

В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук

**УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАМКНУТЫХ  
ОБОЛОЧЕК ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ  
С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ (ОБЗОР)**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: volna@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The results of systematic study of stability and non-linear vibrations of thin cylindrical shells interacting with flowing fluid are presented. The main regularities of dynamical deformation of shells are considered for the buckling of divergence type and flutter type. An effect of different kinds of structural features (the initial imperfections of geometrical shape, the virtual concentrated masses, boundary conditions, and longitudinal and transverse statical loadings) on the critical velocities of divergence and flutter is analyzed. The amplitude-frequency characteristics of shells in hand are constructed and studied under action of the external periodic loadings and the internal periodic pressure that is caused by the small pulsations of velocity of the fluid motion. A technique is proposed that is used for studying the nonlinear problems on non-stationary processes of passing over the resonant areas of shells, while the shell being interacted with the fluid flow.

**Key words:** cylindrical shell, ideal incompressible fluid, stability, critical velocity, divergence, flutter, virtual mass, initial imperfection, resonance, amplitude-frequency characteristic, non-stationary process.

**Введение.**

Задачи об устойчивости, колебаниях и нестационарном (непериодического типа) деформировании тонких оболочек цилиндрической формы при взаимодействии с движущейся внутри них жидкостью представляют существенный интерес для расчетов на динамическую прочность и эксплуатационную надежность разнообразных трубопроводных систем. Сложности постановок и решения такого рода задач обусловлены рядом факторов и обсуждались ранее во многих работах отечественных и зарубежных авторов. Наиболее полно такое обсуждение представлено в обзоре [32]. Известны также другие публикации [40, 62 и др.], в которых рассматривались проблемы взаимодействия различных структур с жидкостным потоком.

В общем случае указанные задачи необходимо рассматривать в нелинейной постановке, учитывать, в частности, геометрическую нелинейность оболочек, а также нелинейное демпфирование. Это позволит более адекватно описывать процессы динамического деформирования этих оболочек как в моменты потери устойчивости, так и в закритических областях, т.е. после потери устойчивости, когда перемещения точек оболочки становятся конечными. С другой стороны, для корректного учета гидродинамических сил, действующих на оболочку со стороны жидкостного потока, необходимо рассматривать многомерные расчетные модели системы оболочка – жидкость [6, 8, 33 и др.]. Такие силы согласно общепринятой в теории устойчивости механических систем терминологии принадлежат к классу специфических *неконсервативных* нагрузок [6, 9, 25, 28] и структурно характеризуются несимметричными матрицами коэффициентов при первых производных от обобщенных координат несущей оболочки. Специфика этих нагрузок состоит в том, что они при определенных скоростях движения жидкости могут «дестабилизировать» несущий упругий объект – его исходное невозмущенное состояние становится неустойчивым, вследствие чего возникает несимметричное динамическое выпучивание, возрастающее со временем по различным законам.

Вопросы устойчивости и колебаний цилиндрических оболочек при взаимодействии с протекающим внутри или с внешней стороны жидкостным потоком рассматривались ранее многими известными учеными-механиками. Наиболее существенные результаты в данной области получены ранее В.В.Болотиным [6], А.С. Вольмиром [8], Э.И. Григолюком и А.Г. Горшковым [12], М.А. Ильгамовым [15], Н.А. Кильчевским и его учениками [26], В.И. Феодосьевым [27], Я. Горачеком и И.А.Золотаревым [10, 11, 14, 42, 43, 70], В.А. Джупановым и С.В. Лилковой – Марковой [41], С. Ченом и Ц. Розенбергом [38], Д. Уивером и Т. Юнни [69], У. Матсузаки и У. Фыном [60], Ф. Пелликано и др. [67], другими авторами. При решении соответствующих задач использовались как линейные, так и нелинейные динамические расчетные модели, для исследования которых применялись различные аналитические, а также численные методы.

Современные численно-аналитические подходы к исследованию устойчивости и нелинейных колебаний цилиндрических оболочек (изотропная и ортотропные модели), взаимодействующих с протекающей внутри жидкостью, достаточно подробно изложены в цикле работ М. Амабили, Ф. Пелликано и М. П. Паидоуссиса [33 – 36 и др.]. Расчетная нелинейная модель оболочек строилась в данных работах на базе многомодовой аппроксимации искомого динамического прогиба  $w$ , в котором учитывались неосесимметричные «сопряженные» формы (изгибные формы с одним и тем же количеством полных волн в окружном направлении  $n$ , но сдвинутые в этом же направлении по фазе на  $\varphi_0 = \pi / 2n$ ) в сочетании с осесимметричными формами:

$$w(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{N_1} [A_{m,n}(t) \cos(n\theta) + B_{m,n}(t) \sin(n\theta)] \sin(\lambda_m x) + \sum_{m=1}^{N_2} A_{m,0}(t) \sin(\lambda_m x).$$

Здесь  $A_{m,n}(t)$ ,  $B_{m,n}(t)$ ,  $A_{m,0}(t)$  – неизвестные функции времени, имеющие смысл обобщенных координат оболочки;  $\lambda_m = m\pi / l$  – параметр волнообразования в продольном направлении;  $x, r, \theta$  – цилиндрические координаты ( $r$  – полярная координата);  $N_1, N_2$  – количество удерживаемых в функции прогиба неосесимметричных и осесимметричных форм, соответственно.

При проведении численных расчетов авторы [33 – 36] учитывали в представленной выше функции прогиба семь членов ряда: две пары сопряженных форм ( $m = 1, 2; n \neq 0$ ) в сочетании с тремя осесимметричными формами ( $m = 1, 3, 5; n = 0$ ). Для решения полученной методом Бубнова – Галеркина системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений использовались численные методы (в частности, программный пакет AUTO [39, 33]). В результате детально исследованы наиболее характерные особенности потери устойчивости и закритического деформирования несущих оболочек как при их свободных колебаниях, так и при действии на конструкцию внешней периодической нагрузки.

Аналогичные или близкие подходы к исследованию процессов взаимодействия оболочек с протекающей жидкостью применялись также в ряде других публикаций. В работах [59, 68] рассмотрены нелинейные задачи о взаимодействии анизотропных цилиндрических оболочек с протекающей жидкостью. Задачи динамики коаксиальных цилиндрических оболочек, заполненных подвижной жидкостью, приведены в работах [61, 63 – 65]. Некоторые результаты исследования влияния статических и периодических осевых нагрузок на устойчивость и колебания заполненных жидкостью цилиндрических оболочек изложены в [66]. В работе [37] рассмотрена нелинейная задача об устойчивости упругой цилиндрической оболочки конечной длины при взаимодействии ее с осевым жидкостным потоком, ограниченным с внешней стороны жестким (недеформируемым) цилиндром.

В целом следует отметить, что задачи динамики связанных систем оболочки – протекающая жидкость характеризуются большим разнообразием, прежде всего, в постановках и целях предполагаемых исследований, а также в методах решения. В преобладающем большинстве случаев жидкостная среда моделируется идеальной и несжимаемой структурой, движение жидкости в оболочке предполагается потенциальным. Деформирование оболочечных объектов описывается обычно с использованием упрощенных математических моделей, полученных в результате сведения трехмерной теории упругого изотропного или анизотропного тела к уравнениям для двух измерений [1, 5 – 7, 30, 31, 52 и др.]. Рядом авторов при этом использована также одномерная идеализация оболочек типа «балочной модели» [27 и др.], которая по некоторым опубликованным оценкам может быть справедливой, если длина оболочки превышает ее диаметр не менее чем, в 6 раз.

Наиболее распространенным в расчетной практике является вариант описания динамического деформирования несущих оболочек с использованием классических гипотез Кирхгофа – Лява. Исходные уравнения представляются при этом либо в перемещениях  $u, v, w$ , либо в смешанной форме [1, 7].

