gamma_q^2 + \alpha_q^2 = k_\ell^2$ и $\gamma_q^2 + \beta_q^2 = k_s^2$). Аналитические свойства, качественные и количественные характеристики дисперсионных уравнений (4) и (5) с исчерпывающей полнотой исследованы в [5].

Компоненты вектора $\vec{u}^s(\rho, z, \gamma_n)$ смещения материальных частиц в цилиндрическом фронте симметричной волны Лэмба определяем следующим образом:

$$u_\rho^s(\rho, z, \gamma_n) = A_n(\gamma_n) u_\rho^s(z, \gamma_n) H_1^{(2)}(\gamma_n \rho),$$

$$u_z^s(\rho, z, \gamma_n) = A_n(\gamma_n) u_z^s(z, \gamma_n) H_0^{(2)}(\gamma_n \rho), \quad (6)$$

где $A_n(\gamma_n)$ – амплитудный множитель n -ой симметричной волны Лэмба, который определяется в ходе решения неоднородной граничной задачи (1) – (2); $u_q^s(z, \gamma_n)$ ($q = \rho, z$) – собственные функции (компоненты вектора $\vec{u}^s(z, \gamma_n)$) однородной граничной задачи (1) – (2); $H_\nu^{(2)}(\gamma_n \rho)$ ($\nu = 0, 1$) – функция Ханкеля второго рода порядка ν . Собственные функции определяются согласно таким формулам:

$$u_\rho^s(z, \gamma_n) = -[a_\rho^s \cos(\alpha_n z) + b_\rho^s \cos(\beta_n z)];$$

$$u_z^s(z, \gamma_n) = -[a_z^s \sin(\alpha_n z) + b_z^s \sin(\beta_n z)] \quad (7)$$

$$\left(a_\rho^s = [(\gamma_n h)^2 - (\beta_n h)^2] \cdot \frac{\sin(\beta_n h)}{(\beta_n h)}; \quad b_\rho^s = 2(\alpha_n h) \sin(\alpha_n h); \right.$$

$$\left. a_z^s = [(\gamma_n h)^2 - (\beta_n h)^2] \cdot \frac{(\alpha_n h) \sin(\beta_n h)}{(\gamma_n h)(\beta_n h)}; \quad b_z^s = -2 \frac{(\gamma_n h)(\alpha_n h) \sin(\alpha_n h)}{(\beta_n h)} \right).$$

Компоненты вектора $\vec{u}^a(\rho, z, \gamma_m)$ определяются следующими расчетными соотношениями:

$$u_\rho^a(\rho, z, \gamma_m) = B_m(\gamma_m) u_\rho^a(z, \gamma_m) H_1^{(2)}(\gamma_m \rho),$$

$$u_z^a(\rho, z, \gamma_m) = B_m(\gamma_m) u_z^a(z, \gamma_m) H_0^{(2)}(\gamma_m \rho), \quad (8)$$

где $B_m(\gamma_m)$ – амплитудный множитель m -ой моды антисимметричных волн Лэмба, который определяется в результате решения неоднородной граничной задачи (1) – (2);

$u_q^a(z, \gamma_m)$ ($q = \rho, z$) – собственные функции (компоненты вектора $\vec{u}^a(z, \gamma_m)$) одно-
родной граничной задачи (1) – (2), для которых имеем формулы

$$u_\rho^a(z, \gamma_m) = -\left[a_\rho^a \sin(\alpha_m z) + b_\rho^a \sin(\beta_m z) \right];$$

$$u_z^a(z, \gamma_m) = \left[a_z^a \cos(\alpha_m z) + b_z^a \cos(\beta_m z) \right] \quad (9)$$

$$\left(a_\rho^a = \alpha_m h; \quad b_\rho^a = -\left[(\gamma_m h)^2 - (\beta_m h)^2 \right] \cdot \frac{(\alpha_m h) \sin(\alpha_m h)}{2(\gamma_m h)^2 \sin(\beta_m h)} \right);$$

$$a_z^a = \frac{(\alpha_m h)^2}{\gamma_m h}; \quad b_z^a = \left[(\gamma_m h)^2 - (\beta_m h)^2 \right] \cdot \frac{(\alpha_m h) \sin(\alpha_m h)}{2(\gamma_m h)(\beta_m h) \sin(\beta_m h)}.$$

Отметим, что свойства, характеристики дисперсионных уравнений (4) и (5) ис-
следованы в монографии [5].

Для случая осевой симметрии и равенства нулю окружного компонента $u_\theta(\rho, z)$
вектора смещения материальных частиц упругого слоя для граничной задачи (1) – (2)
имеем такие равенства:

$$\frac{k_s^2}{k_\ell^2} \left(-\frac{1}{\rho^2} u_\rho + \frac{1}{\rho} u_{\rho, \rho} + u_{\rho, \rho\rho} + u_{z, \rho z} \right) + u_{\rho, zz} - u_{z, \rho z} + k_s^2 u_\rho = \frac{f_\rho^*}{G}; \quad (10)$$

$$\frac{1}{\rho} u_{\rho, z} + u_{\rho, \rho z} + u_{z, zz} - \frac{k_\ell^2}{k_s^2} \left(\frac{1}{\rho} u_{\rho, z} - \frac{1}{\rho} u_{z, \rho} - u_{z, \rho\rho} + u_{\rho, \rho z} \right) + k_\ell^2 u_z = \frac{f_z^*}{\lambda + 2G}; \quad (11)$$

$$\left[\frac{k_s^2}{k_\ell^2} \left(u_{z, z} + \frac{1}{\rho} u_\rho + u_{\rho, \rho} \right) - 2 \left(\frac{1}{\rho} u_\rho + u_{\rho, \rho} \right) \right] \Big|_{z=\pm h} = \frac{\sigma_{zz}^*(\rho, \pm h)}{G}; \quad (12)$$

$$\left(u_{\rho, z} + u_{z, \rho} \right) \Big|_{z=\pm h} = \frac{\sigma_{z\rho}^*(\rho, \pm h)}{G}, \quad (13)$$

где запятая между индексами означает операцию дифференцирования стоящего до
запятой выражения по координатам, символы которых проставлены после запятой.

Приступая к решению граничной задачи (10) – (13), оговорим безусловную физи-
ческую реализуемость источника внешних сил. Это влечет за собой следующие пре-
дельные условия для плотностей внешних сил:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\rho f_\beta^*(\rho, z), \rho \sigma_{z\beta}^*(\rho, \pm h) \right] = 0 \quad (\beta = \rho, z). \quad (14)$$

Указанная система внешних сил порождает волновое поле смещений, которое ис-
чезает на бесконечном удалении от источника, т. е. обращаются в нуль смещения и
деформации и выполняются предельные условия вида

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\rho u_\beta(\rho, z), \rho u_{\beta, \eta}(\rho, z) \right] = 0 \quad (\beta, \eta = \rho, z). \quad (15)$$

Физическое содержание предельных условий (14) и (15) позволяет утверждать,
что существуют интегральные преобразования

$$u_\rho(\gamma, z) = \int_0^\infty \rho u_\rho(\rho, z) J_1(\gamma \rho) d\rho, \quad \left\{ \begin{array}{l} f_\rho^*(\gamma, z) \\ \sigma_{z\rho}^*(\gamma, z) \end{array} \right\} = \int_0^\infty \rho \left\{ \begin{array}{l} f_\rho^*(\rho, z) \\ \sigma_{z\rho}^*(\rho, z) \end{array} \right\} J_1(\gamma \rho) d\rho, \quad (16)$$

которые будем называть прямым интегральным преобразованием Ханкеля [8] для радиальных компонентов векторов сил и смещений. В соотношениях (16) параметр интегрального преобразования γ имеет размерность волнового числа и определяется в ходе последующего решения граничной задачи.

