

В. Н. Акопян, С. Е. Мирзоян, С. М. Мхитарян
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА РАЗОРВАННОГО СТРИНГЕРА
С УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСОЙ,
СОДЕРЖАЩЕЙ ВЕРТИКАЛЬНУЮ КРАЕВУЮ ТРЕЩИНУ

*Институт механики НАН РА,
пр. Маршала Баграмяна 24/2, 0019, Ереван, Армения;
e-mail: vhakobyan@sci.am*

Abstract. The stress-strain state of a reinforced by an infinite broken stringer elastic infinite strip with an end crack is considered. A solution of the problem is reduced to solving one singular integral equation with fixed singularity. The numerical study of this equation is carried out by the Erdogan – Theocaris method.

Key words: contact problem, elastic infinite strip, infinite broken stringer, end crack, singular integral equation.

Введение.

Многие инженерные конструкции и сооружения по тем или иным причинам содержат концентраторы напряжений типа трещин (разрезов, щелей), инородных включений и накладок, вокруг которых возникают большие, быстроизменяющиеся локальные поля напряжений, которые могут привести к разрушению. Этим и обусловлена актуальность исследований и анализа напряженно-деформированного состояния упругих однородных и составных массивных тел с концентраторами напряжений, которым посвящены много теоретических и экспериментальных работ [2, 4 – 10, 12 – 14, 16, 17]. Ряд работ посвящен также исследованию взаимовлияния различных типов концентраторов напряжений одновременно находящихся в массивных деформируемых телах [1, 11, 15, 18].

В настоящей работе рассмотрено напряженно-деформированное состояние упругой бесконечной полосы с краевой трещиной, усиленной бесконечным разорванным стрингером. Решение задачи сводится к решению одного сингулярного интегрального уравнения с обобщенным ядром Коши, решение которого построено численно-аналитическим методом механических квадратур [4, 12, 14].

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Пусть упругая бесконечная полоса в виде пластины с модулем упругости E и высоты H отнесена к правой прямоугольной системе координат Oxy , на линии $x = 0$ – ослаблена вертикальной краевой трещиной длины l , а на своей границе $y = 0$ усилена бесконечным, разорванным в сечении $x = 0$ стрингером с модулем упругости E_s ($E_s > E$) и площадью поперечного сечения A_s , причем $A_s = h_s \cdot d_s$, где d_s – ширина, а h_s – высота стрингера (рис. 1).

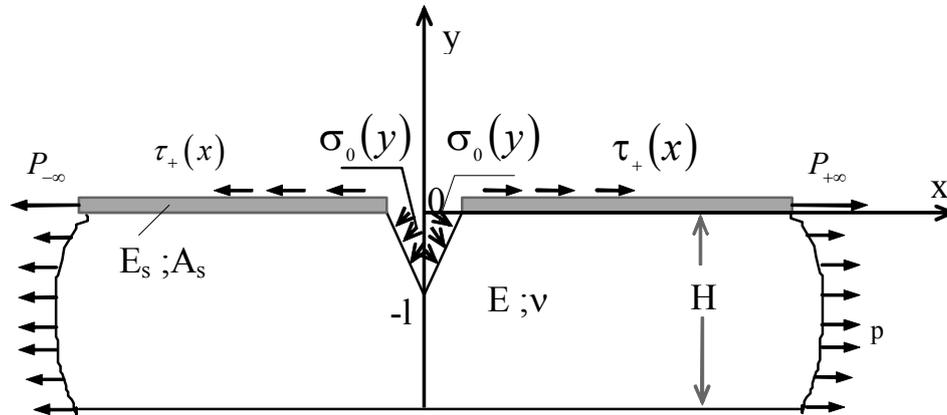


Рис. 1

Пусть полоса на бесконечности растягивается равномерно распределенными силами интенсивности p , а стрингеры на бесконечности растягиваются двумя сосредоточенными силами $P_{\pm\infty} = P_{\infty}$, удовлетворяющими условию совместности деформаций на бесконечности

$$\frac{P_{\infty}}{A_s E_s} = \frac{p}{E}.$$

Кроме того, примем, что нижняя грань полосы $y = -H$ свободна от напряжений, а на берегах трещины действуют нормальные разрывающие напряжения $\sigma_0(y)$, а вдоль срединной линии верхней грани стрингеров действуют тангенциальные силы интенсивности $\tau_+(x)$, причем $\tau_+(x) = -\tau_+(-x)$ ($0 < x < \infty$).

Необходимо определить раскрытие трещины, коэффициент интенсивности разрушающих напряжений $\sigma_x(0, y)$ в вершине трещины $y = -l$, а также контактные напряжения, действующие под стрингерами.

