

Ю. В. Скосаренко

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ
С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ, ПРИ КРАТКОВРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057 Киев, Украина; string@inmech.kiev.ua*

Abstract. A technique of determination of the stress-strain state of ribbed cylindrical shell is stated. The shell interacts with the elastic foundation and undergoes to the dynamic axisymmetric load. An effect of time of load acting and parameters of elastic foundations on the shell deflections and bending moments is analyzed.

Key words: cylindrical shell, stiffening ribs, elastic foundation, stress-strain state, dynamic axisymmetric load.

Введение.

Изучению влияния внешней среды на колебания, устойчивость и напряженно-деформированное состояние при динамическом нагружении оболочек посвящено большое число работ [5 – 17, 19 и др.]. Как следует из обзора имеющихся публикаций, представляет интерес исследование динамики ребристых оболочек, взаимодействующих с внешней средой. В данной работе внешняя среда учитывается как упругое основание согласно модели П.Л. Пастернака [4] и модели Винклера.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Ниже рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) замкнутой ребристой цилиндрической оболочки, подверженной действию распределенных по ее поверхности кратковременных усилий. Оболочка взаимодействует с упругим основанием, препятствующим ее нормальным перемещениям и поворотам срединной поверхности относительно окружной координатной линии. Принято, что система продольных подкрепляющих ребер регулярна, на торцах оболочки заданы граничные условия шарнирного опирания.

В основу решения задачи положена классическая теория оболочек и стержней [1] и энергетический метод. Полную потенциальную энергию рассматриваемой упругой системы в отклоненном состоянии и кинетическую энергию представляем в виде

$$U = U_o + U_1 + U_2 + U_f + A_o; \quad (1)$$

$$V = V_o + V_1 + V_2 + V_f. \quad (2)$$

Здесь

$$U = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi r} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{r} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy + \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi r} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \right.$$

$$-2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy ; \quad (3)$$

$$U_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{2} \int_0^L \left[E_{1i} F_{1i} \left(\frac{du_{1i}}{dx} \right)^2 + E_{1i} I_{y1i} \left(\frac{d^2 w_{1i}}{dx^2} \right)^2 \right] dx ; \quad (4)$$

$$U_2 = \sum_{j=1}^{k_2} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r} \left[E_{2j} F_{2j} \left(\frac{dv_{2j}}{dy} - \frac{w_{2j}}{r} \right)^2 + E_{2j} I_{x2j} \left(\frac{d^2 w_{2j}}{dy^2} + \frac{w_{2j}}{r^2} \right)^2 \right] dy ; \quad (5)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi r} E_f \int_0^\infty \left(\frac{\partial w_f}{\partial z} \right)^2 dz dy dx ; \quad (6)$$

$$A_0 = -\frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi r} (q_1 u + q_2 v + q_3 w) dx dy ; \quad (7)$$

$$V_0 = \frac{\rho_o h}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi r} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy ; \quad (8)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1} \rho_{1i} F_{1i} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{1i}}{\partial t} \right)^2 \right] dx ; \quad (9)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \rho_{2j} F_{2j} \int_0^{2\pi r} \left[\left(\frac{\partial v_{2j}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{2j}}{\partial t} \right)^2 \right] dy ; \quad (10)$$

$$V_f = \frac{\rho_f}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi r} \int_0^\infty \left(\frac{\partial w_f}{\partial t} \right)^2 dz dx dy , \quad (11)$$

где U_o, U_1, U_2, U_f – потенциальная энергия обшивки, продольных, кольцевых ребер и упругого основания; V_0, V_1, V_2, V_f – кинетическая энергия обшивки, продольных, кольцевых ребер и упругого основания; A_0 – работа внешних сил, приложенных к оболочке; E, ρ_o, μ – модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала обшивки; u, v, w – осевое, окружное и нормальное перемещения срединной поверхности обшивки; $x = r\xi, y = r\theta, z = r\zeta$ – продольная, окружная и нормальная координаты; t – время; h, r, L – толщина обшивки, радиус срединной поверхности оболочки и ее длина, соответственно; k_1, k_2 – число продольных и кольцевых ребер; $E_{1i}, \rho_{1i}, F_{1i}, I_{y1i}, u_{1i}, w_{1i}$ – модуль упругости, плотность материала, площадь и момент инерции поперечного сечения относительно окружной координатной линии, продольное и нормальное перемещения i -го продольного ребра; $E_{2j}, \rho_{2j}, F_{2j}, I_{x2j}, v_{2j}, w_{2j}$ – модуль упругости, плотность материала, площадь и момент инерции поперечного сечения относительно продольной координатной линии, окружное и нормальное перемещения j -го кольцевого ребра; E_f, ρ_f, w_f – модуль упругости, плотность мате-

риала и перемещения точек упругого основания, окружающего оболочку с внешней стороны ее боковой поверхности; q_1, q_2, q_3 – продольная, окружная, нормальная компоненты переменной во времени нагрузки.