Прятому преобразованию (16) соответствует обратное преобразование, которое определяется следующими выражениями [8]:

$$u_\rho(\rho, z) = \int_0^\infty \gamma u_\rho(\gamma, z) J_1(\gamma \rho) d\gamma, \quad \left\{ \begin{array}{l} f_\rho^*(\rho, z) \\ \sigma_{z\rho}^*(\rho, z) \end{array} \right\} = \int_0^\infty \gamma \left\{ \begin{array}{l} f_\rho^*(\gamma, z) \\ \sigma_{z\rho}^*(\gamma, z) \end{array} \right\} J_1(\gamma \rho) d\gamma. \quad (17)$$

Воздействуя интегральным преобразованием (16) на левую и правую части уравнения (10) и принимая во внимание предельные соотношения (15), несложно показать, что

$$\int_0^\infty \rho \left(-\frac{1}{\rho^2} u_\rho + \frac{1}{\rho} u_{\rho,\rho} + u_{\rho,\rho\rho} \right) J_1(\gamma \rho) d\rho = -\gamma^2 u_\rho(\gamma, z);$$

$$\int_0^\infty \rho u_{z,\rho} J_1(\gamma \rho) d\rho = -\gamma \int_0^\infty \rho u_z(\rho, z) J_0(\gamma \rho) d\rho.$$

Последнее соотношение позволяет ввести прямое и обратное интегральное преобразование Ханкеля для аксиальных компонентов векторов смещений и внешних сил соотношениями

$$u_z(\gamma, z) = \int_0^\infty \rho u_z(\rho, z) J_0(\gamma \rho) d\rho, \quad \left\{ \begin{array}{l} f_z^*(\gamma, z) \\ \sigma_{zz}^*(\gamma, z) \end{array} \right\} = \int_0^\infty \rho \left\{ \begin{array}{l} f_z^*(\rho, z) \\ \sigma_{zz}^*(\rho, z) \end{array} \right\} J_0(\gamma \rho) d\rho, \quad (18)$$

$$u_z(\rho, z) = \int_0^\infty \gamma u_z(\gamma, z) J_0(\gamma \rho) d\gamma, \quad \left\{ \begin{array}{l} f_z^*(\rho, z) \\ \sigma_{zz}^*(\rho, z) \end{array} \right\} = \int_0^\infty \gamma \left\{ \begin{array}{l} f_z^*(\gamma, z) \\ \sigma_{zz}^*(\gamma, z) \end{array} \right\} J_0(\gamma \rho) d\gamma. \quad (19)$$

Так как

$$\int_0^\infty \rho \left(\frac{1}{\rho} u_\rho + u_{\rho,\rho} \right) J_0(\gamma \rho) d\rho = \gamma u_\rho(\gamma, z); \quad \int_0^\infty \rho (u_{z,\rho} + \rho u_{z,\rho\rho}) J_0(\gamma \rho) d\rho = -\gamma^2 u_z(\gamma, z),$$

то уравнения установившихся гармонических колебаний (10) и (11) для интегральных образов компонентов вектора смещения и внешних сил записываем в таком виде:

$$\alpha^2 \frac{k_s^2}{k_\ell^2} u_\rho(\gamma, z) + \frac{d^2 u_\rho(\gamma, z)}{dz^2} + \gamma \left(1 - \frac{k_s^2}{k_\ell^2} \right) \frac{du_\rho(\gamma, z)}{dz} = \frac{f_\rho^*(\gamma, z)}{G}; \quad (20)$$

$$\beta^2 \frac{k_\ell^2}{k_s^2} u_z(\gamma, z) + \frac{d^2 u_z(\gamma, z)}{dz^2} + \gamma \left(1 - \frac{k_\ell^2}{k_s^2} \right) \frac{du_z(\gamma, z)}{dz} = \frac{f_z^*(\gamma, z)}{\lambda + 2G} \quad (21)$$

$$(\alpha^2 = k_\ell^2 - \gamma^2 \text{ и } \beta^2 = k_s^2 - \gamma^2).$$

Общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (20), (21) получим в соответствии со стандартным методом вариации постоянных в виде

$$u_\rho(\gamma, z) = -\gamma[A + A(z)]\cos \alpha z - \gamma[B + B(z)]\sin \alpha z + \beta[C + C(z)]\sin \beta z - \beta[D + D(z)]\cos \beta z, \quad (22)$$

$$u_z(\gamma, z) = -\alpha[A + A(z)]\sin \alpha z + \alpha[B + B(z)]\cos \alpha z + \gamma[C + C(z)]\cos \beta z + \gamma[D + D(z)]\sin \beta z, \quad (23)$$

при условии, что

$$-\gamma A'(z)\cos \alpha z - \gamma B'(z)\sin \alpha z + \beta C'(z)\sin \beta z - \beta D'(z)\cos \beta z = 0, \quad (24)$$

$$-\alpha A'(z)\sin \alpha z + \alpha B'(z)\cos \alpha z + \gamma C'(z)\cos \beta z + \gamma D'(z)\sin \beta z = 0, \quad (25)$$

где штрих обозначает производную по координате z .

Подставляя предполагаемые решения (22) и (23) в уравнения (20) и (21), получаем два неоднородных алгебраических уравнения относительно производных функций $A(z), \dots, D(z)$, которые совместно с условиями (24), (25) образуют неоднородную систему алгебраических уравнений, которая разрешается единственным образом относительно искомых величин $A'(z), \dots, D'(z)$. Интегрируя полученный результат, определяем искомые функции $A(z), \dots, D(z)$.

Граничные условия (12), (13) после воздействия на них интегральными преобразованиями (18) и (17), соответственно, принимают следующий вид:

$$\left. \left\{ \frac{k_s^2}{k_l^2} \left[\frac{du_z(\gamma, z)}{dz} + \gamma u_\rho(\gamma, z) \right] - 2\gamma u_\rho(\gamma, z) \right\} \right|_{z=\pm h} = \frac{\sigma_{zz}^*(\gamma, \pm h)}{G}; \quad (26)$$

$$\left[\frac{du_\rho(\gamma, z)}{dz} - \gamma u_z(\gamma, z) \right] \Big|_{z=\pm h} = \frac{\sigma_{\rho z}^*(\gamma, \pm h)}{G}. \quad (27)$$

Подстановка предполагаемых решений (22), (23) в граничные условия (26), (27) превращает их в неоднородную систему алгебраических уравнений, которая единственным образом разрешается относительно искомых констант A, \dots, D .

При выполнении обратных интегральных преобразований установлено, что соотношения для расчета констант A и D образуют особенности типа простых полюсов при значениях параметра интегрального преобразования γ , равных волновым числам распространяющихся на данной частоте симметричных волн Лэмба. Соотношения, определяющие константы B и C , образуют особенности типа полюсов первого порядка при значениях параметра γ , равных волновым числам антисимметричных волн Лэмба.

Определив вычеты в полюсах первого порядка, получаем равенства

$$u_\rho^s(\rho, z, \gamma_n) = \frac{\pi i A_n(\gamma_n) \gamma_n \beta_n}{2G \Delta'_s(\chi_n) h (\gamma_n^2 - \beta_n^2) \sin(\beta_n h)} u_\rho^s(z, \gamma_n) J_1(\gamma_n \rho);$$

$$u_z^s(\rho, z, \gamma_n) = \frac{\pi i A_n(\gamma_n) \gamma_n \beta_n}{2G \Delta'_s(\chi_n) h (\gamma_n^2 - \beta_n^2) \sin(\beta_n h)} u_z^s(z, \gamma_n) J_0(\gamma_n \rho); \quad (28)$$

$\Delta'_s(\chi_n) = d\Delta_s(\chi_n)/d\chi_n$; $\chi_n = \gamma_n^2$; γ_n — n -ый корень дисперсионного уравнения (4).