Полагаем, что полоса находится в обобщенном плоском напряженном состоянии, а стрингеры, в соответствии с моделью одномерного упругого континуума [10, 16], находятся в одноосном напряженном состоянии. При этом контакт полосы со стрингерами происходит по всей ширине полосы $d = d_s$, где d – ширина полосы.

При указанных предположениях выведем определяющее уравнение поставленной задачи. Заметим, что ввиду симметричности относительно оси Oy поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи для полубесконечной полосы, занимающей область $D = \{0 \geq y \geq -H, 0 < x < \infty\}$:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= 0; & \sigma_y(x, -H) &= 0; & (0 < x < \infty) \\ \frac{du(x, 0)}{dx} &= \frac{du_s(x)}{dx}; & \tau_{xy}(x, -H) &= 0; & (0 < x < \infty) \\ \tau_{xy}(0, y) &= 0 & & & (-H < y < 0); \\ \sigma_x(0, y) &= \sigma_0(y) & & & (-l < y < 0); \\ u(0, y) &= 0 & & & (-H < y < -l); \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\sigma_x \rightarrow p \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжений в полосе, а $u(x, y)$ и $u_s(x)$ горизонтальные перемещения точек полосы и стрингера, соответственно.

Для построения решения граничной задачи (1.1) сначала рассмотрим вспомогательную задачу для полубесконечной полосы, когда на ее верхней $y = 0$ и нижней $y = -H$ гранях заданы компоненты напряжения σ_y и τ_{xy} , а на лобовой грани $x = 0$ заданы напряжения τ_{xy} и горизонтальные перемещения $u(0, y)$, т.е. рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) = \sigma_y(x, -H) = 0 \quad (0 < x < \infty); \\ \tau_{xy}(x, 0) = \tau_-(x); \quad \tau_{xy}(x, -H) = 0 \quad (0 < x < \infty); \\ \tau_{xy}(0, y) = 0; \quad u(0, y) = u_0(y) \quad (-H < y < 0); \\ \sigma_x \rightarrow p \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\tau_-(x)$ – неизвестные контактные напряжения, действующие под стрингером, а $u_0(y)$ – горизонтальные перемещения точек лобовой грани полубесконечной полосы, которые равны нулю при $-H < y < -l$ и неизвестны при $-l < y < 0$.

Решение последней граничной задачи построим при помощи функции напряжения Эри $F(x, y)$, которую представим в виде

$$\begin{aligned} F(x, y) = \int_0^\infty [A(\lambda)ch(\lambda y) + B(\lambda)sh(\lambda y) + \lambda y(C(\lambda)ch(\lambda y) + D(\lambda)sh(\lambda y))] \times \\ \times \cos \lambda x d\lambda + \sum_{k=1}^\infty e^{-\alpha_k x} [A_k + \alpha_k x C_k] \sin \alpha_k y + \frac{p}{2} y^2 \\ \left(\alpha_k = \frac{\pi k}{H}; \quad 0 \leq x < \infty; \quad -H \leq y \leq 0 \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda), A_k$ и C_k ($k = 1, 2, \dots$) – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Функция $F(x, y)$ связана с компонентами напряжений и перемещений известными формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}; \quad \sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}; \\ u(x, y) = \frac{1}{E} \int \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} dx - \frac{\nu}{E} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + a_0 y + c_0; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E} \int \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} dy - \frac{\nu}{E} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} - a_0 x + b_0, \quad (1.5)$$

где ν - коэффициент Пуассона.

Используя формулы (1.3) – (1.5) и удовлетворяя условиям (1.2), для определения неизвестных коэффициентов, входящих в разложение функции $F(x, y)$, получаем следующие соотношения:

$$A(\lambda) = 0; \quad B(\lambda) = \nu_0 [D(\lambda) - C(\lambda) \operatorname{cth} \nu_0];$$

$$\lambda^2 [B(\lambda) + C(\lambda)] = C_0(\lambda) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\lambda) \lambda_k^3 A_k;$$

$$(\lambda_0 \operatorname{ch} \lambda_0 - sh \nu_0) \lambda^2 D(\lambda) + \lambda^2 \operatorname{ch} \nu_0 B(\lambda) + (\nu_0 sh \nu_0 + \operatorname{ch} \nu_0) \lambda^2 C(\lambda) = \quad (1.6)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_k(\lambda) \alpha_k^3 A_k;$$

$$A_k = C_k = \frac{E}{2\alpha_k^2} u_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Здесь введены обозначения:

$$C_0(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tau_-(s) \sin(\lambda s) ds; \quad u_k = \frac{2}{H} \int_{-H}^0 u'_0(s) \cos \alpha_k s ds; \quad (1.7)$$

$$f_k(\lambda) = \frac{4\lambda \alpha_k}{\pi(\lambda^2 + \alpha_k^2)^2}; \quad \nu_0 = \lambda H.$$