Одной из главных целей во всех задачах о взаимодействии оболочек с потоком жидкости являлось определение на основе линеаризованных уравнений деформирования условий, при которых исходная невозмущенная форма несущей оболочки становится неустойчивой. Неустойчивость проявляется либо в монотонном (непериодического типа), либо динамическом (колебательного типа) выпучивании оболочки. Возрастание амплитуд деформирования оболочки в рамках линейной модели в первом случае будет происходить по экспоненциальному закону (неустойчивость типа *дивергенция*, если использовать терминологию из теории аэроупругости [6 – 8 и др.]), во втором – в виде колебательного режима с прогрессирующими во времени амплитудами (неустойчивость типа *флаттер*).

Таким образом, связанная система оболочка – жидкостной поток при определенных («критических» или превышающих их по величине) скоростях движения жидкости может трактоваться как автоколебательная система. Незатухающие колебания оболочки возникают не при действии внешних периодических нагрузок (таковы в данном случае отсутствуют), а вследствие воздействия специфического механизма обратной связи, осуществляемой между процессом деформирования несущей упругой конструкции, с одной стороны, и специфическим внутренним давлением жидкостного потока, с другой.

Второй основной целью обсуждаемых задач является разработка специальных аналитических и численных методов исследований и определение на их основании характеристик как нестационарного, так и установившегося деформирования оболочек после потери устойчивости. Ограничение амплитуд монотонно возрастающего или флаттерного выпучивания произойдет вследствие воздействия на динамический процесс нелинейных факторов, о которых шла речь ранее – геометрической нелинейности и нелинейного демпфирования, существенно проявляющихся при больших прогибах. Решение нелинейных задач зависит в этом случае от того, в какой области неустойчивости – дивергентной или флаттерной изучается поведение оболочки. Поскольку в дивергентной области порождающая система нелинейных уравнений оболочки не имеет периодических решений, то для определения параметров деформирования здесь необходимо применять численные методы (аналитические методы построения решений данных уравнений в этом случае пока не разработаны). В области флаттера взаимодействующая с потоком жидкости оболочка при установлении будет совершать самовозбуждающие колебания, амплитуда и частота которых (учитывая малость нелинейных упругих и диссипативных сил по сравнению с соответствующими линейными силами) может быть определена с использованием одночастотных асимптотических методов нелинейной механики, в частности, метода усреднения [4, 44, 56]. Между тем, до последнего времени такой «аналитический» подход к решению нелинейных задач динамики системы оболочка – жидкостной поток практически не применялся. Как уже отмечалось, использовались эффективные численные методы, связанные с непосредственным интегрированием разрешающих уравнений несущей оболочки, полученных методом Бубнова – Галеркина (Б – Г).

В настоящей работе излагаются новые, установленные с применением как аналитических, так и численных методов результаты исследований потери устойчивости, а также линейных и нелинейных колебаний тонких цилиндрических оболочек конечной длины при взаимодействии с подвижной жидкостью. При анализе используются уточненные многопараметрические расчетные модели совокупной системы (искомый прогиб несущей оболочки аппроксимировался четырьмя – шестью различными осе- и неосесимметричными формами несущей оболочки; функция демпфирования предполагалась как линейной, так и нелинейной). Рассматриваются различные варианты движения жидкости. Предполагается, в частности, что скорость движения жидкости в оболочке постоянная либо содержит «накладывающиеся» на постоянную величину малые пульсационные слагаемые. При этом частота пульсаций может быть как неизменной, так и медленно изменяющейся со временем величиной. Построение соответствующих нестационарных и установившихся решений исходных нелинейных уравнений проводилось асимптотическим методом Боголюбова – Митропольского (Б – М), ориентированным на исследование одночастотных режимов колебаний в системах со многими степенями свободы. Предварительно на основе линеаризованных уравнений определены значения критических скоростей движения жидкости, при которых исходная (невозмущенная) форма оболочки становится неустойчивой. Решение нелинейных уравнений построено в окрестности данных критических скоростей. В случае постоянных значений скоростей жидкости получены аналитические формулы для определения стационарных амплитуд и частот самовозбуждаемых колебаний оболочек в зоне флаттера и исследована устойчивость установившихся режимов. При пульсирующей скорости движения жидкости с фиксированной частотой построены и проанализированы критерии, на основании которых установлены области динамической неустойчивости оболочки, порожденные одновременно двумя факторами – влиянием движения жидкости с критической скоростью и воздействием пульсаций скорости, частота которых «резонирует» с собственной частотой оболочки с жидкостью (реализуется параметрический резонанс). Исследованы построенные для этого случая амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), соответствующие установившимся режимам параметрически возбуждаемых колебаний. Если частота пульсаций переменная (в работе рассмотрен случай ее линейного изменения во времени), выведены уравнения, позволяющие устанавливать в первом приближении величины амплитуд колебаний оболочки при медленном прохождении резонансных зон. Рассмотрены характерные особенности нестационарного деформирования оболочки при прямом и обратном прохождении указанных зон, задавая различные скорости прохождения. Приведены также некоторые результаты исследования прохождения оболочки с жидкостью через дивергентную и флаттерную области.

При выборе материала предпочтение было отдано задачам, которые рассматривались непосредственно авторами статьи или выполненными совместно с коллегами по работе. Естественно, что результаты многих, в том числе важных и интересных как с научной, так и с практической точек зрения, полученных другими авторами исследований, не нашли в статье отражения. В частности, в обзоре не представлены исследования по динамике и устойчивости несущих оболочек, моделируемых упрощенными («балочными») структурами; не отражены исследования взаимодействия оболочек с вязкой и сжимаемой жидкостью, отсутствуют результаты исследований хаотических режимов колебаний и др.

## **§1. Исходные нелинейные динамические уравнения системы оболочка – жидкость.**

**1.1. Уравнения деформирования оболочек.** Рассмотрим замкнутую упругую цилиндрическую оболочку конечной длины, заполненную полностью жидкостью, движущейся с некоторой скоростью  $U$ , постоянной или изменяющейся со временем. Соответствующие геометрические размеры оболочки представлены на рис. 1.1. Предполагаем, что оболочка подвергается действию внешней, неравномерно распределенной по боковой поверхности, радиальной периодической нагрузки вида  $q = q_0(x, y) \cos \Omega_0 t$ . Здесь  $q_0(x, y)$  – некоторая функция пространственных координат  $x$  и  $y$  ( $x, y$  – координаты точек срединной поверхности, отсчитываемые, соответственно, вдоль образующей и по дуге);  $\Omega_0 = \text{const}$ .

В дальнейшем полагаем, что материал оболочки соответствует ортотропной или изотропной модели. Принимаем также, что обозначенные на рис. 1.1 штриховыми линиями участки вне оболочки ( $x < 0$ ,  $x > l$ ), не оказывают через крепления на торцах (т.е. через граничные условия) никакого влияния на напряженно-деформированное состояние рассматриваемой модели (когда  $0 \leq x \leq l$ ).

Для описания динамического деформирования оболочки выберем геометрически нелинейные уравнения классической теории, представленные в перемещениях  $u, v, w$ . В случае ортотропной модели эти уравнения имеют вид [1, 7, 13]:

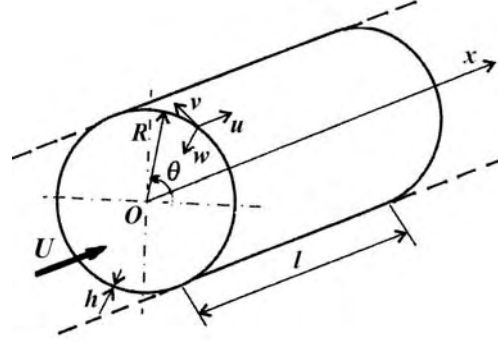


Рис. 1.1

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{12} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + C_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + F_1; \\ \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= C_{22} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + C_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + F_2; \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= - \left[ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_G) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \\ &+ \frac{1}{R} C_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} C_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} w \right) + q_1 - P_z + F_3. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь использованы традиционные в теории композитных (ортотропной структуры) оболочек обозначения [1, 13]:

$$\begin{aligned} D_{kk} &= \frac{E_k h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}; \quad C_{kk} = \frac{E_k h}{1 - \mu_1 \mu_2} \quad (k = 1, 2); \\ C_{12} = C_{21} &= \frac{E_1 \mu_2 h}{1 - \mu_1 \mu_2} = \frac{E_2 \mu_1 h}{1 - \mu_1 \mu_2}; \quad C_{66} = Gh; \quad D_{12} = D_{11} \mu_2; \quad D_G = \frac{Gh^3}{12}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $E_1, E_2$  – модули упругости в направлении осей  $x$  и  $y$ , соответственно;  $G$  – модуль сдвига;  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона, причем  $E_1 \mu_2 = E_2 \mu_1$ . Кроме того, обозначено:  $q_1 = -\varepsilon_0 \rho h \frac{\partial w}{\partial t} - q$  ( $\rho$  – плотность материала оболочки;  $\varepsilon_0$  – коэффициент конструктивного демпфирования;  $\varepsilon_0 > 0$ );  $P_z$  – гидродинамическое давление жидкостного потока на оболочку;  $F_k$  ( $k = 1, \dots, 3$ ) – нелинейные, зависящие от перемещений  $u, v, w$  функции, имеющие вид [1, 13]

$$\begin{aligned} F_1 &= C_{11} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ F_2 &= C_{22} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 = & \frac{C_{12}}{2R} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{C_{22}}{2R} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_{11} \frac{\partial w}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + C_{12} \frac{\partial w}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\
& + C_{66} \frac{\partial w}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \left. \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ C_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\
& \left. + C_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + C_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\}. \quad (1.3)
\end{aligned}$$

Если в системе (1.1) с учетом (1.2) положить [1, 7]

$$E_1 = E_2 = E; \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu; \quad G = E/(2(1 + \mu)), \quad (1.4)$$

получим динамические уравнения, соответствующие изотропным оболочкам, цилиндрическая жесткость которых  $D = (Eh^3)/(12(1 - \mu^2))$ .

Как известно, во многих случаях динамические процессы в тонких оболочках можно рассматривать без учета распространения упругих волн в материале, вследствие чего становится возможным отбросить инерционные члены в первых двух уравнениях (1.1). Указанные два уравнения при этом тождественно удовлетворяются, если учесть соотношения [7]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{N_x}{h}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{N_y}{h}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{T}{h}, \quad (1.5)$$

в которых  $N_x, N_y, T$  – соответственно, нормальные и касательное усилия, действующие на площадках главных нормальных сечений, причем [1, 5]

$$\begin{aligned}
N_x = \sigma_x h = & C_{11} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + C_{12} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \\
N_y = \sigma_y h = & C_{22} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + C_{12} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\
T = \tau_{xy} h = & C_{66} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right], \quad (1.6)
\end{aligned}$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – нормальные и касательное напряжения, соответственно. На основании системы (1.1) с учетом соотношений (1.3), (1.5), (1.6) тогда получим систему нелинейных уравнений для определения прогиба  $w$  и функции напряжений в срединной поверхности  $\Phi$  [1, 7]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \Delta_D^4 w = & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{q_1}{h} - \frac{P_z}{h}; \\
\Delta_\delta^4 \Phi = & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Здесь  $\Delta_D^4, \Delta_\delta^4$  – дифференциальные операторы вида

$$\Delta_D^4 = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad \Delta_\delta^4 = \delta_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$(D_3 = D_{12} + 2D_{66}; \quad \delta_1 = 1/E_1; \quad \delta_2 = 1/E_2; \quad 2\delta_3 = 1/G - 2\mu_1/E_1).$$

Аналогичные (1.7) уравнения выводим из (1.1) с учетом (1.3) и в случае изотропной оболочки, когда выполняются соотношения (1.4). В этом случае операторы  $\Delta_D^4$  и следует заменить на такие операторы:  $\Delta_D^4 \rightarrow D \nabla^4$ ;  $\Delta_\delta^4 \rightarrow \nabla^4/E$ , где  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ .

Динамические уравнения рассматриваемой оболочки при наличии конструктивных особенностей типа присоединенных масс или начальных несовершенств (малых отклонений от идеальной цилиндрической с круговым поперечным сечением формы) представлены ниже (§3).

**1.2. Гидродинамическая нагрузка на оболочку.** При рассмотрении «гидродинамической» части задачи в большинстве практических случаев вводится предположение, что заполняющая оболочку жидкость является идеальной и несжимаемой, а ее движение – потенциальное. Гравитационным эффектом, обусловленным действием веса жидкости на оболочку (здесь и далее рассматриваются оболочки средней длины [7, 8, 23]), пренебрегаем [33 – 36 и др.].

Учитывая то, что оболочка имеет конечную длину, представим потенциал возмущенных скоростей жидкости  $\bar{\varphi}$  в виде двух слагаемых [6, 8, 33]  $\bar{\varphi} = -Ux + \varphi$  ( $0 \leq x \leq l$ ), второе из которых,  $\varphi$  надлежит определить из уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0, \quad (1.8)$$

где  $x, r, \theta$  – цилиндрические координаты ( $0 \leq x \leq l, 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ).

Для определения неизвестного давления  $P_z$  на оболочку используется уравнение Бернулли (его линеаризованный вариант), из которого получено следующее соотношение [6, 8, 33]:

$$P_z = -\rho_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{r=R} \quad (\rho_0 - \text{плотность жидкости}). \quad (1.9)$$

**1.3. Общая и упрощенная расчетные модели нелинейного деформирования оболочки, взаимодействующей с потоком жидкости.** Пусть на краях рассматриваемого участка оболочки реализуются наиболее часто используемые при расчетах условия «классического» свободного опирания (SS1/SS1), имеющие следующий вид [1, 7]:

$$w = 0; \quad v = 0; \quad M_x = 0; \quad N_x = 0 \quad \text{при } x = 0, x = l. \quad (1.10)$$

Напомним, что  $v$  – перемещение точек срединной поверхности в окружном направлении;  $M_x = D_{11} \left( (\partial^2 w)/(\partial x^2) + \mu_2 (\partial^2 w)/(\partial y^2) \right)$  – изгибающий момент;  $N_x$  – приходящееся на единицу длины продольное усилие.

Учитывая условие замкнутости оболочки для перемещения  $v$  [7]:  $\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy =$

$$= \int_0^{2\pi R} \left[ \frac{1}{E_2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R} \right] dy = 0$$

ее динамический прогиб  $w$  в рассматриваемом случае можно представить в виде двухпараметрического разложения [7, 13, 23, 33]

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_1^{nm} \cos s_n y + f_2^{nm} \sin s_n y) \sin \lambda_m x, \quad (1.11)$$

где  $f_{1,2}^{nm}$  – неизвестные функции времени, имеющие смысл обобщенных координат оболочки;  $s_n = n/R$ ,  $\lambda_m = m\pi/l$  – параметры волнообразования в окружном и продольном направлениях, соответственно. Принимая во внимание условие непроницаемости [6, 8]

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = - \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1.12)$$

а также известное физическое ограничение  $(\partial \varphi / \partial r)_{r=0} < \infty$ , из уравнения (1.8) с учетом (1.11), (1.12) получаем такое выражение потенциала  $\varphi$  [44, 51, 57]:

$$\begin{aligned} \varphi = & - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_n(\lambda_m r)}{\lambda_m I'_n(\lambda_m R)} \left[ (\dot{f}_1^{nm} \cos s_n y + \dot{f}_2^{nm} \sin s_n y) \sin \lambda_m x + \right. \\ & \left. + \lambda_m U (f_1^{nm} \cos s_n y + f_2^{nm} \sin s_n y) \cos \lambda_m x \right]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь  $I_n$  модифицированные функции Бесселя  $n$ -го порядка;  $I'_n(\zeta) = (I_{n-1}(\zeta) + I_{n+1}(\zeta))/2$ , ( $\zeta = \lambda_m R$ ).