Перемещения продольных и кольцевых ребер связаны с перемещениями срединной поверхности оболочки следующими зависимостями [1, 2, 3]:

$$\begin{aligned} u_{1i} &= \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{1i})(u + h_{1i}\varphi_1)d\theta; & w_{1i} &= \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{1i})wd\theta; \\ v_{2j} &= \int_0^{1/r} \delta(\xi - \xi_{2j})(v + h_{2j}\varphi_2)d\xi; & w_{2j} &= \int_0^{1/r} \delta(\xi - \xi_{2j})wd\xi, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\delta(\theta - \theta_{1i}), \delta(\xi - \xi_{2j})$ – функции Дирака; θ_{1i}, ξ_{2j} – координаты линий контакта i -го продольного и j -го кольцевого ребер с оболочкой; h_{1i}, h_{2j} – соответствующие эксцентриситеты поперечного сечения продольных и кольцевых ребер; $\varphi_1 = -\partial w / \partial x$, $\varphi_2 = -\partial w / \partial y + v / r$.

Зависимость между величиной w_f и перемещениями оболочки принимаем в виде

$$w_f = \frac{r}{r+z} \left(C_1 w + r C_2 \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (13)$$

Безразмерные коэффициенты C_1, C_2 характеризуют свойство упругого основания препятствовать нормальным перемещениям и поворотам срединной поверхности оболочки. В выражении (13) учтено также затухающее воздействие упругого основания на оболочку при удалении от ее поверхности. Выполнив интегрирование в выражениях (6), (11) по координате z , получим следующие выражения для потенциальной и кинетической энергий упругого основания:

$$U_f = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_0^{1/r} \int_0^{2\pi} \left[\delta_{1f} w^2 + 2\delta_{3f} \frac{\partial w}{\partial \xi} w + \delta_{2f} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\theta d\xi; \quad (14)$$

$$V_f = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \sigma_o \int_0^{1/r} \int_0^{2\pi} \left[\delta_{1f}^* \sigma_{1f} \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 + 2\delta_{3f}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \delta_{2f}^* \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} \right)^2 \right] d\theta d\xi \quad (15)$$

$$\left(\delta_{1f} = \frac{(1-\mu^2)rE_f}{3Eh} C_1^2; \quad \delta_{2f} = \frac{(1-\mu^2)rE_f}{3Eh} C_2^2; \quad \delta_{3f} = \frac{(1-\mu^2)rE_f}{3Eh} C_1 C_2; \quad \delta_{1f}^* = \frac{\rho_f r}{\rho_o h} C_1^2; \right.$$

$$\left. \delta_{2f}^* = \frac{\rho_f r}{\rho_o h} C_2^2; \quad \delta_{3f}^* = \frac{\rho_f r}{\rho_o h} C_1 C_2; \quad \tau = t / T; \quad \sigma_o = \frac{(1-\mu^2)\rho_o r^2}{ET^2}; \right.$$

$T = t_2 - t_1$ – некоторый промежуток времени; t_1, t_2 – фиксированные моменты времени).

Уравнения движения рассматриваемой упругой системы могут быть получены, исходя из принципа стационарности действия [2], согласно которому

$$\delta W = 0 \quad (W = \int_{t_1}^{t_2} (V - U) dt \text{ – действие по Гамильтону}). \quad (16)$$

Подставив в (16) выражения (1) – (5), (7) – (10), (14), (15) с учетом (12) и принятых граничных условий, получим следующее вариационное уравнение:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{l/r} \left[\left(\frac{Eh}{1-\mu^2} L_{\delta u} - r^2 q_1 \right) \delta u + \left(\frac{Eh}{1-\mu^2} L_{\delta v} - r^2 q_2 \right) \delta v + \right. \\ \left. + \left(\frac{Eh}{1-\mu^2} L_{\delta w} - r^2 q_3 \right) \delta w \right] d\xi d\theta dt = 0, \quad (17)$$

в котором

$$L_{\delta u} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} - \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_{li}) \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{li}) \left(\delta_{1li} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \right. \\ \left. - \delta_{2li} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} \right) d\theta - \sigma_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_{li}) \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{li}) \left(\delta_{1li}^* \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \delta_{2li}^* \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \tau^2} \right) d\theta + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \delta_{12j}^* \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} d\xi \right];$$

$$L_{\delta v} = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + (1+a^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} (1+4a^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ + a^2 \left[(2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \left(-\delta_{12j} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \delta_{12j} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \delta_{22j} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) d\xi -$$

$$- \sigma_0 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_{li}) \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{li}) \delta_{1li}^* \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} d\theta + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \times \right. \\ \left. \times \left[\delta_{12j}^* \left(1 + \frac{h_{2j}}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \delta_{22j}^* \left(1 + \frac{h_{2j}}{r} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial \tau^2} \right] d\xi \right\};$$

$$L_{\delta w} = \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - a^2 \left[(2-\mu) \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right] - w - a^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_{li}) \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{li}) \left(\delta_{2li} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \eta_{li} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} \right) d\theta + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{l/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \left[\delta_{12j} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \right.$$