Приведем также выражения функций $\sigma_x(0, y)$ и $\partial u(x, 0) / \partial x$, записанных при помощи коэффициентов разложения функции $F(x, y)$, которые необходимы в дальнейшем. Они даются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_x(0, y) = \int_0^{\infty} [2D(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + (B(\lambda) + C(\lambda)) sh(\lambda y) + \lambda y (C(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda y) + \\ + D(\lambda) sh(\lambda y))] \lambda^2 d\lambda - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 A_k \sin(\alpha_k y) + p; \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = \frac{2}{E} \int_0^{\infty} \lambda^2 D(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda + p/E. \quad (1.9)$$

Определим осевые деформации точек стрингера от неизвестных касательных напряжений $\tau_-(x)$ и заданной нагрузки $\tau_+(x)$. В рамках сделанных выше предположений можно записать [2]

$$\varepsilon_s = \frac{du_s(x)}{dx} = \frac{1}{A_s E_s} \left[d \int_0^x \tau_-(s) ds - \int_0^x \tau_+(s) ds \right] \quad (0 < x < \infty). \quad (1.10)$$

Далее, используя соотношения (1.8), (1.9), удовлетворим второму и четвертому условиям (1.1). Из первого условия, с учетом равенства деформации точек полубесконечной полосы и струнгера на бесконечности, получим соотношение

$$C_0(\lambda) = -\frac{2\lambda^3}{\lambda_0} D(\lambda) + f_+(\lambda); \quad (1.11)$$

где

$$f_+(\lambda) = \frac{2}{\pi d} \int_0^\infty \tau_+(x) \sin(\lambda x) dx; \quad \lambda_0 = \frac{dE}{A_s E_s}.$$

Второе же условие дает

$$\int_0^\infty \left[2D(\lambda) ch\lambda y + (B(\lambda) + C(\lambda)) sh\lambda y + \lambda y (C(\lambda) ch\lambda y + D(\lambda) sh(\lambda y)) \right] \lambda^2 d\lambda - \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 A_k \sin(\alpha_k y) = \sigma_0(y) - p \quad (-l < y < 0). \quad (1.12)$$

Из соотношений (1.6) через A_k ($k = 1, 2, \dots$) выразим коэффициенты $B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda)$. Тогда получим такие равенства:

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{k=1}^\infty \nu_0 \left[\nu_0 + (-1)^k (sh\nu_0 + \theta_1 ch\nu_0) \right] f_k(\lambda) \alpha_k^3 A_k - \nu_0^2 f_+(\lambda) \right\}; \\ C(\lambda) &= -\frac{1}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{k=1}^\infty sh\nu_0 \left[sh\nu_0 + (-1)^k \nu_0 (1 + \theta_1) \right] f_k(\lambda) \alpha_k^3 A_k - sh^2 \nu_0 f_+(\lambda) \right\}; \\ D(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{k=1}^\infty \left[\nu_0 + (-1)^k (sh\nu_0 + \theta_1 \nu_0 ch\nu_0) \right] f_k(\lambda) \alpha_k^3 A_k - \nu_0 f_+(\lambda) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^\infty ch\nu_0 \left[sh\nu_0 + (-1)^k \nu_0 (1 + \theta_1) \right] f_k(\lambda) \alpha_k^3 A_k + sh\nu_0 ch\lambda_0 f_+(\lambda) \right\}; \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\Delta(\lambda) = sh^2 \nu_0 - \nu_0^2 + \theta_1 \nu_0 (sh\nu_0 ch\nu_0 - \nu_0); \quad \theta_1 = 2 / \lambda_0 H.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1.12), используя связь коэффициентов A_k с коэффициентами u_k ($k = 1, 2, \dots$) и представление последних из (1.7), после некоторых несложных преобразований получаем определяющее интегральное уравнение поставленной задачи. Оно имеет вид

$$\int_{-l}^0 \left\{ \frac{1}{4H} \left[ctg \frac{\pi(y-s)}{2H} + ctg \frac{\pi(y+s)}{2H} \right] - \frac{\lambda_0}{2\pi} \left[\frac{8 - 2\lambda_0(y+2s) + \lambda_0^2 ys}{4} \right] \times \right.$$

$$\times \exp\left(-\frac{\lambda_0(y+s)}{2}\right) Ei\left(\frac{\lambda_0(y+s)}{2}\right) + \frac{2(y+2s) - \lambda_0 y s}{2(y+s)} - \frac{y s}{(y+s)^2} \Big] - \quad (1.14)$$

$$-\frac{1}{H} R(s, y) \Big\} u'_0(s) ds = \frac{1}{E} [f_+^*(y) - \sigma_0(y) + p] \quad (-l < y < 0).$$