Учитывая (1.9), (1.11), (1.13), и реализуя метод Б – Г к исходным динамическим уравнениям (1.7) получим окончательно следующую систему уравнений для определения искомых функций  $f_{1,2}^{nm}$  [24, 33, 44, 45]:

$$\begin{aligned} & \ddot{f}_1^{nm} + (\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm} U^2) f_1^{nm} + \varepsilon^{nm} \dot{f}_1^{nm} + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{nq}^{(m)} U \dot{f}_q^{nm} = \\ & = F_1^{nm} (\{f_1^{pk}\}, \{f_2^{pk}\}, \{\dot{f}_1^{pk}\}, \{\dot{f}_2^{pk}\}) + Q_1^{nm} \cos \Omega_0 t; \\ & \ddot{f}_2^{nm} + (\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm} U^2) f_2^{nm} + \varepsilon^{nm} \dot{f}_2^{nm} + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{nq}^{(m)} U \dot{f}_q^{nm} = \\ & = F_2^{nm} (\{f_1^{pk}\}, \{f_2^{pk}\}, \{\dot{f}_1^{pk}\}, \{\dot{f}_2^{pk}\}) + Q_2^{nm} \cos \Omega_0 t \quad (n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь  $\omega_{nm}$  – частоты собственных колебаний оболочки, заполненной жидкостью;

$$\omega_{nm}^2 = \frac{1}{\rho m_0^{nm}} \left[ \frac{1}{h} (D_{11} \lambda_m^4 + 2D_{33} \lambda_m^2 s_n^2 + D_{22} s_n^4) + \frac{\lambda_m^4}{R^2 \Delta_\delta(\lambda_m, s_n)} \right]; m_0^{nm} – параметр присоеди-$$

ненной массы жидкости  $m_0^{nm} = 1 + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\lambda_m h} \frac{I_n(\lambda_m R)}{I'_n(\lambda_m R)}$ ;  $\alpha_{nm}, \beta_{nq}^{(m)}$  – параметры гидродина-

мического давления на оболочку  $\alpha_{nm} = \frac{\rho_0}{\rho h} \frac{\lambda_m}{m_0^{nm}} \frac{I_n(\lambda_m R)}{I'_n(\lambda_m R)}$ ;  $\beta_{nq}^{(m)} = \frac{4\rho_0}{\rho h l} \frac{\lambda_m [1 - (-1)^{m-q}]}{m_0^{nm} (\lambda_m^2 - \lambda_q^2)}$  ×

×  $\frac{I_n(\lambda_m R)}{I'_n(\lambda_m R)}$  ( $m \neq q$ );  $\varepsilon^{nm}$  – приведенные параметры линейного демпфирования

$\varepsilon^{nm} = \varepsilon_0 / m_0^{nm}$ ;  $F_{1,2}^{nm}$  – нелинейные функции переменных  $f_{1,2}^{pk}, \dot{f}_{1,2}^{pk}$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ) до третьей степени включительно, характеризующие геометрическую нелинейность и нелинейное демпфирование;



$$Q_1^{nm} = \frac{2}{\pi R l \rho h m_0^{nm}} \int_0^l \int_0^{2\pi R} q_0(x, y) \cos s_n y \sin \lambda_m x dx dy;$$

$$Q_2^{nm} = \frac{2}{\pi R l \rho h m_0^{nm}} \int_0^l \int_0^{2\pi R} q_0(x, y) \sin s_n y \sin \lambda_m x dx dy.$$

Уравнения (1.14) являются исходными для решения как задач устойчивости несущих оболочек вследствие взаимодействия их с протекающей внутри жидкостью, так и задач о нелинейном деформировании данных оболочек, реализуемых после потери устойчивости (в закритической области). Кроме того, на основании этих уравнений можно исследовать особенности резонансных колебаний несущих оболочек при действии на них внешних периодических и квазипериодических (когда частота  $\Omega_0$  медленно изменяются во времени) нагрузок, при «пульсирующем» гидродинамическом давлении на оболочку со стороны жидкостного потока и др.

При практическом решении всех этих задач рассматриваются, как отмечалось уже ранее, упрощенные расчетные динамические модели системы оболочка – жидкость, позволяющие, тем не менее, выявить все наиболее существенные особенности взаимодействия оболочечного объекта и протекающей жидкости. В преобладающем большинстве случаев динамический прогиб  $w$  представляется в виде такой аппроксимации [20, 24, 45 – 47, 51 и др.]:

$$w = w = (f_1 \cos sy + f_2 \sin sy) \sin \lambda_1 x + (f_3 \cos sy + f_4 \sin sy) \sin \lambda_2 x + W_0(t, x) \quad (1.15)$$

или в виде более простого выражения [17, 50, 57, 58]

$$w = f_1 \cos sy \sin \lambda_1 x + f_3 \cos sy \sin \lambda_2 x + W_0(t, x). \quad (1.16)$$

Здесь  $s = s_n = n/R$  ( $n \neq 0$ );  $\lambda_1 = m_1 \pi / l$ ;  $\lambda_2 = m_2 \pi / l$  (при этом рассматриваются обычно низшие осевые формы:  $m_1 = 1$ ;  $m_2 = 2$ );  $W_0(t, x)$  – корректирующее слагаемое, призванное отразить специфику нелинейного деформирования оболочек («преимущественное выпучивание вовнутрь» [7, 22, 23]). В последующем функцию  $W_0(t, x)$  зададим в форме

$$W_0(x) = f_5 \sin^4 \lambda_1 x + f_6 \sin^4 \lambda_2 x, \quad (1.17)$$

которая строго удовлетворяет принятым граничным условиям (в более ранних работах данная функция удовлетворяла условиям (1.10) лишь в первом приближении, поскольку требование  $M_x = 0$  не было выполнено). Слагаемое  $\varphi_0$  общего потенциала  $\varphi$ , отвечающее осесимметричному прогибу (1.17), имеет вид [46]

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & \left\{ \frac{K_{01}}{4\lambda_1} f_5 \cos 2\lambda_1 x + \frac{K_{02}}{4\lambda_2} f_6 \cos 2\lambda_2 x - \frac{K_{03}}{32\lambda_1} f_5 \cos 4\lambda_1 x - \frac{K_{04}}{32\lambda_2} f_6 \cos 4\lambda_2 x + \right. \\ & \left. + \frac{3}{16R} (2x^2 - r^2)(f_5 + f_6) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{K_{01}}{2} f_5 \sin 2\lambda_1 x + \frac{K_{02}}{2} f_6 \sin 2\lambda_2 x - \frac{K_{03}}{8} f_5 \sin 4\lambda_1 x - \frac{K_{04}}{8} f_6 \sin 4\lambda_2 x \right) U \right\} \\ & \left( K_{01} = \frac{I_0(2\lambda_1 r)}{I_0'(2\lambda_1 R)}; K_{02} = \frac{I_0(2\lambda_2 r)}{I_0'(2\lambda_2 R)}; K_{03} = \frac{I_0(4\lambda_1 r)}{I_0'(4\lambda_1 R)}; K_{04} = \frac{I_0(4\lambda_2 r)}{I_0'(4\lambda_2 R)} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что аппроксимация (1.15) позволяет исследовать как традиционные формы потери устойчивости и закритических колебаний – в виде стоячих (с неподвижными узловыми линиями) волн, так и более сложные формы – в виде бегущих изгибных волн, распространяющихся в окружном направлении [7, 13, 16, 21, 23, 53 – 55].