$$+ \delta_{22j} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \eta_{2j} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - 2(\eta_{12j} + \delta_{22j}) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - (\delta_{12j} + \eta_{12j}) w \left. \right] d\xi - \delta_{1f} w + \delta_{2f} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} -$$

$$- \sigma_0 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_{li}) \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{li}) \left(\delta_{2li}^* \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \tau^2} + \delta_{1li}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \delta_{3li}^* \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} \right) d\theta + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{k_2} \delta(\xi - \xi_{2j}) \int_0^{L/r} \delta(\xi - \xi_{2j}) \left[\delta_{12j}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \delta_{22j}^* \left(1 + \frac{h_{2j}}{r} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial \tau^2} - \delta_{32j}^* \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \tau^2} \right] d\xi + \\
& + \delta_{1f}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \delta_{2f}^* \frac{\partial^4 w}{\partial^2 \xi \partial \tau^2} \Big\}; \quad q_1 = q_{01} \cdot \bar{q}_1(\xi, \theta) \cdot \bar{q}_{1t}(\tau); \quad q_2 = q_{02} \cdot \bar{q}_2(\xi, \theta) \cdot \bar{q}_{2t}(\tau); \\
& \quad \quad \quad q_3 = q_{03} \cdot \bar{q}_3(\xi, \theta) \cdot \bar{q}_{3t}(\tau); \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a^2 = h^2 / (12r^2); \quad \delta_{11i} = \frac{E_{1i} F_{1i} (1 - \mu^2)}{Ehr}; \quad \delta_{21i} = \frac{h_{1i}}{r} \delta_{11i}; \quad \delta_{31i} = \delta_{21i} \frac{h_{1i}}{r}; \quad \eta_{1i} = \delta_{31i} + \eta_{11i}; \\
& \eta_{11i} = \frac{E_{1i} I_{y1i} (1 - \mu^2)}{Ehr^3}; \quad \delta_{11i}^* = \frac{\rho_{1i} F_{1i}}{\rho_o hr}; \quad \delta_{21i}^* = \frac{h_{1i}}{r} \delta_{11i}^*; \quad \delta_{31i}^* = \frac{h_{1i}}{r} \delta_{21i}^*; \quad \delta_{12j} = \frac{E_{2j} F_{2j} (1 - \mu^2)}{Ehr}; \\
& \delta_{22j} = \frac{h_{2j}}{r} \delta_{12j}; \quad \delta_{32j} = \delta_{22j} \frac{h_{2j}}{r}; \quad \eta_{2j} = \delta_{32j} + \eta_{12j}; \quad \eta_{12j} = \frac{E_{2j} I_{x2j} (1 - \mu^2)}{Ehr^3}; \tag{19} \\
& \delta_{12j}^* = \frac{\rho_{2j} F_{2j}}{\rho_o hr}; \quad \delta_{22j}^* = \frac{h_{2j}}{r} \delta_{12j}^*; \quad \delta_{32j}^* = \frac{h_{2j}}{r} \delta_{22j}^*; \quad q_{01}, q_{02}, q_{03} - \text{максимальные значения}
\end{aligned}$$

компонент внешней нагрузки; $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ – безразмерные функции, описывающие изменение внешней нагрузки в зависимости от пространственных координат; $\bar{q}_{1t}, \bar{q}_{2t}, \bar{q}_{3t}$ – также безразмерные функции, отражающие зависимость нагрузки от времени).

2. Методика исследования НДС.

Представим перемещения точек срединной поверхности оболочки в виде двойных тригонометрических рядов по пространственным координатам

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{1mn}^1(\tau) \cos n\theta + u_{1mn}^2(\tau) \sin n\theta) \cos d_m \xi; \\
v &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{2mn}^1(\tau) \sin n\theta + u_{2mn}^2(\tau) \cos n\theta) \sin d_m \xi; \tag{20} \\
w &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{3mn}^1(\tau) \cos n\theta + u_{3mn}^2(\tau) \sin n\theta) \sin d_m \xi,
\end{aligned}$$

где $u_{1mn}^1(\tau), u_{1mn}^2(\tau), \dots, u_{3mn}^2(\tau)$ – искомые функции времени; $d_m = m\pi r / L$.

Подставив (19), (20) в (18), затем (18) в (17), выполнив дифференцирование и интегрирование по координатам ξ, θ , на основе независимости и произвольности вариаций перемещений, получим следующие системы обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{M}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^1}{\partial \tau^2} + \mathbf{S}^1 \mathbf{u}^1 = \mathbf{Q}^1; \tag{21}$$

$$\mathbf{M}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^2}{\partial \tau^2} + \mathbf{S}^2 \mathbf{u}^2 = \mathbf{Q}^2. \tag{22}$$

Здесь $\mathbf{M}^1, \mathbf{M}^2, \mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2$ – матрицы масс и матрицы жесткости, элементы которых зависят от параметров оболочки, продольных и кольцевых ребер, упругого основания, а

также от параметров волнообразования m, n . Верхние индексы 1, 2 указывают на то, что при формировании матриц масс и жесткости использованы, соответственно, первые (индекс 1) и вторые (индекс 2) слагаемые в выражениях (20); $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ – вектор-столбцы, составленные из искомых функций времени $u_{1mn}^1, u_{2mn}^1, u_{3mn}^1$ и $u_{1mn}^2, u_{2mn}^2, u_{3mn}^2$, соответственно; $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2$ – вектор-столбцы, полученные после интегрирования компонент внешней нагрузки.