Здесь введены обозначения:

$$R(s, y) = \frac{H^2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \lambda R_1(\lambda, y) \left[\frac{ch\lambda(s+H) + (\lambda s) sh\lambda(s+H)}{v_0 shv_0} - \frac{ch(\lambda s)}{sh^2 v_0} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(2 + \lambda y)(1 + \lambda s) e^{\lambda(y+s)}}{H(1 + \lambda_0 \lambda)} + \right. \\ \left. + \lambda R_2(\lambda, y) \left[\frac{ch(\lambda s) + \lambda(s-H) sh(\lambda s)}{v_0 sh\lambda_0} - \frac{ch\lambda(s-H)}{sh^2 v_0} \right] \right\} d\lambda; \\ R_1(\lambda, y) = \frac{[\lambda(y+H) sh(\lambda y) + 2ch(\lambda y)] v_0 - shv_0 [2ch\lambda(y+H) + \lambda y sh\lambda(y+H)]}{\Delta(\lambda)}; \\ R_2(\lambda, y) = \frac{(shv_0 + \theta_1 v_0 chv_0) [\lambda(y+H) sh(\lambda y) + 2ch(\lambda y)]}{\Delta(\lambda)} - \\ - \frac{v_0(1 + \theta_1) [2ch\lambda(y+H) + \lambda y sh\lambda(y+H)]}{\Delta(\lambda)}; \\ f_+^*(y) = \\ = \int_0^\infty \frac{shv_0 [2ch\lambda(y+H) + \lambda y sh\lambda(y+H)] - v_0 [\lambda(y+H) sh(\lambda y) + 2ch(\lambda y)]}{\Delta(\lambda)} f_+(\lambda) d\lambda,$$

а $Ei(x)$ – известная интегральная показательная функция.

Уравнение (1.14) рассматриваем вместе с условиями равновесия стрингера

$$d \int_0^\infty \tau_-(s) ds = P_\infty + \int_0^\infty \tau_+(s) ds \quad (1.15)$$

и равенство нулю горизонтального перемещения на вершине трещины $y = -l$, т.е.

$$u_0(-l) = 0. \quad (1.16)$$

Используя связь коэффициента $C_0(\lambda)$ с коэффициентами u_k ($k = 1, 2, \dots$), условие (1.15) можно записать в следующей форме:

$$\frac{2dE}{\lambda H} \int_{-l}^0 M(s) u'_0(s) ds = -(P_\infty + G), \quad (1.17)$$

где приняты обозначения:

$$M(s) = \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(\alpha_k s) f_k(\lambda) \left[R_1(\lambda) + (-1)^k R_2(\lambda) \right] \right\} d\lambda;$$

$$R_1(\lambda) = \frac{\nu_0 - sh\nu_0 ch\nu_0}{\Delta(\lambda)}; \quad R_2(\lambda) = \frac{sh\nu_0 + \theta_1 \nu_0 ch\nu_0 - \nu_0(1 + \theta_1)}{\Delta(\lambda)};$$

$$G = \int_0^{\infty} \tau_+(s) ds - d \int_0^{\infty} \frac{f_+(\lambda)}{\lambda} d\lambda - \frac{2d}{\lambda_0} \int_0^{\infty} R_1(\lambda) f_+(\lambda) d\lambda.$$

Таким образом, решение поставленной задачи сведено к решению интегрального уравнения (1.14) при условиях (1.16) и (1.17).

2. Решение определяющего сингулярного интегрального уравнения.