Бегущие волны являются результатом наложения с определенным сдвигом фаз двух стоячих волн с одними и теми же параметрами волнообразования в продольном и окружном направлениях (например, волн  $f_1 \cos sy \sin \lambda_p x$  и  $f_2 \sin sy \sin \lambda_p x$  ( $p = 1, 2$ ), которые в научной литературе именуются «сопряженными» изгибными формами [9, 16]) (в зарубежной литературе сопряженную форму, которая возбуждается благодаря нелинейным связям между обобщенными координатами называют иногда формой «наложенных» колебаний или *companion mode* [33]). Система разрешающих уравнений для определения функций  $f_1, \dots, f_6$  примет в данном случае вид [46]

$$\begin{aligned} \ddot{f}_k + (\omega_k^2 - \alpha_k U^2) f_k + \varepsilon_k \dot{f}_k + U \sum_{q=1}^4 \beta_q^{(k)} \dot{f}_q &= F_k(\dots) + Q_k \cos \Omega_0 t; \\ \ddot{f}_j + (\omega_j^2 - \alpha_j U^2) f_j + \sum_{q=5}^6 \varepsilon_q^{(j)} \dot{f}_q + U \sum_{q=5}^6 \beta_q^{(j)} \dot{f}_q + \sum_{q=5}^6 \delta_{q1}^{(j)} \ddot{f}_q + \sum_{q=5}^6 \delta_{q2}^{(j)} f_q &= F_j(\dots) + Q_j \cos \Omega_0 t \end{aligned}$$

( $k = 1, 2, 3, 4; j = 5, 6$ ). (1.18)

Здесь в первых четырех уравнениях обозначено:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_{nm_1}; \quad \omega_3 = \omega_4 = \omega_{nm_2}; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{nm_1}; \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_{nm_2}; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{nm_1}; \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_{nm_2}; \quad \beta_3^{(1)} = \beta_4^{(2)} = -\frac{16}{3} \frac{1}{\lambda_2 h l} \frac{I_n(\lambda_2 R)}{I_n'(\lambda_2 R)}; \quad \beta_1^{(3)} = \beta_2^{(4)} = \frac{16}{3} \frac{1}{\lambda_1 h l} \frac{I_n(\lambda_1 R)}{I_n'(\lambda_1 R)} \\ \text{(остальные } \beta_q^{(k)} = 0). \end{aligned}$$

Постоянные коэффициенты  $\omega_j, \alpha_j, \varepsilon_q^{(j)}, \beta_q^{(j)}, \delta_{q1}^{(j)}, \delta_{q2}^{(j)}, Q_j$  ( $j = 5, 6$ ) в последних двух «корректирующих» уравнениях (1.18) являются результатом реализации процедуры Б – Г с использованием весовых функций  $\sin^4 \lambda_1 x$  и  $\sin^4 \lambda_2 x$ , соответственно, (из-за громоздкости не приводятся). Функции  $F_k, F_j$  являются нелинейными функциями переменных  $f_1, \dots, f_6$  и их производных до третьей степени включительно.

Из (1.14) нетрудно получить уравнения для  $f_i$  ( $i = 1, 3, 5, 6$ ), соответствующие аппроксимации (1.16). Если при этом учесть, что частоты  $\omega_5$  и  $\omega_6$  значительно превышают частоты  $\omega_1$  и  $\omega_3$  [7, 22], то определение функций  $f_5, f_6$  можно свести к решению соответствующей «квазистатической» задачи, полагая  $\ddot{f}_5 = 0, \ddot{f}_6 = 0$ . В результате для определения основных функций  $f_1, f_3$  получим, если учесть геометрически нелинейные члены до третьей степени включительно и не принимать во внимание нелинейное демпфирование, следующую систему уравнений [58]:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \omega_{11} f_1 + \varepsilon_1 \dot{f}_1 - \beta_1 U \dot{f}_3 &= \varepsilon F_{11}(f_1, f_3) + \varepsilon Q_1 \cos \Omega_0 t; \\ \ddot{f}_3 + \omega_{33} f_3 + \varepsilon_3 \dot{f}_3 + \beta_2 U \dot{f}_1 &= \varepsilon F_{33}(f_1, f_3) + \varepsilon Q_3 \cos \Omega_0 t. \end{aligned}$$

(1.19)

$[\omega_{11} = \omega_1^2 - \alpha_1 U^2; \omega_{33} = \omega_3^2 - \alpha_3 U^2; Q_k = Q_{k0} / \rho h m_{0k}$  ( $k = 1, 3$ );  $F_{11}(f_1, f_3) = \gamma_1 f_1^3 + \gamma_2 f_1 f_3^2$ ;  $F_{33}(f_1, f_3) = \gamma_3 f_3^3 + \gamma_4 f_3 f_1^2$ , где  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$  – зависящие от физических и геометрических параметров оболочки, заполненной жидкостью, а также от скорости жидкостного потока  $U$  постоянные коэффициенты [58]].

При выводе уравнений (1.19) принято, что внешняя нагрузка  $q$  возбуждает непосредственно лишь первые две формы колебаний в прогибе (1.16), т.е. функция  $q_0(x, y)$  имеет вид  $q_0(x, y) = Q_{10} \cos sy \sin \lambda_1 x + Q_{30} \cos sy \sin \lambda_2 x$ ,  $Q_{k0} = \text{const}$ , ( $k = 1, 3$ ).

Аналогичные уравнения можно получить и для определения функций  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 4$ ), описываемых системой (1.18).

В последующем на основании представленных выше расчетных уравнений в форме (1.14), (1.18) или (1.19) изложены результаты исследований критических скоростей движения жидкости в оболочечных объектах; изучены особенности влияния на потерю устойчивости различных конструктивных факторов; воздействия внешней среды; рассмотрены особенности нелинейного и нестационарного деформирования несущих оболочек и др.

## §2. Критерии и формы потери устойчивости оболочек при взаимодействии с подвижной жидкостью.

**2.1. Вводные замечания.** Решение вопроса о квазистатической, динамической или комбинированного вида потере устойчивости несущей оболочки вследствие взаимодействия с внутренним потоком жидкости проводится путем анализа соответствующих линеаризованных автономных ( $q = 0$ ) динамических уравнений, приведенных в §1. Известно, что для суждения об устойчивости необходимо располагать непосредственно либо решениями этих уравнений, либо точными сведениями о знаках вещественных частей корней характеристического уравнения. Следует при этом иметь в виду, что построение решений в ряде случаев (в частности при рассмотрении уравнений высоких степеней) представляет подчас трудоемкую задачу, поскольку требует непосредственного вычисления корней указанного уравнения. Поэтому на практике чаще используются критерии, устанавливающие условия, при которых вещественные части всех корней будут отрицательны. Наибольшее распространение при этом получил алгебраический критерий Гурвица [25].

В свою очередь, формы потери устойчивости несущей оболочки зависят от того, в какой области реализуется переход характеристического показателя  $\Omega$  из левой полуплоскости комплексного переменного на правую полуплоскость [6, 28]. Если этот переход происходит через начало координат ( $\text{Im}\Omega = 0$ ), то потеря устойчивости оболочки будет соответствовать *дивергентной* форме (траектория 2 на рис. 2.1). Если же в момент перехода указанный показатель по-прежнему остается комплексным числом ( $\text{Im}\Omega \neq 0$ ) (траектория 1), то наступит неустойчивость *флаттерного* типа (возникнут колебания с прогрессирующими во времени амплитудами).

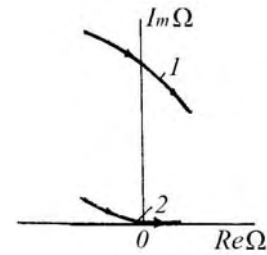


Рис. 2.1

**2.2. Преобразование динамических уравнений к нормальным («бинормальным») координатам.** Для определения в аналитическом виде форм деформирования несущей оболочки при потере устойчивости того или иного вида целесообразно преобразовать линеаризованную систему (1.14) или ее упрощенные варианты (1.18), (1.19) к нормальным координатам. Сложности такого преобразования обуславливаются тем, что рассматриваемая система принадлежит к классу несамосопряженных систем [4, 6, 29]. Формулы преобразования зависят от значений скоростей движения жидкости, поскольку при различных скоростях качественно различными (действительными или комплексными) будут и корни соответствующих характеристических уравнений.