В общем случае системы (21), (22) связаны между собой, однако здесь эти системы независимы, так как рассматриваем оболочки, подкрепленные регулярно расположенными продольными ребрами с одинаковыми физическими и геометрическими параметрами, а также осесимметричное упругое основание.

Для решения задачи о НДС оболочки, используем метод разложения решения по формам собственных колебаний [18].

На первом этапе решаем задачу на собственные значения. Определяем диагональные матрицы $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$, элементами которых являются квадраты собственных значений $(p_k^1)^2, (p_k^2)^2$, и матрицы форм собственных колебаний $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2$, элементами которых являются произвольные постоянные собственных форм $a_{k,l}^1, a_{k,l}^2$. Для решения задачи на собственные значения использован метод вращений. В системах (21), (22) правые части приравнивали нулю, в рядах (20) переменные во времени неизвестные функции принимали в виде гармонической функции с постоянными коэффициентами.

При решении задачи о НДС рассматриваем оболочку, подверженную действию нагрузки, симметричной относительно начала окружной координаты. При этом динамическое поведение оболочки определяем только из системы уравнений (21). Преобразуем данную систему, приведя ее к главным координатам [18], тогда имеем

$$\mathbf{M}_\Gamma \ddot{\mathbf{u}}_\Gamma + \mathbf{S}_\Gamma \mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{Q}_\Gamma. \quad (23)$$

Здесь \mathbf{u}_Γ – вектор-столбец искомых функций в главных координатах,

$$\mathbf{M}_\Gamma = (\mathbf{A}^1)^T \mathbf{M}^1 \mathbf{A}^1; \quad \mathbf{S}_\Gamma = (\mathbf{A}^1)^T \mathbf{S}^1 \mathbf{A}^1; \quad \mathbf{Q}_\Gamma = (\mathbf{A}^1)^T \mathbf{Q}^1. \quad (24)$$

Выполним нормировку матрицы форм собственных колебаний по отношению к матрице масс $\bar{a}_{k,l}^1 = a_{k,l}^1 / r_k$, где $r_k = \sqrt{(\mathbf{a}_k^1)^T \mathbf{M}^1 \mathbf{a}_k^1}$ – нормировочный коэффициент k -ой формы собственных колебаний, \mathbf{a}_k^1 – собственный вектор k -ой формы. Используя нормированную таким образом матрицу форм собственных колебаний, получим выражения (24) в более простом виде

$$\mathbf{M}_\Gamma = (\bar{\mathbf{A}}^1)^T \mathbf{M}^1 \bar{\mathbf{A}}^1 = \mathbf{I}; \quad \mathbf{S}_\Gamma = (\bar{\mathbf{A}}^1)^T \mathbf{S}^1 \bar{\mathbf{A}}^1 = \mathbf{P}^1; \quad \mathbf{Q}_\Gamma = (\bar{\mathbf{A}}^1)^T \mathbf{Q}^1, \quad (25)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Так как в последнем случае матрица масс и матрица жесткости в главных координатах являются диагональными матрицами, вместо системы связанных уравнений (23) получим ряд независимых уравнений, число которых равно числу удерживаемых в решении форм собственных колебаний. Опуская далее верхний индекс 1, для каждой i -й формы колебаний запишем уравнение

$$\ddot{u}_{\Gamma,i}(t) + p_i^2 u_{\Gamma,i}(t) = q_{\Gamma,i}(t), \quad (26)$$

где $q_{\Gamma,i}(t)$ – компоненты вектора \mathbf{Q}_Γ из (25); p_i – собственное значение, соответствующее i -й форме колебаний.

Уравнения (26) получены без учета рассеяния энергии при движении рассматриваемой механической системы. Если предположить, что эта система обладает слабым демпфированием и матрица форм собственных колебаний ортогональна также и к

матрице демпфирования \mathbf{C} , т.е. матрица $\mathbf{C}_r = (\bar{\mathbf{A}}^1)^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^1$ также является диагональной, можно вместо уравнений (26) использовать уравнения вида

$$\ddot{u}_{r,i}(t) + 2c_{r,i}\dot{u}_{r,i}(t) + p_i^2 u_{r,i}(t) = q_{r,i}(t), \quad (27)$$

которые позволяют учесть рассеяние энергии при возмущенном движении оболочки. В (27) принято: $c_{r,i} = \gamma_i p_i$ – постоянная демпфирования по i -й форме собственных колебаний; γ_i – соответствующий коэффициент демпфирования.