Перейдем к решению интегрального уравнения (1.14) при условиях (1.16) и (1.17). С этой целью заметим, что ядро интегрального уравнения (1.14) представлено в виде суммы сингулярной и регулярной частей, причем сингулярная часть ядра, кроме обычной сингулярности, содержит также неподвижную особенность в точке $s = y = 0$, что весьма усложняет применение аналитических методов для построения решения этого уравнения. Поэтому решение уравнения (1.14) строим численным методом [4], который выгодно отличается от метода, предложенного в [12, 14], своей простотой. Исходя из этого, сведем уравнение (1.14) к более удобному виду для применения этого метода. С этой целью сначала проинтегрируем обе части интегрального уравнения (1.14), а затем произведем интегрирование по частям. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{E}{H} \int_{-l}^0 \left\{ \frac{1}{4} \left[ctg \frac{\pi(s-y)}{2H} + ctg \frac{\pi(s+y)}{2H} \right] - \frac{H}{\pi} \left[\frac{\lambda_0}{2} \left(2 - \frac{\lambda_0(s+2y)}{2} + \frac{\lambda_0^2 sy}{4} \right) \times \right. \right. \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{\lambda_0(y+s)}{2} \right) Ei\left(\frac{\lambda_0(y+s)}{2} \right) + \lambda_0 \left(\frac{s+2y}{2} - \frac{\lambda_0 ys}{4} \right) \frac{1}{s+y} - \\ & \quad \left. \left. - \frac{\lambda_0 ys}{2(y+s)^2} + K(s, y) \right\} u_0(s) ds = \bar{\sigma}(y) - \frac{E}{H} F_1(y) u_0 + C_0 \quad (-l < y < 0), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} K(s, y) = & -\frac{H^2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \lambda^2 \tilde{R}_1(\lambda, y) \left[\frac{2sh\lambda(s+H) + (\lambda s) ch\lambda(s+H)}{\nu_0 sh\nu_0} - \frac{sh\lambda s}{sh^2\nu_0} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_0(1+\lambda y)(2+\lambda s)}{H(\lambda_0+2\lambda)} \exp(\lambda(y+s)) \right\} d\lambda - \\ & - \frac{H^2}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^2 \tilde{R}_2(\lambda, y) \left[\frac{2sh(\lambda s) + \lambda(s-H) ch(\lambda s)}{\nu_0 sh\nu_0} - \frac{sh\lambda(s-H)}{sh^2\nu_0} \right] d\lambda; \end{aligned}$$

$$\tilde{R}_1(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda \Delta(\lambda)} \left\{ v_0 [\lambda(y+H) \operatorname{ch} \lambda y + sh \lambda y] - \right. \\ \left. - sh v_0 [sh \lambda(y+H) + \lambda y \operatorname{ch} \lambda(y+H)] \right\};$$

$$\tilde{R}_2(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda \Delta(\lambda)} \left\{ (sh v_0 + \theta_1 v_0 \operatorname{ch} v_0) [\lambda(y+H) \operatorname{ch}(\lambda y) + sh(\lambda y)] - \right. \\ \left. - v_0(1 + \theta_1) [sh \lambda(y+H) + \lambda y \operatorname{ch} \lambda(y+H)] \right\};$$

$$F_1(y) = \frac{H^2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{ch}(\lambda H)}{v_0 sh v_0} - \frac{1}{sh^2 v_0} \right] \lambda \tilde{R}_1(\lambda, y) d\lambda + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \left[\frac{1}{v_0 sh v_0} - \frac{1}{sh^2 v_0} \right] \lambda \tilde{R}_2(\lambda, y) d\lambda + \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos \alpha_k y}{\alpha_k} \right\};$$

$$\tilde{\sigma}(y) = \int [\sigma_0(y) - f_+^*(y) - p] dy;$$

C_0 – постоянная интегрирования, а $u_0 = u_0(0)$ – горизонтальное смещение точки $x = y = 0$ полосы, подлежащее определению.

Далее, при помощи замены переменных

$$y = -l \frac{1+t}{2}; \quad s = -l \frac{1+u}{2} \quad (-1 \leq t, u \leq 1)$$

сформулируем интегральное уравнение (2.1) на интервале $(-1, 1)$ и введем новую безразмерную искомую функцию по формуле

$$\varphi(t) = \frac{E_s A_s}{l P_\infty} \left[u_0 \left(-l \frac{1+t}{2} \right) - \frac{1-t}{2} u_0 \right], \quad (2.2)$$

которая, очевидно, удовлетворяет условиям

$$\varphi(\pm 1) = 0. \quad (2.3)$$

После этих преобразований определяющее интегральное уравнение (2.1) окончательно принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{u-t} + K_1(u, t) \right] \varphi(u) du = G_0(t) + H_0(t) v_0 - \tilde{C}_0 \quad (-1 < t < 1) \quad (2.4)$$

При этом условии (1.17) в новых обозначениях запишется так:

$$\int_{-1}^1 \frac{dM^*(u)}{du} \varphi(u) du = - \left[\frac{v_0}{2} \int_{-1}^1 M^*(u) du + \frac{H}{2l} \left(1 + \frac{G}{P_\infty} \right) \right]. \quad (2.5)$$