Учитывая актуальность данной задачи, проиллюстрируем кратко методику сведения неконсервативной системы к нормальной форме на примере линейной модели (1.19)

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \omega_{11}f_1 + \varepsilon_1\dot{f}_1 - \beta_1 U \dot{f}_3 &= q_{11}(t); \quad \ddot{f}_3 + \omega_{33}f_3 + \varepsilon_3\dot{f}_3 + \beta_2 U \dot{f}_1 = q_{33}(t) \\ (q_{kk} &= Q_k \cos \Omega_0 t; \quad k = 1, 3). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Дополнительно рассмотрим сопряженную по отношению к автономным уравнениям (2.1) систему

$$\begin{aligned} \ddot{f}_{11} + \omega_{11}f_{11} - \varepsilon_1\dot{f}_{11} - \beta_1 U \dot{f}_{33} &= 0; \quad \ddot{f}_{33} + \omega_{33}f_{33} - \varepsilon_3\dot{f}_{33} + \beta_2 U \dot{f}_{11} = 0 \\ \left( \beta_1 = \frac{16}{3} \frac{\rho_0}{\rho m_{01}} \frac{1}{\lambda_3 h l} \frac{I_n(\lambda_3 R)}{I'_n(\lambda_3 R)}; \quad \beta_2 = \frac{16}{3} \frac{\rho_0}{\rho m_{03}} \frac{1}{\lambda_1 h l} \frac{I_n(\lambda_1 R)}{I'_n(\lambda_1 R)} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Собственные формы для каждой из систем (2.1) (при условии  $q_{kk} = 0, k = 1, 3$ ) и (2.2) после нормировки можно представить так:

$$\Phi_1 = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\Omega_1^2 + \omega_{11} + \varepsilon_1 \Omega_1}{\beta_1 U \Omega_1} & \frac{\Omega_2^2 + \omega_{11} + \varepsilon_1 \Omega_2}{\beta_1 U \Omega_2} & \frac{\Omega_3^2 + \omega_{11} + \varepsilon_1 \Omega_3}{\beta_1 U \Omega_3} & \frac{\Omega_4^2 + \omega_{11} + \varepsilon_1 \Omega_4}{\beta_1 U \Omega_4} \end{array} \right\};$$

$$\Phi_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{p_1^2 + \omega_{11} - \varepsilon_1 p_1}{\beta_2 U p_1} & \frac{p_2^2 + \omega_{11} - \varepsilon_1 p_2}{\beta_2 U p_2} & \frac{p_3^2 + \omega_{11} - \varepsilon_1 p_3}{\beta_2 U p_3} & \frac{p_4^2 + \omega_{11} - \varepsilon_1 p_4}{\beta_2 U p_4} \end{array} \right\},$$

где  $\Omega_1, \dots, \Omega_4$  – корни характеристического уравнения исходной системы

$$\Omega^4 + c_1 \Omega^3 + c_2 \Omega^2 + c_3 \Omega + c_4 = 0, \quad (2.3)$$

а коэффициенты  $c_j$  выражаются так:

$$c_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3; \quad c_2 = \omega_{11} + \omega_{33} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \beta_1 \beta_2 U^2; \quad c_3 = \varepsilon_1 \omega_{33} + \varepsilon_3 \omega_{11}; \quad c_4 = \omega_{11} \omega_{33}; \quad (2.4)$$

$p_1, \dots, p_4$  – корни характеристического уравнения сопряженной системы ( $p_k = \Omega_k$ ).

Пусть корни уравнения (2.3) являются комплексными и имеют в общем случае вид  $\Omega_{1,2} = s_1 \pm i s_2$ ;  $\Omega_{3,4} = s_3 \pm i s_4$ . Здесь  $s_j = s_j(U)$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) – некоторые действительные параметры, зависящие от величины скорости потока,  $i = \sqrt{-1}$ . Вводя замену переменных

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{Bmatrix} = [\Phi_1] \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_1^* \\ \xi_2 \\ \xi_2^* \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

(здесь и в дальнейшем звездочкой обозначены комплексно сопряженные величины) и используя процедуру преобразования неконсервативных систем к нормальным («би-нормальным») координатам [4, 29], сведем уравнения (2.1) к такой форме [50]:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + (s_1^2 + s_2^2) \eta_1 - 2s_1 \dot{\eta}_1 &= q_1; \quad \ddot{\mu}_1 + (s_1^2 + s_2^2) \mu_1 - 2s_1 \dot{\mu}_1 = q_2; \\ \ddot{\eta}_2 + (s_3^2 + s_4^2) \eta_2 - 2s_3 \dot{\eta}_2 &= q_3; \quad \ddot{\mu}_2 + (s_3^2 + s_4^2) \mu_2 - 2s_3 \dot{\mu}_2 = q_4, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\eta_1, \eta_2, \mu_1, \mu_2$  – действительные переменные, причем  $\eta_1 = \xi_1 + \xi_1^*$ ;  $\eta_2 = \xi_2 + \xi_2^*$ ;  $\mu_1 = -i(\xi_1 - \xi_1^*)$ ;  $\mu_2 = -i(\xi_2 - \xi_2^*)$ ,  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 4$ ) – функции времени, выражающиеся через правые части уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} q_1 &= (\dot{A}_1 + \dot{A}_1^*) - (\Omega_2 A_1 + \Omega_1 A_1^*); \quad q_2 = -(A_1 - A_1^*)i + (\Omega_2 A_1 - \Omega_1 A_1^*); \\ q_3 &= (\dot{A}_2 + \dot{A}_2^*) - (\Omega_4 A_2 + \Omega_3 A_2^*); \quad q_4 = -(A_2 - A_2^*)i + (\Omega_4 A_2 - \Omega_3 A_2^*). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функции  $A_1, A_2$  выражаются здесь так:  $A_1 = p_{11} q_{11} + p_{12} q_{33}$ ;  $A_2 = p_{21} q_{11} + p_{22} q_{33}$ , причем  $p_{jk}$  – действительные постоянные коэффициенты, зависящие от параметров корней характеристического уравнения  $s_1, s_2, s_3, s_4$  [29, 50]. Следует отметить, что правые

части уравнений (2.6)  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 4$ ) зависят не только от исходных функций  $q_{11}(t)$  и  $q_{33}(t)$ , но и от их производных, что характерно лишь для неконсервативных систем. Такая же ситуация будет характерна и для случая, если в правых частях уравнений (2.1) учесть также нелинейные члены  $F_{kk}(f_1, f_3)$  ( $k = 1, 3$ ).

Таким образом, получена система независимых уравнений, на основании которых можно определить непосредственно значения критических скоростей потока, при которых наступит неустойчивость оболочки типа флаттер. Из (2.6), в частности, следует, что колебательная потеря устойчивости оболочки наступит при выполнении одного из условий  $s_1(U) > 0$ ,  $s_2(U) \neq 0$  или  $s_3(U) > 0$ ,  $s_4(U) \neq 0$ . При этом динамический прогиб  $w$  (1.19) (линейная составляющая) при потере устойчивости надлежит представить с учетом замен [29, 50]

$$f_1 = \eta_1 + \eta_2; \quad f_2 = d_1\eta_1 + d_2\mu_1 + d_3\eta_2 + d_4\mu_2 \quad (2.8)$$

$$\left( \begin{aligned} d_1 &= \frac{(s_1^2 + s_2^2)(s_1 + \varepsilon_1) + \omega_{11}s_1}{\beta_1 U (s_1^2 + s_2^2)}; \quad d_2 = \frac{[\omega_{11} - (s_1^2 + s_2^2)]s_2}{\beta_1 U (s_1^2 + s_2^2)}; \\ d_3 &= \frac{(s_3^2 + s_4^2)(s_3 + \varepsilon_1) + \omega_{11}s_3}{\beta_1 U (s_3^2 + s_4^2)}; \quad d_4 = \frac{[\omega_{11} - (s_3^2 + s_4^2)]s_4}{\beta_1 U (s_3^2 + s_4^2)}. \end{aligned} \right) \quad (2.9)$$