Амплитудный множитель цилиндрической осесимметричной, симметричной относительно срединной плоскости пластинки, волны Лэмба определяется выражением

$$\begin{aligned}
A_n(\gamma_n) &= -\frac{(\gamma_n^2 - \beta_n^2)\gamma_n\beta_n}{hk_s^2\alpha_n\sin(\alpha_n h)} \times \\
&\times \int_0^{\infty} \int_{-h}^h \rho \left[f_\rho^*(\rho, z) u_\rho^s(z, \gamma_n) J_1(\gamma_n \rho) + f_z^*(\rho, z) u_z^s(z, \gamma_n) J_0(\gamma_n \rho) \right] dz d\rho + \\
&+ 2\beta_n \gamma_n \cos(\beta_n h) \int_0^{\infty} \rho \left[\sigma_{z\rho}^*(\rho, h) - \sigma_{z\rho}^*(\rho, -h) \right] J_1(\gamma_n \rho) d\rho + \\
&+ (\gamma_n^2 - \beta_n^2) \sin(\beta_n h) \int_0^{\infty} \rho \left[\sigma_{zz}^*(\rho, h) + \sigma_{zz}^*(\rho, -h) \right] J_0(\gamma_n \rho) d\rho. \quad (29)
\end{aligned}$$

Так как $J_\nu(\gamma_n \rho) = \left[H_\nu^{(1)}(\gamma_n \rho) + H_\nu^{(2)}(\gamma_n \rho) \right] / 2$, то, отбрасывая функцию Ханкеля первого рода, которая при выбранной зависимости от времени $e^{i\omega t}$ соответствует приходящей из бесконечности цилиндрической волны, что противоречит физическому смыслу решаемой задачи, получаем окончательное выражение для расчета компонентов вектора смещения $\vec{u}^s(\rho, z, \gamma_n)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_\rho^s(\rho, z, \gamma_n) &= \frac{\pi i A_n(\gamma_n) \gamma_n \beta_n}{4G\Delta'_S(\chi_n) h (\gamma_n^2 - \beta_n^2) \sin(\beta_n h)} u_\rho^s(z, \gamma_n) H_1^{(2)}(\gamma_n \rho), \\
u_z^s(\rho, z, \gamma_n) &= \frac{\pi i A_n(\gamma_n) \gamma_n \beta_n}{4G\Delta'_S(\chi_n) h (\gamma_n^2 - \beta_n^2) \sin(\beta_n h)} u_z^s(z, \gamma_n) H_0^{(2)}(\gamma_n \rho), \quad (30)
\end{aligned}$$

Выполнив все необходимые действия, получим для антисимметричных относительно срединной плоскости пластины волн Лэмба следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned}
u_\rho^a(\rho, z, \gamma_m) &= \frac{\pi i B_m(\gamma_m) \gamma_m}{4G\Delta'_a(\chi_m) \alpha_m h} u_\rho^a(z, \gamma_m) H_1^{(2)}(\gamma_m \rho), \\
u_z^a(\rho, z, \gamma_m) &= \frac{\pi i B_m(\gamma_m) \gamma_m}{4G\Delta'_a(\chi_m) \alpha_m h} u_z^a(z, \gamma_m) H_0^{(2)}(\gamma_m \rho), \quad (31)
\end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
B_m(\gamma_m) &= \frac{\gamma_m (\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \cos(\beta_m h)}{k_s^2 \alpha_m^2 h \cos(\alpha_m h)} \int_0^{\infty} \int_{-h}^h \rho \left[f_\rho^*(\rho, z) u_\rho^a(z, \gamma_m) J_1(\gamma_m \rho) + \right. \\
&\quad \left. + f_z^*(\rho, z) u_z^a(z, \gamma_m) J_0(\gamma_m \rho) \right] dz d\rho - \\
&- 2\beta_m \gamma_m \sin(\beta_m h) \int_0^{\infty} \rho \left[\sigma_{z\rho}^*(\rho, h) + \sigma_{z\rho}^*(\rho, -h) \right] J_1(\gamma_m \rho) d\rho + \\
&+ (\gamma_m^2 - \beta_m^2) \cos(\beta_m h) \int_0^{\infty} \rho \left[\sigma_{zz}^*(\rho, h) - \sigma_{zz}^*(\rho, -h) \right] J_0(\gamma_m \rho) d\rho. \quad (32)
\end{aligned}$$

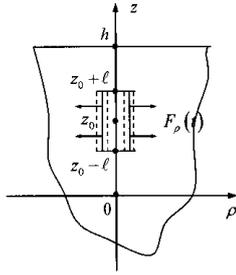


Рис. 2

2. Модельный пример. Излучение волн Лэмба линейным пульсирующим источником.

Рассмотрим линейный источник, который имеет вид вертикально ориентированной цилиндрической полости (рис. 2) кругового поперечного сечения. Высота полости 2ℓ , радиус поперечного сечения R_0 . Координата срединного поперечного сечения, которое делит полость на две равные по длине части, обозначена на рис. 2 символом z_0 .

На боковых стенках полости $\rho = R_0$ действует радиально ориентированная сила $F_\rho(t) = F_\rho(\omega)e^{i\omega t}$. Так как шумы акустической эмиссии формируются в результате разгрузки некоторых, предварительно напряженных, областей пластины, частотно-зависимую амплитуду $F_\rho(\omega)$ гармонически изменяющейся во времени силы $F_\rho(t)$ можно определить следующим образом: $F_\rho(\omega) = 2\pi F_0 / (\gamma R_0)$, где F_0 – константа, пропорциональная уровню начальных напряжений; $\gamma = \omega / v_f$ – волновое число гармонической волны; v_f – её фазовая скорость. Очевидно, что рассматриваемый линейный источник при $z_0 \neq 0$ возбуждает симметричные и асимметричные радиально распространяющиеся волны Лэмба.

Для того, чтобы воспользоваться выражениями (29) и (32) для расчета амплитудных множителей симметричных и антисимметричных волн Лэмба, формально представим радиальный компонент вектора силы $F_\rho(\omega)$ как произведение объемной плотности $f_\rho^* = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [F_\rho(\omega) / (8\pi R_0 \ell \Delta)]$, где 2Δ – «толщина» стенок полости, на «объем» боковой поверхности полости $V = 8\pi R_0 \ell \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta$. Такое представление силовых факторов при $R_0 \rightarrow 0$ позволяет записать следующие соотношения для расчета компонентов вектора смещения материальных частиц:

а) симметричные осесимметрично распространяющиеся волны Лэмба (множитель $e^{i\omega t}$ опущен):

$$\begin{aligned} u_\rho^s(\rho, z, \gamma_n) &= -iU_0 F_s(\gamma_n, \Gamma) [a_\rho^s \cos \alpha_n z + b_\rho^s \cos \beta_n z] H_1^{(2)}(\gamma_n \rho), \\ u_z^s(\rho, z, \gamma_n) &= -iU_0 F_s(\gamma_n, \Gamma) [a_z^s \sin \alpha_n z + b_z^s \sin \beta_n z] H_0^{(2)}(\gamma_n \rho), \end{aligned} \quad (33)$$

где $U_0 = \pi F_0 / (8Gh)$; h – полутолщина пластины; $F_s(\gamma_n, \Gamma) \equiv F_s(\gamma_n, z_0, \ell)$;

$$\begin{aligned} F_s(\gamma_n, z_0, \ell) &= \frac{(\gamma_n h)^2 (\beta_n h)^2 F_s(z_0, \ell)}{(k_s h)^6 (\alpha_n h) \sin(\alpha_n h) [\sin(\beta_n h) / (\beta_n h)] \Delta_0(\gamma_n h)}; \\ F_s(z_0, \ell) &= [(\gamma_n h)^2 - (\beta_n h)^2] \times \\ &\times \frac{\sin(\beta_n h)}{(\beta_n h)} \cos(\alpha_n z_0) \frac{\sin(\alpha_n \ell)}{(\alpha_n \ell)} + 2(\alpha_n h) \sin(\alpha_n h) \cos(\beta_n z_0) \frac{\sin(\beta_n \ell)}{(\beta_n \ell)}; \\ \Delta_0(\gamma_n h) &= \frac{\beta_n}{k_s^4 h} \cdot \frac{d\Delta_s(\chi_n)}{d\chi_n}; \quad \chi_n \equiv \gamma_n^2; \end{aligned}$$