Здесь

$$K_1(u, t) = \frac{\pi l}{4H} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(u-t)}{4H} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(u+t+2)}{4H} - \frac{4H}{\pi l(u-t)} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda_1 \left[\left(1 + \frac{\lambda_1}{8}(3+u+2t) + \frac{\lambda_1^2}{32}(1+u)(1+t) \right) \times \right. \\
& \times \exp \left(\frac{\lambda_1(u+t+2)}{4} \right) Ei \left(-\frac{\lambda_1(u+t+2)}{4} \right) - \frac{4(3+u+2t) + \lambda_1(1+u)(1+t)}{8(u+t+2)} + \\
& \left. + \frac{(1+u)(1+t)}{2(u+t+2)^2} \right] + K \left[-\frac{l(u+1)}{2}, -\frac{l(t+1)}{2} \right]; \\
H_0(t) &= \frac{1}{Hl} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_k l) \cos(\alpha_k y)}{\alpha_k^2} + \frac{4H^2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{(\lambda l) ch \lambda (H-l)}{v_0 sh v_0} - \frac{sh(\lambda l)}{sh^2 v_0} \right] \times \right. \\
& \times \tilde{R}_1 \left(\lambda, -\frac{l(t+1)}{2} \right) d\lambda + \frac{4H^2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\lambda(H+l) ch \lambda l}{v_0 sh v_0} - \frac{sh \lambda (l+H)}{sh^2 v_0} \right] \tilde{R}_2 \left(\lambda, -\frac{l(t+1)}{2} \right) d\lambda \left. \right\}; \\
G_0(t) &= -\frac{1}{lP} \tilde{\sigma} \left(-\frac{l(t+1)}{2} \right); \quad M^*(u) = M \left[-l \frac{1+u}{2} \right]; \quad v_0 = \frac{Eu_0}{lp}; \quad \tilde{C}_0 = \frac{C_0}{lp}; \quad \lambda_1 = l\lambda_0.
\end{aligned}$$

Окончательно решение поставленной задачи сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (2.4) при условиях (2.3) и (2.5).

Из условий (2.3) следует, что решение интегрального уравнения (2.4) ограничено на обоих концах интервала $(-1, 1)$. Тогда для существования решения необходимо, чтобы правая часть этого уравнения удовлетворяла условию разрешимости [3, с. 396], которое в данном случае можно записать так:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(u) du \int_{-1}^1 \frac{K_1(u, t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{G_0(t) + H_0(t)v_0 - \tilde{C}_0}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Это дополнительное условие дает возможность установить связь между постоянными v_0 и \tilde{C}_0 . Однако, в дальнейшем, это условие не будем использовать в таком виде, так как применяемый здесь численный метод, для ограниченных в конечных точках интервала решений, сводит решение сингулярного интегрального уравнения к решению системы алгебраических уравнений, решения которой автоматически удовлетворяют условию разрешимости [4].

Следуя работе [4], решение уравнения (2.3) представим в виде

$$\varphi(t) = \sqrt{1-t^2} \psi(t) \quad (-1 < t < 1) \quad (2.6)$$

При этом полагаем, что функция $\psi(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ удовлетворяет условию Гельдера. Тогда, если в качестве узловых точек принять корни многочлена Чебышева второго рода $U_m(x) = 0$, т.е. точки

$$x_m = \cos \left(\frac{\pi m}{M+1} \right) \quad (m = 1, 2, \dots, M),$$

то интегральное уравнение (2.4) можно свести к следующей системе линейных алгебраических уравнений [4]:

$$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{\psi(x_m)}{M+1} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{M+1} \right) \left[\frac{1}{x_m - t_r} + K_1(x_m, t_r) \right] = G_0(t_r) + H_0(t_r) v_0 - \tilde{C}_0 \quad (2.7)$$

$$\left(t_r = \cos \frac{(2r-1)\pi}{2(M+1)}, \quad r = 1, 2, \dots, M+1 \right),$$

откуда определяются $\psi(x_m)$ ($m = 1 - M$).

Как отмечено выше, решения системы уравнений (2.7) автоматически удовлетворяют условию разрешимости интегрального уравнения (2.4), записанному с помощью квадратурной формулы Гаусса. Присоединяя к системе алгебраических уравнений (2.7) условие (2.5), которое записываем в виде

$$\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{M+1}}{M+1} \frac{dM^*(x_m)}{du} \Psi(x_m) = -\frac{v_0}{2} \int_{-1}^1 M^*(u) du + \frac{H}{2l} \left(1 + \frac{G}{P_{\infty}} \right),$$

получим $M+2$ уравнения для определения стольких же неизвестных постоянных вместе с v_0 и \tilde{C}_0 .

После определения функции $\psi(t)$ довольно легко можно определить важные механические характеристики поставленной задачи, которыми являются коэффициент интенсивности разрушающих напряжений $\sigma_x(0, y)$ (КИН) в концевой точке трещины $y = -l$ и касательные контактные напряжения, действующие под стрингерами.