Получив решение уравнений (27) или (26), выполним обратный переход к исходной системе искомых функций

$$\mathbf{u}^1 = \bar{\mathbf{A}}^1 \mathbf{u}_r. \quad (28)$$

Далее с помощью рядов (20) и известных соотношений теории оболочек и теории стержней в заданный момент времени определяем перемещения, внутренние усилия и изгибающие моменты в точках срединной поверхности оболочки и ребер [1, 2].

Определим НДС оболочки при действии на нее равномерно распределенной нагрузки ($q_{01} = 0$; $q_{02} = 0$; $q_{03} = q_{\max}$; $\bar{q}_3(\xi, \theta) = 1$), которая на заданном промежутке времени $[0, \tau_n]$ изменяется по ступенчатому закону: $\bar{q}_{3r}(\tau) = \alpha_1 + \alpha_2 \tau$ при $0 \leq \tau \leq \tau_n$, $\bar{q}_{3r}(\tau) = 0$ при $\tau \geq \tau_n$ (здесь τ_n – время действия нагрузки; α_1, α_2 – безразмерные коэффициенты).

До момента приложения внешней нагрузки оболочка находится в состоянии покоя.

Решение уравнений (27) находим с помощью интеграла Дюамеля [18]. При нулевых начальных условиях имеем

$$u_{r,i}(\tau) = \frac{e^{-\gamma_i p_i \tau}}{p_{d,i}} \int_0^{\tau} q_{r,i}(\tau') e^{\gamma_i p_i \tau'} \sin p_{d,i}(\tau - \tau') d\tau' \quad (p_{d,i} = p_i \sqrt{1 - \gamma_i^2}). \quad (29)$$

Выполнив указанные выше преобразования, после интегрирования в (29) получим следующие выражения для компонент вектора искомых функций в главных координатах:

$$u_{r,i}(\tau) = \frac{q_{r,i}}{p_i^2} \left\{ \alpha_1 + \left(\tau - \frac{2\gamma_i}{p_i} \right) \alpha_2 - e^{-\gamma_i p_i \tau} \left[\left(\frac{\gamma_i}{\sqrt{1 - \gamma_i^2}} \alpha_1 + \frac{1 - 2\gamma_i^2}{\sqrt{1 - \gamma_i^2}} \frac{\alpha_2}{p_i} \right) \sin p_{di} \tau + \left(\alpha_1 - 2\gamma_i \frac{\alpha_2}{p_i} \right) \cos p_{di} \tau \right] \right\} \quad \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_n; \quad (30)$$

$$u_{r,i}(\tau) = \frac{q_{r,i}}{p_i^2} \left\{ -e^{-\gamma_i p_i \tau} \left[\left(\frac{\gamma_i}{\sqrt{1 - \gamma_i^2}} \alpha_1 + \frac{1 - 2\gamma_i^2}{\sqrt{1 - \gamma_i^2}} \frac{\alpha_2}{p_i} \right) \sin p_{di} \tau + \left(\alpha_1 - 2\gamma_i \frac{\alpha_2}{p_i} \right) \cos p_{di} \tau \right] + e^{-\gamma_i p_i (\tau - \tau_n)} \left[\left(\frac{\gamma_i}{\sqrt{1 - \gamma_i^2}} (\alpha_1 + \alpha_2 \tau_n) + \frac{1 - 2\gamma_i^2}{\sqrt{1 - \gamma_i^2}} \frac{\alpha_2}{p_i} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin p_{di} (\tau - \tau_n) + \left(\alpha_1 + \tau_n \alpha_2 - 2\gamma_i \frac{\alpha_2}{p_i} \right) \cos p_{di} (\tau - \tau_n) \right] \right\} \quad \text{при } \tau \geq \tau_n. \quad (31)$$

Отметим, положив в (30), (31) $\gamma_i = 0$, получим решение уравнения (26). Коэффициент, стоящий перед фигурной скобкой в выражении (30), представляет решение задачи при действии на оболочку статической нагрузки.

3. Числовые результаты.

Далее приведены некоторые результаты расчета динамического НДС оболочки и влияния на него упругого основания. Рассмотрена оболочка, подкреплённая восемью продольными ребрами, со следующими параметрами: плотность материала оболочки $\rho_o = 8,23 \cdot 10^3$ кг/м³; модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ н/м²; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; толщина обшивки $h = 10^{-3}$ м; длина образующей и радиус оболочки $l = r = 0,25$ м. Принято, что подкрепляющие ребра, обладающие только жесткостью на изгиб, имеют одинаковый момент инерции поперечного сечения $I_{y_i} = I_y = 8,27 \cdot 10^{-11}$ м⁴.

Данная методика апробирована путем сравнения результатов расчета НДС оболочки при действии на нее статической равномерно распределенной нагрузки и полученных ранее [1]. Отличие между значениями максимальных прогибов и изгибающих моментов не превысило одного процента.

Расчеты выполнены для оболочки, подверженной действию равномерно распределенной по ее поверхности динамической нагрузки при $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0$. Время действия нагрузки τ_n и коэффициенты упругого основания $\beta_1 = C_1^2 E_f / E$; $\beta_2 = C_2^2 E_f / E$ варьировали. В рядах (20) удерживали члены от 1 до $m = 21$ с шагом 2 в случае симметричности механической системы относительно среднего сечения оболочки ($\xi = 0,5l/r$) и с шагом 1 в случае нарушения симметрии (когда упругое основание приложено только на части длины оболочки). По окружной координате удерживали члены ряда от нуля до $n = 96$ с шагом 8 с учетом циклической симметрии рассматриваемой системы.