б) антисимметричные осесимметрично распространяющиеся волны Лэмба

$$\begin{aligned} u_\rho^a(\rho, z, \gamma_m) &= iU_0 F_a(\gamma_m, \Gamma) \left[a_\rho^a \sin \alpha_m z + b_\rho^a \sin \beta_m z \right] H_1^{(2)}(\gamma_m \rho), \\ u_z^a(\rho, z, \gamma_m) &= -iU_0 F_a(\gamma_m, \Gamma) \left[a_z^a \cos \alpha_m z + b_z^a \cos \beta_m z \right] H_0^{(2)}(\gamma_m \rho), \end{aligned} \quad (34)$$

$$F_a(\gamma_m, \Gamma) \equiv F_a(\gamma_m, z_0, \ell);$$

$$F_a(\gamma_m, z_0, \ell) = \frac{\left[(\gamma_m h)^2 - (\beta_m h)^2 \right] (\gamma_m h)^2 \cos(\beta_m h) F_a(z_0, \ell)}{(k_s h)^6 (\alpha_m h)^2 \cos(\alpha_m h) \Lambda_0(\gamma_m h)};$$

$$\Lambda_0(\gamma_m h) = \frac{\alpha_m}{k_s^4 h} \cdot \frac{d\Delta_a(\chi_m)}{d\chi_m};$$

$$F_a(z_0, \ell) = (\alpha_m h) \sin(\alpha_m z_0) \frac{\sin(\alpha_m \ell)}{(\alpha_m \ell)} -$$

$$- \frac{\left[(\gamma_m h)^2 - (\beta_m h)^2 \right] (\alpha_m h) \sin(\alpha_m h)}{2(\gamma_m h)^2 \sin(\beta_m h)} \sin(\beta_m z_0) \frac{\sin(\beta_m \ell)}{(\beta_m \ell)}.$$

При симметричном расположении линейного источника, т. е. при $z_0 = 0$, амплитудный множитель $F_a(z_0, \ell)$ обращается в нуль и линейный источник генерирует исключительно симметричные волны Лэмба. Если предположить, что длина линейного источника равняется толщине пластины, т. е. $\ell = h$, то ситуация по своему физическому содержанию становится эквивалентной случаю, который рассмотрен в [29]. В работе [29] исследован процесс возбуждения плоских симметричных волн Лэмба продольной, гармонически изменяющейся во времени, силой, которая действовала на торце полуплоскости.

Для линейного источника симметричных волн Лэмба, длина которого равна толщине пластины, выполнен расчет потоков мощности, которые уносятся распространяющимися симметричными волнами Лэмба. Согласно методике, изложенной в монографии [5], радиальный компонент $P_\rho(\omega)$ вектора потока мощности определялся формулой

$$P_\rho(\omega) = \frac{i\pi\omega}{2} \rho \int_{-h}^h \left(\sigma_{\rho\rho} u_\rho^* - \sigma_{\rho\rho}^* u_\rho + \sigma_{\rho z} u_z^* - \sigma_{\rho z}^* u_z \right) dz, \quad (35)$$

где $\sigma_{\rho\rho}$ и $\sigma_{\rho z}$ – нормальные и касательные напряжения; u_ρ и u_z – радиальный и аксиальный компоненты вектора смещения материальных частиц, определенные выражениями (33); звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины.

На рис. 3, в левой полуплоскости рисунка, показаны графики частотно-зависимого изменения потоков мощности, которые уносятся от пульсирующего линейного источника с бесконечно малым радиусом полости R_0 распространяющимися симметричными волнами Лэмба.

По горизонтальной оси левой полуплоскости рис. 3 отложены значения нормированного потока $\hat{P}_\rho(\omega) = P_\rho(\omega)/P_0$, где $P_0 = (\pi F_0)^2 / (32\rho_0 v_s h^2)$. По вертикальной

оси отложены числовые значения безразмерной частоты $\Omega = 2k_s h/\pi$. В правой полуплоскости рис. 3 показаны ветви действительных корней дисперсионного уравнения $\Delta_s(\chi_n) = 0$ симметричных волн Лэмба.

По горизонтальной оси правой полуплоскости рис. 3 отложены значения безразмерного волнового числа $\zeta = 2\gamma h/\pi$.

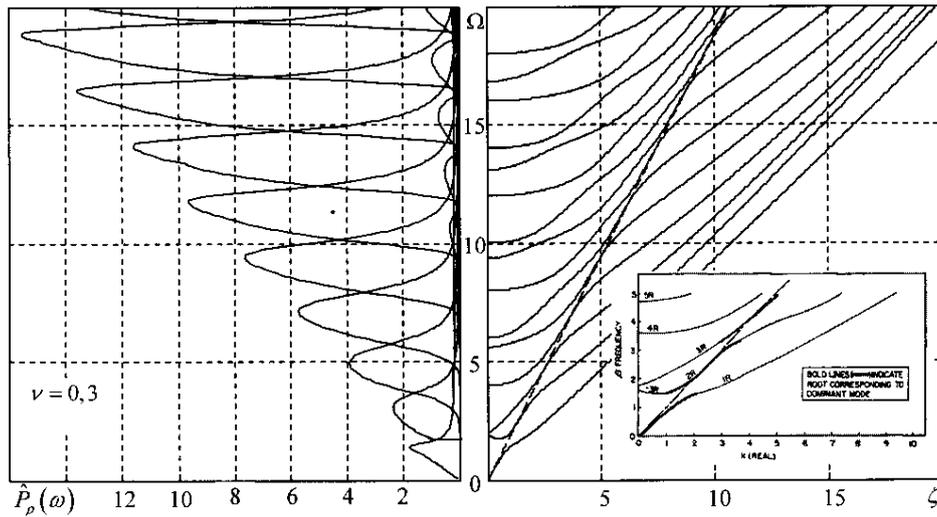


Рис. 3

Видно, что каждая распространяющаяся волна в определенном диапазоне частот переносит наибольшее по сравнению с другими распространяющимися волнами количество энергии. Соответствующий этому частотному диапазону участок ветви действительных волновых чисел выделен полужирной кривой. Заметим, что волновые числа доминирующих по уровню переносимой энергии симметричных волн сгруппированы в ближайшей окрестности прямой $\Omega = k_s \zeta / k_\ell$ (пунктирная линия). Именно в этом диапазоне волновые числа $\gamma \approx k_\ell$ и аксиальный компонент вектора смещения материальных частиц пластины $u_z^s(\rho, z, \gamma_n) \approx 0$.

При этом радиальный компонент $u_\rho^s(\rho, z, \gamma_n) \neq 0$ и практически не изменяется по толщине пластины. Подобная кинематика собственных форм волновых движений в упругом слое наилучшим образом соответствует типу движения, которое придается материальным частицам пластины пульсирующим линейным источником.

Это соответствие является необходимым условием для максимально возможного отбора ультразвуковой волной энергии от источника упругих возмущений. Такой же вывод получен в работе [29], рисунок из которой показан на врезке в поле правой полуплоскости рис. 3.

Полное качественное совпадение результатов решения двух, эквивалентных по физическому содержанию, но различных по математическому описанию, задач можно рассматривать как достаточно убедительное свидетельство достоверности расчетных соотношений (29) и (32).

Отсюда следует, что формальное представление силы, действующей на боковой поверхности пульсирующей полости, в виде произведения объемной плотности на «объем» боковой поверхности полости при устремлении этого «объема» к нулю, не искажает физического содержания последующих математических формулировок.

3. Излучение ультразвуковых волн точечным пульсирующим источником.

Шумы акустической эмиссии генерируются в результате изменения структуры кристаллической решетки [9]. Это означает, что размеры единичного источника имеют порядок расстояний между атомами в узлах кристаллической решетки, что на несколько порядков меньше длин упругих волн, которые могут быть зарегистрированы в реальном эксперименте. Из этого следует, что под единичным источником шумов акустической эмиссии можно понимать кластер из достаточно большого числа кристаллических решеток, максимальные размеры которого существенно меньше длины упругой волны, соответствующей верхней границе частотного диапазона, в пределах которого происходит регистрация сигналов в реальных устройствах. При этом, естественно, форма источника не влияет на характеристики созданного им волнового поля. По этой причине полагаем, что источник шумов акустической эмиссии имеет сферическую форму, причем радиус сферы $R_0 \rightarrow 0$.

Поскольку переход кристаллической решетки в новое состояние происходит скачкообразно [9], постольку выделяемая при этом энергия имеет спектральную плотность $E(\omega) \sim E_0/\omega$, где E_0 – уровень скачка энергии, ω – круговая частота. Принимая во внимание это обстоятельство, заменим реальный кластер источников шумов акустической эмиссии пульсирующей по гармоническому закону $e^{i\omega t}$ сферой радиуса R_0 , которая находится на вертикальной оси Oz цилиндрической системы координат (ρ, ϑ, z) . Координату центра сферы обозначим символом z_0 . На поверхности сферы действует гармонически изменяющаяся во времени центрально симметричная сила $F_R(t) = F_R(\omega)e^{i\omega t}$, амплитудное значение которой $F_R(\omega) = F_0/(k_s R_0)$, где F_0 – сила, пропорциональная выделяемой кластером энергии; $k_s = \omega/v_s$; $v_s = \sqrt{G/\rho_0}$ – скорость волн сдвига в материале пластины.