Для определения КИН запишем выражение напряжений $\sigma_x(0, y)$ вне трещины. Оно имеет вид

$$\sigma_x(0, y) = -\frac{E}{2\pi} \int_{-l}^0 \left[\frac{1}{y-s} + Q(y, s) \right] u'_0(s) ds + f_+^*(y) + p; \quad (-H < y < -l) \quad (2.8)$$

где

$$Q(y, s) = \frac{\pi}{2H} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(y-s)}{2H} - \frac{2H}{\pi(y-s)} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+s)}{2H} \right] -$$

$$-\lambda_0 \left[\frac{8 - 2\lambda_0(y+2s) + \lambda_0^2 ys}{4} \exp\left(-\frac{\lambda_0(y+s)}{2}\right) \operatorname{Ei}\left(\frac{\lambda_0(y+s)}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\lambda_0(y+2s) - \lambda_0^2 ys}{2(y+s)} - \frac{\lambda_0 ys}{(y+s)^2} \right] - \frac{2\pi}{H} R(s, y).$$

Выражение (2.8) получено из интегрального уравнения (1.14), полагая в нем $-H < y < -l$ и $\sigma_0(y) = \sigma_x(0, y)$. Нетрудно заметить, что $Q(y, s)$ – интегрируемая функция вблизи точки $y = -l$. Далее, используя соотношение (2.2), выразим функцию $u'_0(y)$ через функцию $\psi(t)$. Будем иметь такую функцию:

$$u'_0(y) = \frac{pl}{E} \frac{\psi(t)}{\sqrt{-y(l+y)}} - \frac{2p}{E} \sqrt{1-t^2} \psi'(t) + \frac{u_0}{l} \left(t = -1 - \frac{2y}{l} \right).$$

Подставляя это выражение функции $u'_0(y)$ в (2.8) и учитывая, что при $y \rightarrow -l$, $t \rightarrow 1$, эту формулу запишем в виде

$$\sigma_x(0, y) = \frac{pl\psi(1)}{2\sqrt{y(y+l)}} + F(y) \quad (-H < y < -l); \quad (2.9)$$

$$F(y) = -\frac{pl}{2\pi} \int_{-l}^0 \frac{\psi(u) - \psi(1)}{\sqrt{-s(l+s)}} \frac{ds}{(y-s)} - \frac{pl}{2\pi} \int_{-l}^0 \frac{Q(y,s)\psi(u)}{\sqrt{-s(l+s)}} ds +$$

$$+ \frac{E}{2\pi} \int_{-l}^0 \left[\frac{1}{y-s} + Q(y,s) \right] \left[\frac{2p}{E} \sqrt{1-u^2} \psi'(u) + \frac{u_0}{l} \right] ds + f_+^*(y) + p \left(u = -1 - \frac{2s}{l} \right).$$

Умножая (2.9) на $\sqrt{-2\pi(y+l)/l}$ и устремляя y к $-l$, для коэффициента интенсивности приведенных разрушающих напряжений $\sigma_x(0,y)/P$ в точке $y = -l$ получим выражение $K_I(-l) = \sqrt{2\pi}\psi(1)/2$.

Используя далее соотношения (1.7), (1.11) и (1.13), определяем также контактные касательные напряжения $\tau_-(x)$, действующие под стрингерами, в зависимости от функции $\psi(t)$.

Числовой пример. Численные расчеты проведены в случае, когда $\sigma_0(y) = \tau_+(x) = 0$, $\mu_0 = l/H = 0,05; 0,1; 0,15$. Вычислены значения КИН K_I приведенных разрушающих напряжений на нижнем конце трещины, которые представлены в табл. 1,2,3, где принято, соответственно: $\mu_0 = 0,05$; $\mu_0 = 0,1$; $\mu_0 = 0,15$.

В представленные таблицы включены значения приведенного смещения верхнего конца трещины v_0 при различных значениях параметра $\lambda_1 = hE/lE_s$.