На рис. 1, 2 представлены результаты исследования влияния времени действия внешней нагрузки τ_n на прогиб и изгибающие моменты в оболочке, полученные без учета упругого основания. Приведены зависимости от времени относительного прогиба \bar{w} (рис. 1) и относительного изгибающего момента \bar{M}_1 (рис. 2, а) в точке ($\xi = 0,1$; $\theta = \pi/32$) и относительного изгибающего момента \bar{M}_2 (рис. 2, б) в точке ($\xi = 0,1$; $\theta = 0$), где они принимают наибольшие значения. Размерные величины прогибов и изгибающих моментов определяются следующими соотношениями

$w = (1 - \mu^2)r^2 q_{\max} \bar{w} / Eh$, $M = h^2 q_{\max} \bar{M} / 12$. Линия, обозначенная «0», соответствуют статическому приложению внешней нагрузки. Линии, обозначенные 1 – 4, получены

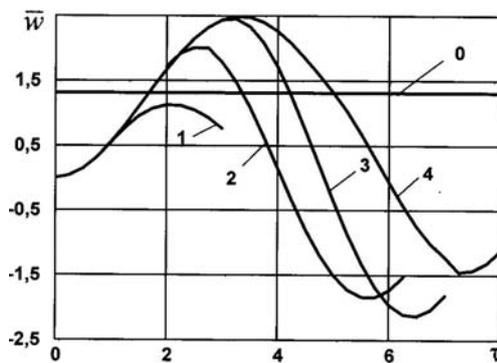


Рис. 1

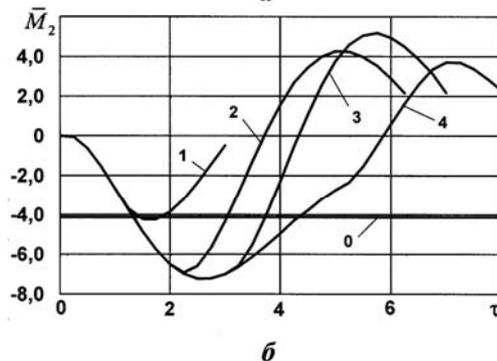
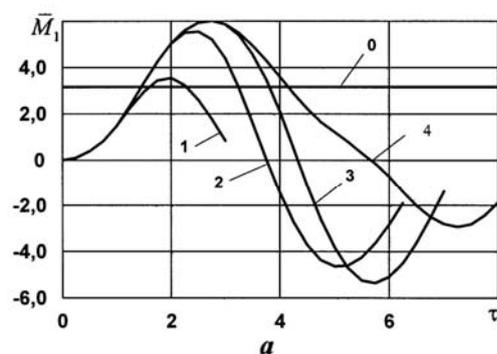