Представим центросимметричный компонент $F_R(\omega)$ вектора силы в виде произведения объемной плотности $f_R^*(\omega)$ на «объем» поверхности сферы $V_c = 4\pi R_0^2 \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta$, где Δ – «толщина» поверхности сферы. При этом $F_R(\omega) = 4\pi R_0^2 \lim_{\Delta \rightarrow 0} [\Delta \cdot f_R^*(\omega)]$. При вычислении амплитудных множителей симметричных и антисимметричных волн Лэмба в расчетных соотношениях (29) и (32) необходимо перейти к сферической системе координат. Выполнив необходимые вычисления и осуществив в полученном результате предельный переход $R_0 \rightarrow 0$, т. е. перехода к точечному источнику, получаем следующие соотношения для расчета компонентов вектора смещения материальных частиц пластины в точке наблюдения с координатами (ρ, z) :

a) симметричные осесимметрично распространяющиеся волны Лэмба (множитель $e^{i\omega t}$ опущен)

$$\begin{aligned} u_\rho^s(\rho, z, \gamma_n) &= -iU_0 F_s(\gamma_n, z_0) \left[a_\rho^s \cos \alpha_n z + b_\rho^s \cos \beta_n z \right] H_1^{(2)}(\gamma_n \rho), \\ u_z^s(\rho, z, \gamma_n) &= -iU_0 F_s(\gamma_n, z_0) \left[a_z^s \sin \alpha_n z + b_z^s \sin \beta_n z \right] H_0^{(2)}(\gamma_n \rho), \end{aligned} \quad (36)$$

где введены такие обозначения:

$$U_0 = F_0 / [24(\lambda + 2G)h]; \quad F_s(\gamma_n, z_0) = \frac{(\gamma_n h) \left[(\gamma_n h)^2 - (\beta_n h)^2 \right] (\beta_n h)^2 \cos(\alpha_n z_0)}{(k_s h)^5 (\alpha_n h) \sin(\alpha_n h) \Delta_0(\gamma_n h)}.$$

б) антисимметричные осесимметрично распространяющиеся волны Лэмба

$$\begin{aligned}
 u_{\rho}^a(\rho, z, \gamma_m) &= iU_0 F_a(\gamma_m, z_0) \left[a_{\rho}^a \sin \alpha_m z + b_{\rho}^a \sin \beta_m z \right] H_1^{(2)}(\gamma_m \rho), \\
 u_z^a(\rho, z, \gamma_m) &= -iU_0 F_a(\gamma_m, z_0) \left[a_z^a \cos \alpha_m z + b_z^a \cos \beta_m z \right] H_0^{(2)}(\gamma_m \rho), \\
 F_a(\gamma_m, z_0) &= \frac{(\gamma_m h) \left[(\gamma_m h)^2 - (\beta_m h)^2 \right] \cos(\beta_m h) \sin(\alpha_m z_0)}{(k_s h)^5 (\alpha_m h) \cos(\alpha_m h) \Lambda_0(\gamma_m h)}.
 \end{aligned} \tag{37}$$

При симметричном расположении линейного источника, т. е. при $z_0 = 0$, амплитудный множитель $F_a(\gamma_m, z_0)$ обращается в нуль, и точечный источник генерирует исключительно симметричные волны Лэмба.

На рис. 4 показаны фрагмент частотного спектра волновых чисел (правая полуплоскость) симметричных относительно срединной полуплоскости пластины осесимметрично распространяющихся в радиальном направлении волн Лэмба и соответствующие этим нормальным волнам графики безразмерных групповых скоростей $\hat{v}_g = v_g/v_s$. Расчеты выполнены для материала пластины с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. По оси ординат, общей для двух полуплоскостей рис. 4, откладывается безразмерная частота $\Omega = 2k_s h/\pi$. По оси абсцисс в правой полуплоскости рис. 4 откладывается безразмерное волновое число $\zeta = 2\gamma h/\pi$, где γ – действительный корень трансцендентного уравнения $\Delta_S(\chi_n) = 0$ или волновое число распространяющейся n -ой нормальной волны.

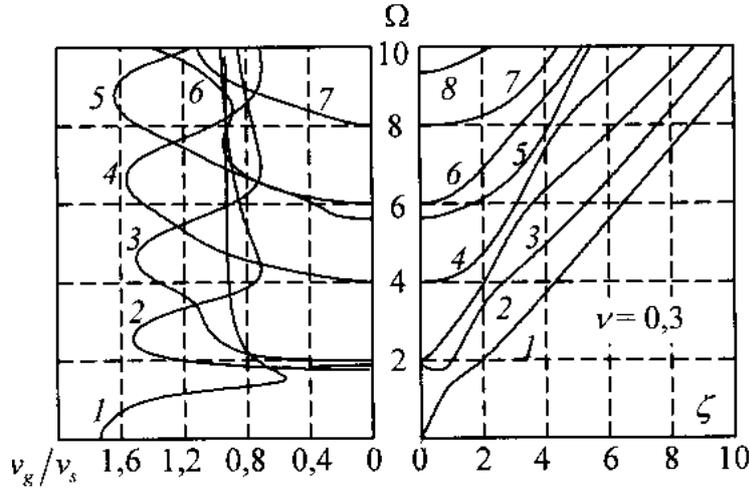


Рис. 4

Видно, что групповые скорости второй и последующих по номеру нормальных волн в окрестности частоты запирания Ω_n^* ($n = 2, 3, \dots$), т. е. частоты, на которой $\gamma_n = 0$ ($\zeta_n = 0$) (на рис. 4 это частоты $\Omega_2^* = 1,87$; $\Omega_3^* = 2,00$; $\Omega_4^* = 4,00$; $\Omega_5^* = 5,61$; $\Omega_6^* = 6,00$; $\Omega_7^* = 8,00$), весьма существенным образом зависят от частоты. Отметим, что на частоте $\Omega_2^* = 1,87$ выбран участок второй ветви действительных корней дисперсионного уравнения (4) симметричных волн Лэмба, на котором при $\Omega > \Omega_2^*$ вы-

полняется условие $d\Omega/d\zeta_2 > 0$. На малом частотном интервале групповая скорость изменяется от нуля до значений порядка $1,6v_S$. На этом же частотном диапазоне безразмерная фазовая скорость $\hat{v}_f = \Omega/\zeta = v_f/v_S$ изменяется от бесконечности до величины порядка $1,5v_S$. Известно [5, 18], что групповая скорость равна скорости переноса энергии от источника упругих возмущений в точку наблюдения.

Отсюда следует, что на частотах запирания Ω_n^* нормальная волна номера n вообще не переносит энергию, а на частотах $\Omega > \Omega_n^*$, но мало отличающихся от Ω_n^* , переносит её малоэффективно. Первая симметричная волна имеет фазовую и групповую скорости равные $v_S\sqrt{2(1+\nu)}$ в диапазоне частот $0 \leq \Omega \leq 1$ и практически равные скорости волн Рэлея $v_R = 0,927v_S$ ($\nu = 0,3$) в диапазоне частот $3 \leq \Omega < \infty$. Равенство фазовой и групповой скоростей является необходимым условием эффективного переноса энергии от источника ультразвуковых волн в точку наблюдения. При этом форма импульсного сигнала практически не изменяется по мере пройденного ультразвуковым сигналом расстояния.

Таким образом, можно предположить, что первая симметричная волна Лэмба является хорошим переносчиком энергии в бесконечно широком диапазоне частот за исключением полосы $1 \leq \Omega \leq 2,5$, где фазовая и групповая скорости существенно зависят от частоты и значительно отличаются друг от друга по величине, что негативным образом сказывается на эффективности процесса переноса энергии. Вторая нормальная волна приобретает примерно равные друг другу фазовую и групповую скорости на частотах $\Omega > 6,5$ и в этом частотном диапазоне переносит энергию со скоростью волн сдвига. Третья симметричная волна становится достаточно эффективным переносчиком энергии, т. е. обеспечивает достаточно малые искажения формы импульсного сигнала при его распространении в частотном диапазоне $\Omega > 12$. По мере увеличения номера симметричной волны Лэмба нижняя граница частотного диапазона, в котором нормальная волна формирует не изменяющийся по форме в процессе распространения импульсный сигнал, отодвигается все дальше в сторону высоких частот.