Если оболочка находится в зоне дивергентной формы потери устойчивости (уравнение (2.3) в этом случае будет иметь одновременно действительные и комплексные корни:  $\Omega_1 = \nu_1(U)$ ;  $\Omega_2 = \nu_2(U)$ ;  $\Omega_{3,4} = s_3(U) \pm is_4(U)$ , где  $\nu_1, \nu_2 = \text{const}$ ), то вместо (2.6) получим такие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 - \nu_1^2 \eta_1 &= q_{11}; \quad \ddot{\mu}_1 - \nu_2^2 \mu_1 = q_{21}; \quad \ddot{\eta}_2 + (s_3^2 + s_4^2)\eta_2 - 2s_3\dot{\eta}_2 = q_{31}; \\ \ddot{\mu}_2 + (s_3^2 + s_4^2)\mu_2 - 2s_3\dot{\mu}_2 &= q_{41}. \end{aligned}$$

Здесь  $q_{ki}$  ( $k = 1, 2, \dots, 4$ ) – функции времени, структура которых аналогична (2.7). Вместо замен (2.8) в данном случае будем иметь

$$f_1 = \eta_1 + \mu_1 + \eta_2; \quad f_3 = \bar{d}_1\eta_1 + \bar{d}_2\mu_1 + d_3\eta_2 + d_4\mu_2, \quad (2.10)$$

причем  $\bar{d}_{1,2} = (\nu_{1,2}^2 + \omega_{11} + \varepsilon_1\nu_{1,2})/(\beta_1 U \nu_{1,2})$ , а коэффициенты  $d_3, d_4$  по-прежнему определяются формулами (2.9).

Отметим, что, используя (1.16) и соотношения (2.8) и (2.10) (или в общем случае (2.5)), можно определить формы нестационарного деформирования (при дивергенции) и формы колебаний (при флаттере) рассматриваемых оболочек при потере устойчивости. Например, формы колебаний оболочки при флаттере соответствуют одному из соотношений [50]

$$W_1(x, y) = C_1 [sm\lambda_1 x + (d_1 + K_1 d_2) sm\lambda_2 x] \cos sy$$

или

$$W_2(x, y) = C_2 [sm\lambda_1 x + (d_3 + K_2 d_4) sm\lambda_2 x] \cos sy \quad (C_1, C_2 = \text{const}),$$

где  $K_1, K_2$  – постоянные величины, определяемые заданными начальными условиями  $w(t_0), \dot{w}(t_0)$ .

**2.3. Алгебраическая форма критериев устойчивости.** Такие критерии проиллюстрируем на примере автономных уравнений (2.1) при  $q_{kk} = 0$  ( $k = 1, 3$ ). Характеристическое уравнение (2.3) будет в данном случае иметь корни с отрицательными вещественными частями при одновременном выполнении следующих условий [25]:

$$c_2 > 0; c_3 > 0; c_4 > 0; c_1 c_2 c_3 - c_3^2 - c_4 c_1^2 > 0, \quad (2.11)$$

на основании которых выводим четыре критерия [50, 57]:

$$1) U^2 < \frac{\omega_1^2 + \omega_3^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3}{\alpha_0}; \quad 2) U^2 < \frac{\varepsilon_1 \omega_3^2 + \varepsilon_3 \omega_1^2}{\varepsilon_1 \alpha_3 + \varepsilon_3 \alpha_1};$$

$$3) (\omega_1^2 - \alpha_1 U^2)(\omega_3^2 - \alpha_3 U^2) > 0; \quad 4) e_0 U^4 + e_1 U^2 + e_2 > 0, \quad (2.12)$$

где  $e_0, e_1, e_2$  – постоянные коэффициенты, имеющие вид

$$e_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 \alpha_3 + \varepsilon_3 \alpha_1) \alpha_0 - (\varepsilon_1 \alpha_3 + \varepsilon_3 \alpha_1)^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2 \alpha_1 \alpha_3;$$

$$e_1 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)[(\varepsilon_1 \alpha_2 + \varepsilon_3 \alpha_1) q + (\varepsilon_1 \omega_3^2 + \varepsilon_3 \omega_1^2) \alpha_0] + 2(\varepsilon_1 \alpha_3 + \varepsilon_3 \alpha_1)(\varepsilon_1 \omega_3^2 + \varepsilon_3 \omega_1^2) +$$

$$+(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2 (\omega_1^2 \alpha_3 + \omega_3^2 \alpha_1);$$

$$e_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 \omega_3^2 + \varepsilon_3 \omega_1^2) \varphi_0 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2 \omega_1^2 \omega_3^2 - (\varepsilon_1 \omega_3^2 + \varepsilon_3 \omega_1^2)^2;$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_3 - \beta_1 \beta_2; \quad \varphi_0 = \omega_1^2 + \omega_3^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3.$$

Если демпфирование отсутствует ( $\varepsilon_0 = 0$ ), то критерии устойчивости (2.11) упрощаются, требуя одновременного выполнения лишь двух условий [24, 50, 57]

$$c_4 > 0; \quad c_2 > 2\sqrt{c_4}. \quad (2.13)$$

**2.4. Дивергентная форма потери устойчивости.** Как следует из анализа уравнения (2.3), *монотонная* (дивергентного типа) форма потери устойчивости реализуется при нарушении третьего критерия (2.12). Критические скорости на левой и правой границах дивергентной области определяются из соотношений [24, 50]

$$U_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{\alpha_1}; \quad U_0^{(2)} = \omega_2 / \sqrt{\alpha_3}. \quad (2.14)$$

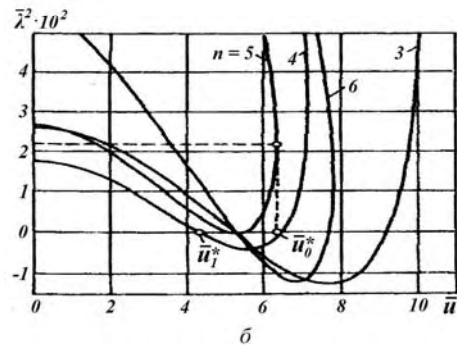
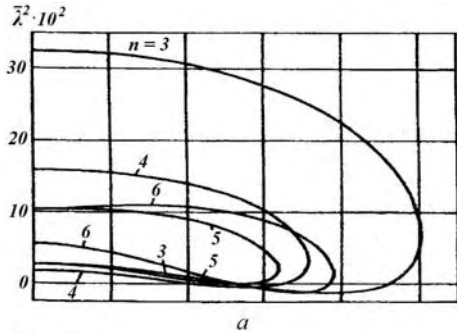


Рис. 2.2

Существенно подчеркнуть, что эти скорости вообще не зависят от параметра демпфирования  $\varepsilon_0$ , даже если оно в исходных динамических уравнениях учитывается.

Пусть несущая жидкость ( $\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ) оболочка характеризуется параметрами [58]

$$E = 0,67 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad R = 0,16 \text{ м};$$

$$\mu = 0,32; \quad l = 0,8 \text{ м}; \quad h = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \quad (2.15)$$

Рис. 2.2, 2.3 иллюстрируют результаты вычислений критических скоростей движения жидкости, при которых будет происходить та или иная потеря устойчивости исследуемой оболочки. На рис. 2.2, а показаны графики зависимостей  $\bar{\lambda}^2(\bar{U})$ , построенных на основании уравнения (2.3) при варьировании волнового параметра  $n$  (указан на рисунке). Увеличенный фрагмент этого рисунка в области перехода величины  $\bar{\lambda}^2$  в зону отрицательных значений показан на рис. 2.2, б. При построении использованы

безразмерные параметры:  $\bar{\lambda} = \Omega l / k_0$ ,  $\bar{U} = U / k_0$ , где  $k_0 = (\pi^2 / l) [D / (\rho h)]^{1/2}$  [33]. Границы дивергентной области соответствуют пересечению изображенных на рисунках кривых с горизонтальной осью.

В табл. 2.1 приведены безразмерные численные значения граничных критических скоростей дивергенции, из которых следует, что дивергентная потеря устойчивости ранее всего наступит при  $\bar{U}_\phi = 4,32$ ,  $n = 4$ . Минимальная ширина всей дивергентной области наблюдается при возбуждении в оболочке изгибной формы с числом окружающих волн  $n = 5$ .