Рис. 2

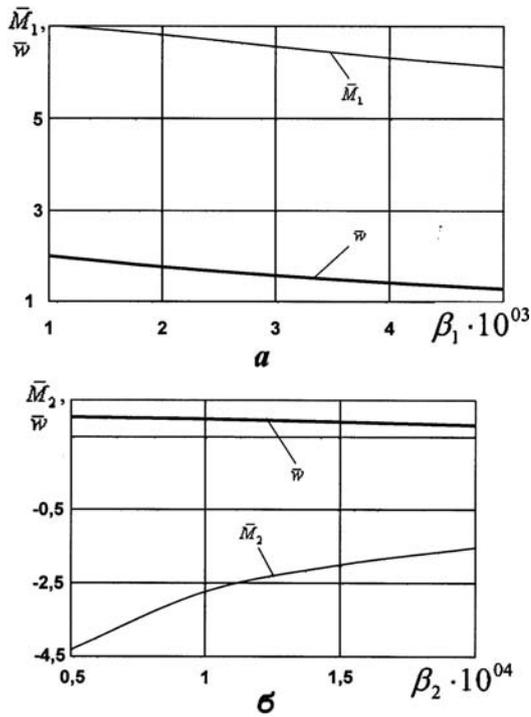


Рис. 3

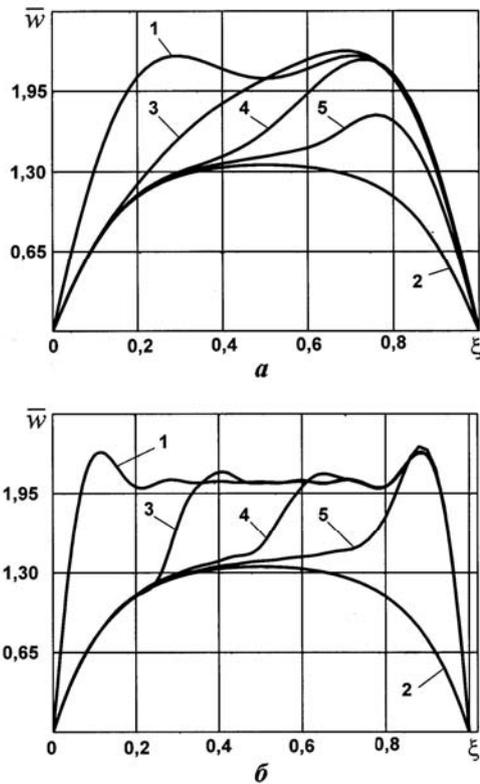


Рис. 4

ны при $\tau_n = 1, 2, 3, 5$, соответственно. Вычисления выполнены при $T = 1$ сек, поэтому относительное время τ численно равно времени t в секундах.

Из полученных результатов следует, что при заданных параметрах оболочки и времени действия нагрузки, не превышающем одной секунды, прогиб и изгибающие моменты в оболочке практически не превышают соответствующие значения, полученные при статическом нагружении. При времени действия нагрузки $t_n = 2,75 - 3,25$ сек прогибы и изгибающие моменты достигают наибольших значений, и при дальнейшем увеличении t_n не возрастают.

Определена также зависимость НДС оболочки от коэффициентов упругого основания β_1, β_2 . Расчет выполнен при $\tau_n = 3$ в момент времени $\tau = 2,75$ при $\beta_2 = 0$ (рис. 3, а) и $\beta_1 = 0$ (рис. 3, б). Получено, что наибольшие значения прогибов и изгибающих моментов, как и следовало ожидать, уменьшаются с увеличением жесткости упругого основания, причем закон изменения прогибов в рассматриваемом диапазоне β_1, β_2 , где их влияние на НДС оболочки уже существенно, близок к линейному. Отметим также, что коэффициент β_2 при этом на порядок меньше коэффициента β_1 .

Влияние упругого основания на прогибы и изгибающие моменты в оболочке исследовано в момент времени $\tau = 2,75$ при заданных значениях времени действия нагрузки $\tau_n = 3$ и коэффициентов упругого основания $\beta_1 = 3 \cdot 10^{-3}$; $\beta_2 = 1,5 \cdot 10^{-4}$. Зависимости \bar{w} от продольной координаты ξ приведены в сечениях на ребре ($\theta = 0$, рис. 4, а) и посередине между ребрами ($\theta = \pi/8$, рис. 4, б). Здесь, как и далее на рис. 5, 6, кривая 1 получена без учета упругого основания, кривая 2 – упругое основание приложено на всей длине оболочки, кривые 3, 4, 5 – упругое основание приложено, соответ-

венно, на одной четверти (от $\xi = 0$ до $\xi = 0,25$), на половине и на трех четвертях по длине оболочки. Зависимости изгибающего момента $\bar{M}_1(\xi)$ построены в сечении $\theta = \pi/8$ (рис. 5), изгибающего момента $\bar{M}_2(\xi)$ – в сечении $\theta = 0$ (рис. 6).

Как следует из графиков, в местах приложения упругого основания подавляются краевые эффекты, а также эффекты, связанные с дискретным размещением ребер. А именно, в отличие от оболочки без упругого основания прогибы на ребрах и между ребрами примерно равны между собой по всей длине оболочки или на участках, где приложено упругое основание. Изгибающие моменты в зоне краевого эффекта уменьшаются при наличии упругого основания в четыре – шесть раз. В местах «обрыва» упругого основания наблюдаются «всплески» изгибающих моментов, однако их максимальные величины меньше, чем в зоне краевого эффекта оболочки без упругого основания.

Заключение.

В работе предложена методика расчета НДС ребристых цилиндрических оболочек, взаимодействующих с упругим основанием, под действием динамических равномерно распределенных осесимметричных нагрузок, приложенных как на всей длине оболочки, так и на ее части. Методика реализована в виде вычислительной программы с помощью программного комплекса «MATLAB». На числовых примерах исследовано влияние как времени действия нагрузки, так и параметров упругого основания на напряженно-деформированное состояние цилиндрических оболочек.

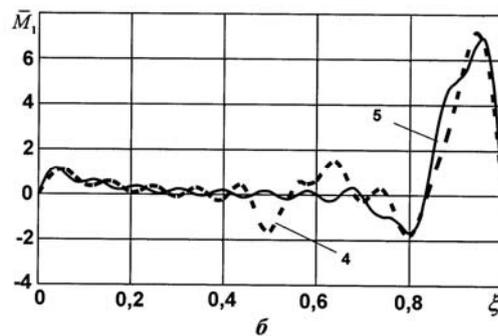
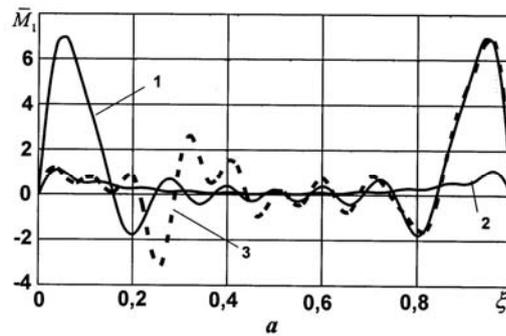