На рис. 5 показаны энергетические характеристики первых семи симметричных волн Лэмба, графики волновых чисел и групповых скоростей которых представлены на рис. 4. Точечный пульсирующий источник расположен на расстоянии $z_0 = 0,5h$ от срединной плоскости пластины $z = 0$.

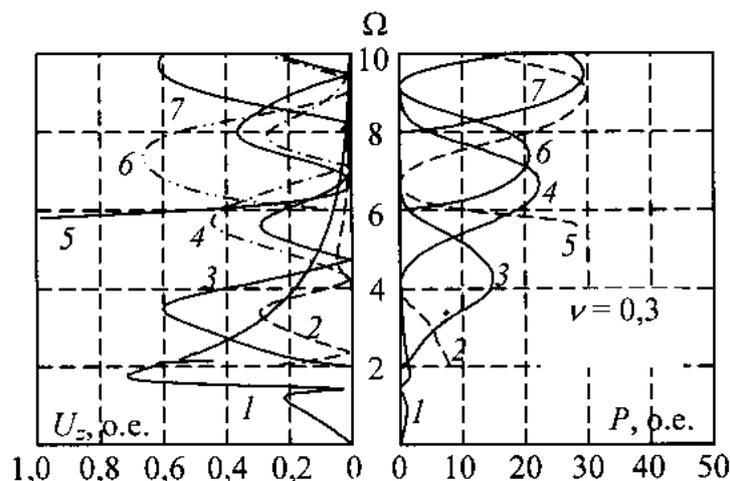


Рис. 5

В правой полуплоскости рис. 5 показаны графики потоков мощности, которые переносятся радиально распространяющимися симметричными волнами Лэмба через цилиндрическую поверхность ($\rho = \text{const}$; $-h \leq z \leq h$). По оси абсцисс в правой полуплоскости рис. 5 откладывается безразмерная величина $P = P_\rho(\omega)/P_0$, где $P_\rho(\omega)$ – радиальный компонент вектора Умова – Пойтинга, т. е. вектора потока мощности, который рассчитывается по формуле (35); $P_0 = F_0^2 G^2 / \left[288 v_s \rho_0 h^2 (\lambda + 2G)^2 \right]$ – размерный множитель.

Очевидно, что подынтегральное выражение (35) зависит от значений координат ρ и z . При этом сумма слагаемых в круглых скобках имеет общим множителем вронскиан [15] комплексно сопряженных функций Ханкеля, т. е. сомножитель $H_0^{(1)}(\gamma\rho)H_1^{(2)}(\gamma\rho) - H_1^{(1)}(\gamma\rho)H_0^{(2)}(\gamma\rho) = 4i/(\pi\gamma\rho)$. По этой причине, и в соответствии с законом сохранения энергии, поток мощности $P_\rho(\omega)$ не зависит от значений радиальной координаты ρ .

На рис. 5, как и на рис. 4, номера n нормальных волн проставлены возле соответствующих кривых.

Видно, что первая, третья, четвертая, шестая и седьмая нормальные волны Лэмба на частотах запираания, которым соответствуют значения $\sin \Omega_n^* = 0$, формируют нулевые потоки мощности. Этому соответствуют нулевые значения безразмерных аксиальных смещений U_z на поверхности $z = h$ пластины. Графики модуля смещения U_z показаны в левой полуплоскости рис. 5. При этом $U_z = \left| u_z^s(\rho, h, \gamma_n) / \left[iU_0 H_0^{(2)}(\gamma_n \rho) \right] \right|$.

Вторая и пятая нормальные волны на своих частотах запираания, числовые значения которых определяются условием $\sin(k_t \Omega_n^* / k_s) = 0$, имеют конечные, но не нулевые значения радиальных и аксиальных смещений. При этом возникают стоячие колебания вблизи источника упругих возмущений. В достаточно удаленную от источника точку наблюдения энергия на частотах запираания второй и пятой нормальной волной не доставляется.

Особенности частотно зависимого изменения энергоемкости симметричных волн Лэмба можно объяснить, опираясь на их кинематические характеристики, т. е. рассматривая величины компонентов вектора смещения материальных частиц пластины на данной частоте в ближайшей окрестности пульсирующего точечного источника. Чем больше смещения, которые присущи той или иной нормальной волне на данной частоте в области нахождения источника, тем больше энергии эта нормальная волна может отобрать у источника и перенести в точку наблюдения. Кинематические характеристики нормальных волн вообще и волн Лэмба в частности определяются вторым и третьим законами Ньютона, т. е. фундаментальными законами движения материальных объектов.

Несимметрично расположенный относительно плоскостей $z = \pm h$ точечный пульсирующий источник наряду с симметричными волнами возбуждает и антисимметричные относительно срединной плоскости пластины осесимметрично распространяющиеся в радиальном направлении волны Лэмба. Компоненты вектора смещения материальных частиц, которые формируются антисимметричными волнами Лэмба, определены выражениями (37). На рис. 6 показаны волновые числа (действительные корни уравнения $\Delta_a(\chi_m) = 0$) и групповые скорости первых семи антисимметричных волн Лэмба в пластине с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$.

Существенные отличия (кроме, естественно, симметричных свойств относительно срединной плоскости пластины) между симметричными и антисимметричными волнами Лэмба просматриваются только для первой нормальной волны в области низких

частот, т. е. в диапазоне $0 \leq \Omega \leq 4$. В этом частотном диапазоне движение материальных частиц во фронте антисимметричной волны ориентировано преимущественно в аксиальном (поперечном) направлении.

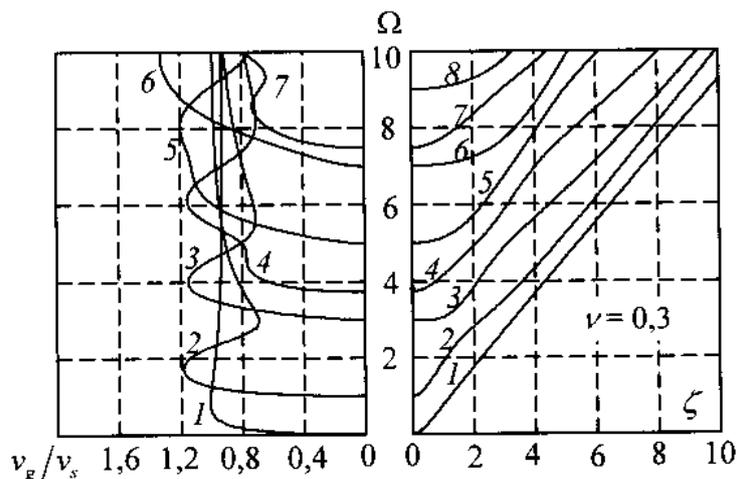


Рис.6

В области частот $\Omega < 1$ кинематические характеристики первой антисимметричной волны практически идентичны кинематическим характеристикам волн поперечного изгиба, математическое описание которых строится на основе гипотез Кирхгофа. В том же частотном диапазоне смещение материальных частиц во фронте первой симметричной волны Лэмба является практически поршневым, радиально ориентированным, движением. В диапазоне частот $\Omega > 4$ кинематические характеристики первой симметричной и первой антисимметричной волн Лэмба становятся подобными друг другу и на частотах $\Omega > 10$ становятся практически неотличимыми друг от друга. В диапазоне частот $5 \leq \Omega < \infty$ сумма первых двух волн Лэмба образует поверхностную волну рэлеевского типа.