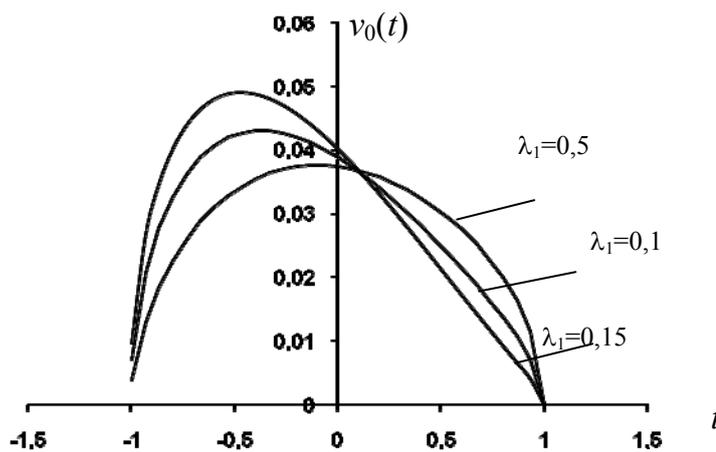


Рис.2

На рис.2 представлены графики раскрытия трещины в зависимости от характерного параметра λ_1 . Из этих результатов можно заключить, что при постоянном значении μ_0 уменьшение λ_1 приводит к возрастанию K_I и к снижению v_0 . Причем убывание параметра λ_1 при постоянных геометрических характеристиках поставленной задачи можно трактовать как возрастание модуля упругости стрингера по отношению к модулю упругости полосы.

Таблица 1

λ_1	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
v_0	0,00406	0,0054	0,0066	0,0073	0,0085	0,0098
K_I	0,03970	0,03295	0,02656	0,02330	0,01719	0,01397

Таблица 2

λ_1	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
v_0	0,0022	0,0028	0,0034	0,0037	0,0044	0,00498
K_I	0,01917	0,01628	0,01328	0,01182	0,00899	0,00588

Таблиця 3

λ_1	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
ν_0	0,0017	0,0020	0,0024	0,0026	0,0030	0,0034
K_1	0,01175	0,01025	0,0085	0,00758	0,00562	0,00375

Следовательно, при постоянной длине трещины и ширине полосы имеем: чем жестче стрингер, тем больше коэффициент интенсивности K_1 , и при этом возрастает вероятность распространения трещины.

РЕЗЮМЕ. Методом сингулярных интегральных рівнянь в поєднанні з чисельно-аналітичним методом механічних квадратур побудовано ефективний розв'язок задачі про напружено-деформований стан пружної нескінченної смуги з крайовою тріщиною, посиленою двома напівне-скінченними стрингерами. Показано, що при сталих довжині тріщини та ширині смуги збільшення жорсткості стрингерів приводить до збільшення як коефіцієнту інтенсивності K_1 , так і максимального відкриття тріщини, що збільшує ймовірність розповсюдження тріщини.

1. Акоюн В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. – Ереван: Изд-во Гитутюн НАН РА, 2014. – 322с.
2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 488с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708с.
4. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 443с.
5. Anik'ev I. I., Mikhailova M. I., Sushchenko E. A. Influence of a Patch on the Deformation of an Elastic Plate with an Edge Notch Under the Action of a Shock Wave // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N4. – P. 470 – 475.
6. Antipov Y.A. Subsonic semi-infinite crack with a finite friction zone in a biomaterial // J. Mech. and Phys. Solids. – 2009. – **57**. – P. 1934 – 1957.
7. Asundi A., Deng W. Rigid inclusions on the interface between dissimilar anisotropic media // J. Mech. and Phys. Solids. – 1995. – **43**, N7. – P. 1045 – 1058.
8. Atkinson C. The interface crack with a contact zone (an analytical treatment) // Int. J. Fract. – 1982. – **18**. – P. 161 – 177.
9. Bosakov S.V. Contact Problems for a Plate as an Inclusion in an Elastic Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N2. – P. 94 – 103.
10. Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben über geschweißte oder geklebte Verbindungen // Österr. Ing.-Arch. – 1964. – **18**, N3 – 4. – S. 284 – 292.
11. Elata D. On the problem of rigid inclusions between two dissimilar elastic half-spaces with smooth surfaces // Int. J. Solids and Struct. – 1999. – **36**. – P. 2633 – 2636.
12. Erdogan F., Gupta G., Cook T. The numerical solutions of singular integral equations // Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. – Leyden: Noord-hoff Int. Publ., 1973. – P. 368 – 425.
13. Guz A.N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N1. – P.5 – 88.
14. Ioakimidis N.I., Theocaris P.S. A comparison between the direct and classical numerical methods for the solution of Cauchy singular integral equations // SIAM J. Numer. Anal. – 1980. – **17**, N 1. – P. 115 – 118.
15. Markenscoff X., Ni L., Dundurs J. The interface anticrack and Green's functions for interacting anticracks and cracks (anticracks) // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1994. – **61**. – P. 797 – 802.
16. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen // Ingr. Arch. – 1932. – **3**, N2. – S. 123 – 129.
17. Shavlakadze N. The Contact Problems of the Mathematical Theory of Elasticity for Plates with an Elastic Inclusion // Acta Appl Math. – 2007. – **99**. – P. 29 – 51.
18. Ting T.C.T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites // Int. J. Solids and Struct. – 1986. – **22**, N 9. – P. 965 – 983.

Поступила 26.03.2012

Утверждена в печать 30.09.2014