Рис. 5

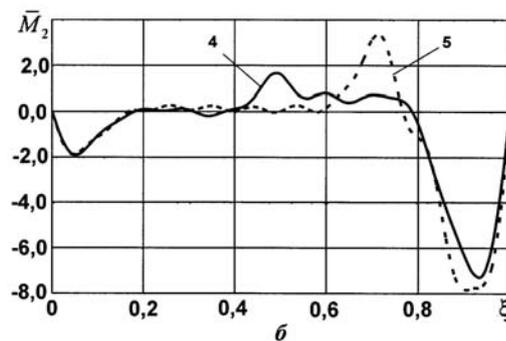
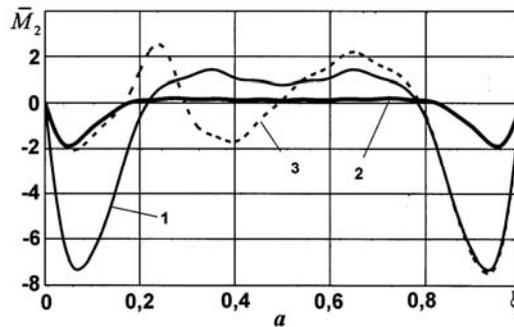


Рис. 6

Р Е З Ю М Е . Викладено методику визначення напружено-деформованого стану ребристої циліндричної оболонки, що взаємодіє з пружною основою, під дією динамічного осесиметричного навантаження. Проведено розрахунки та проаналізовано вплив часу дії навантаження та параметрів пружної основи на прогини і згинні моменти оболонки.

1. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С.* Ребристые цилиндрические оболочки. – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.
2. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Теория ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1980. – 368 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.2).
3. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Ревуцкий В.Н., Скосаренко Ю.В. и др.* Колебания ребристых оболочек вращения. – К.: Наук. думка, 1988. – 172 с.
4. *Пастернак П.Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.
5. *Golovko K.G., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Solution of Axisymmetric Dynamic Problems for Cylindrical Shells on Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 12. – P. 1390 – 1395.
6. *Gulyaev V. I., Lugovoi P. Z., Zayets Yu. A.* Shielding of Elastic Nonstationary Waves by Interfaces // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 4. – P. 414 – 422.
7. *Kubenko V. D., Yanchevskii I. V.* Vibrations of a Nonclosed Two-Layer Spherical Electroelastic Shell under Impulsive Electromechanical Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 3. – P. 303 – 314.
8. *Lugovoi P. Z., Prokopenko N. Ya.* Influence of Reinforcement and Elastic Foundation on the Vibrations of Shallow Shells With Rectangular Planform // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 714 – 719.
9. *Matsunaga H.* Vibration and Stability of Thick Plates on Elastic Foundation // *J. Eng. Mech.* – 2000. – **126**, N 1. – P. 27 – 34.
10. *Maiborodina N.V., Meish V.F.* Forced Vibration of an Ellipsoidal Shells Reinforced with Transverse Ribs under a Nonstationary Distributed Load // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 6. – P. 693 – 701.
11. *Paliwad D.N., K. Pandey Rajesh.* The free vibrations of a cylindrical shell on an elastic foundation // *Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust.* – 1998. – **120**, N 1. – P. 63 – 71.
12. *Rosen A., Singer J.* Vibrations and Buckling of Eccentrically Loaded Stiffened Cylindrical Shells with Elastic Restraints // *Exp. Mech.* – 1976. – **16**, N 3. – P. 88 – 94.
13. *Rosen A., Singer J.* Vibrations and Buckling of Axially Loaded Stiffened Cylindrical Shells with Elastic Restraints // *Int. J. Solid and Struct.* – 1976. – **12**, N 8. – P. 577 – 588.
14. *Shen H.* Large Deflection of Reissner – Mindlin Plates on Elastic Foundations // *J. Eng. Mech.* – 1998. – **124**, N 10. – P. 1080 – 1089.
15. *Tameroglu S.S.* Vibrations of Clamped Rectangular Plates on Elastic Foundation Subjected to Uniform Compressive Forces // *J. Eng. Mech.* – 1996. – **122**, N 8. – P. 714 – 718.
16. *Shi X.P.* Rectangular Thick Plate with Free Edges on Pasternak Foundation // *J. Eng. Mech.* – 1994. – **120**, N 5. – P. 971 – 988.
17. *Skosarenko Yu.V.* Stability of a Ribbed Cylindrical Shell Interacting with an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 5. – P. 556 – 561.
18. *Timoshenko S.P., Young D.X. Weaver Jr.* *Vibration Problems in Engineering.* – New York: John Wiley and Sons, 1974. – 472 p.
19. *Vasilenko A.T., Golub G.P.* Asymmetric Deformation of Orthotropic Shells of Revolution on a Nonlinearly Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 9. – P. 738 – 741.

Поступила 15.05.2012

Утверждена в печать 30.09.2014