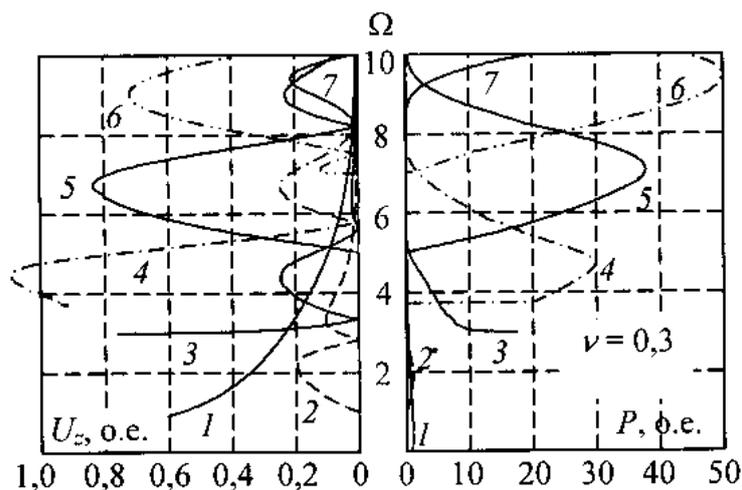


Рис. 7

На рис. 7 показаны потоки мощности (правая полуплоскость), которые уносятся первыми семью антисимметричными волнами Лэмба от пульсирующего точечного источника расположенного на оси Oz цилиндрической системы координат на рас-

стоянии $z_0 = 0.5h$ от срединной плоскости пластины. В левой полуплоскости рис. 7 показаны уровни аксиальных смещений материальных частиц на поверхности пластины. За исключением аксиальных смещений в первой симметричной и в первой антисимметричной волнах Лэмба, нельзя указать каких либо существенных отличий между рис. 5 и 7.

Так как источники шумов акустической эмиссии могут располагаться на различных расстояниях от поверхности пластины, то представляется интересным анализ влияния положения этого источника, т. е. координаты z_0 , на энергетику возбуждаемых им нормальных волн.

На рис. 8 и 9 представлены результаты расчетов потоков мощности, которые уносятся первыми семью симметричными (рис. 8) и антисимметричными (рис. 9) волнами Лэмба.

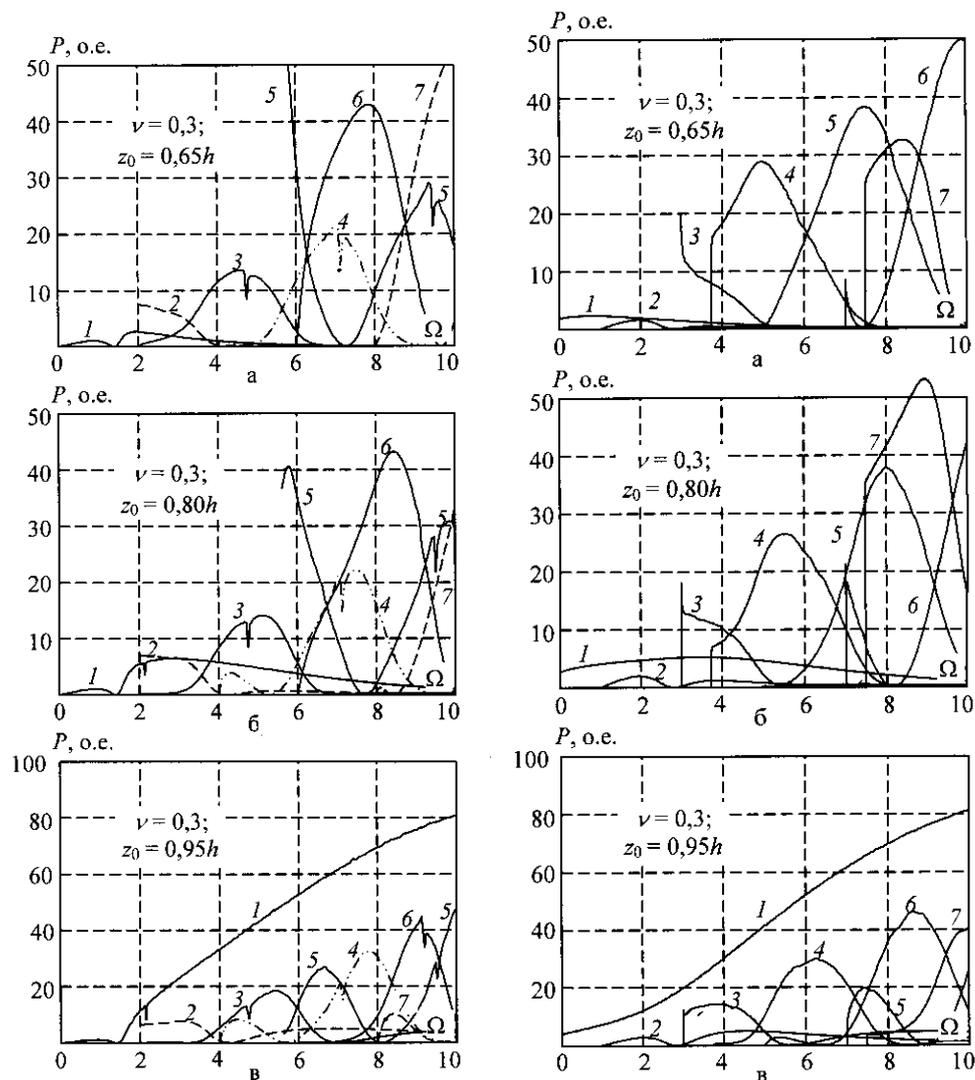


Рис. 8

Рис. 9

В результате сравнительного анализа показанных на рис. 8 и 9 кривых можно сделать вывод, что по мере приближения пульсирующего точечного источника к поверхности пластины, уровни энергии, которые переносятся первой симметричной и первой антисимметричной волнами Лэмба, монотонно возрастают. При расположе-

нии источника в приповерхностном слое $0,9h \leq z_0 < h$ эти волны Лэмба становятся доминирующими по энергоемкости.

Находящиеся под нагрузкой элементы конструкций в большинстве случаев подвержены поперечному изгибу. Это НДС характеризуется тем, что главные нормальные напряжения [12] и, как следствие, объемные деформации, достигают своих максимальных значений на внутренней и внешней поверхности деформируемого элемента конструкции. Из этого следует, что с наибольшей вероятностью источники шумов акустической эмиссии появляются в приповерхностных областях элементов конструкций, деформируемых поперечными нагрузками. По этой причине можно высказать предположение, что энергия источников шумов акустической эмиссии доставляется в точку наблюдения преимущественно двумя первыми, т. е. симметричной и антисимметричной, волнами Лэмба, которые распространяются с одинаковыми, практически не отличающимися от скорости v_s волн сдвига, фазовыми и групповыми скоростями.

Заключение.

На основании общих решений граничной задачи о возбуждении волн Лэмба системой объемных и поверхностных нагрузок произведено моделирование процесса излучения ультразвуковых волн в упругом изотропном слое единичным источником шумов акустической эмиссии для двух модельных конфигураций источника – линейного и точечного. В результате исследования потоков мощности, уносимых симметричными волнами Лэмба, которые возбуждаются линейным пульсирующим источником, установлено полное качественное соответствие представленных результатов с полученными ранее [29] при решении аналогичной задачи в плоской постановке. Это, по мнению авторов, является доказательством достоверности общих решений задачи о возбуждении осесимметричных, радиально распространяющихся волн Лэмба и позволяет утверждать, что предложенная модель точечного пульсирующего источника адекватна реальным источникам шумов акустической эмиссии.

Результаты моделирования динамического НДС пластины, создаваемого точечным пульсирующим источником, позволяют получить ряд выводов качественного содержания о характере переноса энергии упругих колебаний от источника шумов акустической эмиссии к приемному преобразователю на поверхности пластины. Для каждой из мод Лэмба с номерами 2 и выше – как симметричных, так и антисимметричных – наблюдается несоответствие узких частотных диапазонов существенной энергоемкости с диапазонами отсутствия дисперсии скорости – фактора, обуславливающего изменение формы распространяющегося импульса, создаваемого отдельной модальной составляющей. В то же время первая симметричная и первая антисимметричная волны Лэмба обладают существенным преимуществом в энергоемкости во всем частотном диапазоне существования высших мод. При этом на частотах $\Omega > 10$ кинематические характеристики этих двух волн становятся практически неотличимыми друг от друга и их суперпозиция образует недиспергирующую поверхностную волну Рэлея. С приближением источника к поверхности пластины степень доминирования по энергоемкости волн Лэмба с номерами 1 возрастает. Указанные факты позволяют с уверенностью утверждать, что основную роль в переносе энергии шумов акустической эмиссии играют первая симметричная и первая антисимметричная волны Лэмба. Волны же высших номеров, имея пик энергоемкости в частотном диапазоне сильной дисперсии скорости, создают помехоподобный (фоновый) компонент результирующего сигнала.

В работе представлены результаты решения задачи о возбуждении радиально распространяющихся волн Лэмба системой объемных и поверхностных нагрузок, которые заданы в ограниченной области изотропного упругого слоя. На основе общих решений построена математическая модель процесса излучения ультразвуковых волн в изотропной пластине единичным источником шумов акустической эмиссии двух

модельных конфигураций – линейным и точечным. Установлено качественное соответствие результатов решения задачи об излучении радиально распространяющихся волн Лэмба линейным пульсирующим источником результатам, полученным ранее П. Торвиком в решении эквивалентной по физическому содержанию задачи о возбуждении плоских волн Лэмба продольной гармонической силой, действующей на торце полуполосы. На основании модели процесса возбуждения волн Лэмба в пластине точечным источником произведена оценка эффективности отбора энергии упругих колебаний от источника и ее переноса по пластине различными модами на различных частотах. Первая симметричная и первая антисимметричная волны Лэмба, обладающие существенным преимуществом в энергоемкости, имеют определяющее значение при переносе информативной части сигнала акустической эмиссии. Моды с номерами 2 и выше, имеющие наивысшую энергоемкость в узких частотных диапазонах сильной частотной дисперсии скорости, создают помехоподобный (фоновый) сигнал.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу про збудження хвиль Лемба, що розповсюджуються радіально, системою об'ємних і поверхневих навантажень, заданих в обмеженій області ізотропної пружної пластини. На основі загальних розв'язків побудовано математичну модель процесу збудження ультразвукових хвиль в ізотропній пластині одиничним джерелом шумів акустичної емісії двох модельних конфігурацій – лінійної і точкової. Встановлено факт якісної відповідності результатів розв'язання задачі про збудження радіальних хвиль Лемба лінійним пульсуючим джерелом результатам, отриманим раніше П. Торвіком у розв'язку еквівалентної за фізичний змістом задачі про збудження плоских хвиль Лемба поздовжньою гармонічною силою, що діє на торці напівсмуги. На основі моделі процесу збудження хвиль Лемба в пластині точковим джерелом проведено оцінку ефективності відбору енергії пружних коливань від джерела і її перенесення по пластині різними модами на різних частотах.

1. *Акустическая эмиссия и ее применение для неразрушающего контроля в ядерной энергетике* / Под ред. К. Б. Вакара. – М.: Атомиздат, 1980. – С. 10 – 44.
2. *Бобров А. Л.* Анализ изменений динамических характеристик источников акустической эмиссии при статическом нагружении металлических образцов // *Дефектоскопия*. – 2009. – №5. – С. 18 – 24.
3. *Буйло С. И.* Связь параметров акустической эмиссии растущей трещины с коэффициентом интенсивности напряжений и типом напряженного состояния // *Дефектоскопия*. – 2006. – №3. – С. 44 – 48.
4. *Вовк А. Е., Тютюкин В. В.* Возбуждение нормальных волн в плоском упругом волноводе силами, заданными в его поперечном сечении // *Тр. Акуст. ин-та*. – 1969. – Вып. 9. – С. 5 – 26.
5. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 283 с.
6. *Кобзев В. А., Долинский В. М., Рязов Д. Г., Стогний В. Н.* Эффективность использования метода акустической эмиссии для оценки технического состояния оборудования нефтехимического производства // *Техн. диагностика и неразруш. контроль*. – 2007. – №4. – С. 32 – 34.
7. *Кобзев В. А., Марчук Я. С., Андришин М. П., Игуменцев Е. А.* Исследование металла труб газопроводов после длительной эксплуатации с использованием метода акустической эмиссии // *Техн. диагностика и неразруш. контроль*. – 2007. – №4. – С. 3 – 5.
8. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая шк., 1970. – 710 с.
9. *Недосека А. Я.* Основы расчета и диагностики сварных конструкций. – К.: Индпром, 2008. – С. 512 – 640.
10. *Недосека А. Я., Недосека С. А.* Акустическая эмиссия и ресурс конструкций // *Техн. диагностика и неразруш. контроль*. – 2008. – №2. – С. 5 – 19.

11. *Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник* / Под ред. В. В. Клюева. – М.: Машиностроение, 2005. – С. 301 – 328.
12. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 873 с.
13. *Свиридов Ю. Б.* О построении динамического тензора Грина для твердого слоя // Акуст. журн. – 1985. – **31**, №2. – С. 246 – 254.
14. *Скальский В. Р., Рудаковский Д. В., Селивончик Т. В.* Водородная деградация стали 12Х1МФ и ее оценка методом акустической эмиссии // Дефектоскопия. – 2009. – №9. – С. 56 – 69.
15. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовича и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
16. *Aggelis D. G., Kordatos E. Z., Matikas T. E.* Acoustic emission for fatigue damage characterization in metal plates // Mech. Res. Com. – 2011. – **38**, N2. – P. 106 – 110.
17. *Bashchuk E. Yu., Boichuk V. Yu.* Influence of the Inhomogeneity of the Principal Stress State on the Critical Loads of a Plate with a Crack // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N3. – P. 328 – 336.
18. *Biot M. A.* General Theorems of the Equivalence of Group Velocity and Energy Transport // Phys. Rev. – 1957. – **105**, N4. – P. 1129 – 1137.
19. *Grosse C. U., Ohtsu M.* Acoustic Emission Testing. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 416 p.
20. *Gutkin R., Green C. J., Vangrattanachai S., et al.* On acoustic emission for failure investigation in CFRP: Pattern recognition and peak frequency analyses // Mech. Syst. and Signal Proc. – 2011. – **25**, N4. – P. 1393 – 1407.
21. *Guz A. N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N1. – P. 1 – 57.
22. *Kaminsky A. A., Selivanov M. F., Chernoiivan Yu. A.* Initial Fracture of a Viscoelastic Isotropic Plate with Two Collinear Cracks of Equal Length // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N3. – P. 310 – 320.
23. *Kaminsky A. A., Selivanov M. F., Chernoiivan Yu. A.* Subcritical Growth of a Mode III Crack in a Viscoelastic Composite Body // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N3. – P. 293 – 302.
24. *Nair A., Cai C. S.* Acoustic emission monitoring of bridges: Review and case studies // Eng. Struct. – 2010. – **32**, N6. – P. 1704 – 1714.
25. *Ohno K., Ohtsu M.* Crack classification in concrete based on acoustic emission // Construction and Building Materials. – 2010. – **24**, N12. – P. 2339 – 2346.
26. *Riahi M., Shamekh H., Khosrowzadeh B.* Differentiation of Leakage and Corrosion Signals in Acoustic Emission Testing of Aboveground Storage Tanks Floor by Using Artificial Neural Network // Rus. J. Nondestruct. Testing. – 2008. – **44**, N6. – P. 436 – 441.
27. *Sause M. G. R., Gribov A., Unwin A.R., Horn S.* Pattern recognition approach to identify natural clusters of acoustic emission signals // Pattern Recognition Letters. – 2012. – **33**, N1. – P. 17 – 23.
28. *Sause M. G. R., Müller T., Horoschenkoff A., Horn S.* Quantification of failure mechanisms in mode-I loading of fiber reinforced plastics utilizing acoustic emission analysis // Composites Sci. and Technol. – 2012. – **72**, N2. – P. 167 – 174.
29. *Torwick P. J., McClatchey J. J.* Response of an Elastic Plate to a Cyclic Longitudinal Force // J. Acoust. Soc. Amer. – 1968. – **44**. – P. 59 – 64.
30. *Yu J., Ziehl P., Zárate B., Caicedo J.* Prediction of fatigue crack growth in steel bridge components using acoustic emission // J. Construct. Steel Res. – 2011. – **67**, N8. – P. 1254 – 1260.

Поступила 09.11.2012

Утверждена в печать 30.09.2014