При увеличении параметра  $n$  (начиная с  $n = 5$ ) область дивергентной неустойчивости будет расширяться.

Таблица 2.1

| $\bar{U}_\phi$       | $n$   |      |             |             |      |       |       |       |
|----------------------|-------|------|-------------|-------------|------|-------|-------|-------|
|                      | 2     | 3    | 4           | 5           | 6    | 7     | 8     | 9     |
| $\bar{U}_\phi^{(1)}$ | 8,89  | 5,23 | <b>4,32</b> | 5,27        | 5,28 | 6,33  | 8,16  | 10,61 |
| $\bar{U}_\phi^{(2)}$ | 14,52 | 9,20 | 6,48        | <b>5,36</b> | 7,71 | 11,07 | 15,33 | 20,51 |

Рис. 2.3 иллюстрирует характер нестационарного выпучивания оболочки во времени при скоростях движения жидкости из дивергентной зоны  $5,27 \leq \bar{U} \leq 5,36$  при  $n = 5$ . Представленные здесь безразмерные прогибы  $\bar{w} = w / h$  (предполагалось, что функция  $w$  имеет вид (1.16)) получены в результате численного интегрирования линейных уравнений (2.1) при  $q_{kk} = 0 (k = 1, 3)$ ;  $x = l / 4, y = 0$ ) и начальных условиях  $w(0) = 0,34h$ ,  $\dot{w}(0) = 0$ . Кривые 1 – 5 построены, соответственно, при  $\bar{U}_1 = 5,27$ ;

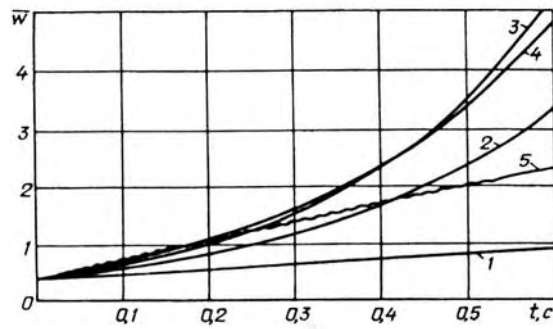


Рис. 2.3

$\bar{U}_2 = 5,30$ ;  $\bar{U}_3 = 5,32$ ;  $\bar{U}_4 = 5,34$ ;  $\bar{U}_5 = 5,36$ .

Как следует из рис. 2.3, возрастание прогиба в выбранной зоне скоростей потока происходит относительно медленно и монотонно (по экспоненциальным или близким к ним законам). В то же время максимальный рост данного прогиба реализуется в срединной части дивергентной зоны (т.е. при  $U \approx (U_\phi^{(1)} + U_\phi^{(2)}) / 2$ ).

**2.5. Потеря устойчивости оболочек по типу флаттер.** Если пренебречь демпфированием ( $\varepsilon_0 = 0$ ), то критические скорости флаттера  $U_\phi$  определяются из второго критерия (2.13) [24, 57]:

$$U_\phi = \sqrt{-\frac{d_2}{2d_1} \pm \left( \frac{d_2}{2d_1} \right)^2 - \frac{d_3}{d_1}}. \quad (2.16)$$

Здесь обозначено:  $d_1 = \alpha_0^2 - 4\alpha_1\alpha_3$ ;  $d_2 = -2(\omega_1^2 + \omega_3^2)\alpha_0 + 4(\omega_1^2\alpha_3 + \omega_3^2\alpha_1)$ ;  $d_3 = (\omega_1^2 - \omega_3^2)^2$ . Подкоренное выражение в (2.16) должно быть положительным. Частота  $\lambda_\phi$  возбуждаемых в момент флаттерной потери устойчивости колебаний выражается формулой [24]

$$\lambda_\phi = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_3^2 - \alpha_0 U_\phi^2}{2}}. \quad (2.17)$$

В табл. 2.2 приведены численные значения безразмерных величин  $\bar{U}_\phi, \bar{\lambda}_\phi$  ( $\bar{\lambda}_\phi = \lambda_\phi l / k_0$ ), полученные для оболочки с параметрами (2.15). Частота  $\bar{\lambda}_\phi$  соответствует моменту появления кратных корней характеристического уравнения (2.3) при  $\varepsilon_0 = 0$  [6, 24].

Таблица 2.2

| $\bar{U}_\phi, \bar{\lambda}_\phi$ | $n$    |        |        |              |        |        |        |        |
|------------------------------------|--------|--------|--------|--------------|--------|--------|--------|--------|
|                                    | 2      | 3      | 4      | 5            | 6      | 7      | 8      | 9      |
| $\bar{U}_\phi$                     | 16,121 | 10,078 | 7,174  | <b>6,343</b> | 7,822  | 11,066 | 15,362 | 20,598 |
| $\bar{\lambda}_\phi$               | 42,008 | 25,991 | 18,307 | 15,038       | 11,916 | 2,704  | 15,471 | 24,743 |

Сравнивая результаты, представленные в табл. 2.1 и 2.2, можно заключить, что критические скорости  $U_\phi^{(\max)}$  и  $U_\phi$ , при которых произойдет потеря устойчивости оболочки, при увеличении числа окружных волн  $n$  приближаются друг к другу и при относительно больших значениях  $n$  могут практически совпадать.

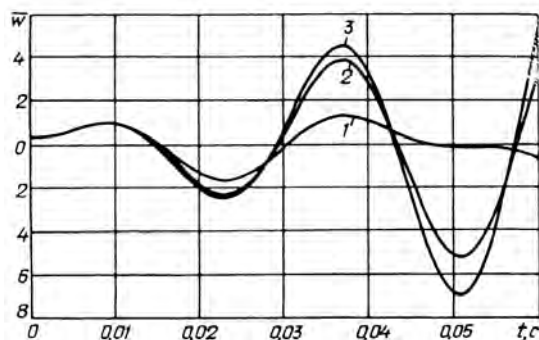


Рис. 2.4

На рис. 2.4 показан процесс развития прогибов при неустойчивости типа флаттер. Исходные данные здесь такие же, как и при построении рис 2.3. Кривым 1 – 3 соответствуют такие значения скоростей потока:  $\bar{U}_1 = 6,28$ ;  $\bar{U}_2 = 6,36$ ;  $\bar{U}_3 = 6,38$ . Таким образом, потеря устойчивости оболочки при выбранных скоростях потока соответствует колебательному процессу с прогрессирующими во времени амплитудами. Чем больше величина «расстройки»  $\Delta = U - U_\phi > 0$ , тем существеннее рост указанных амплитуд, и наоборот.

**2.6. Зависимость критических скоростей потока от геометрических параметров оболочки.** Как формы потери устойчивости оболочек, транспортирующих жидкость, так и величины критических скоростей жидкостного потока существенно зависят от геометрических параметров каждой из данных оболочек. Ранее всего такая задача была рассмотрена с использованием модели Флюгге в работе [69]. Авторами данной работы установлено, что с увеличением толщины и длины несущих оболочек количество окружных волн  $n$ , соответствующих моменту наступления неустойчивости, постепенно уменьшается. В пределе оболочка может потерять устойчивость даже по стержневой (балочной) форме.

Ниже представлены некоторые результаты исследований влияния геометрических параметров оболочки на критическую скорость потока жидкости, при которой реализуются флаттерные колебания, а также на частоту этих колебаний [24, 50]. Расчеты проводились, исходя из анализа автономных линейных уравнений (1.7) при учете в них соотношений (1.4).

Рисунки 2.5, а, б иллюстрируют влияние безразмерных параметров оболочки – относительных длины  $\bar{l} = l / R$  и толщины  $\bar{h} = h / R$  – на величину критической скорости флаттера  $\bar{U}_3 = \bar{U}_\phi = U_\phi / k_0$  при варьировании волнового параметра  $n$  (указан на рисунках). Построения проведены с использованием формулы (2.16), полученной исходя из анализа характеристического уравнения, составленного для системы (1.19). В первом случае (рис. 2.5, а) рассмотрена оболочка постоянной толщины  $h = 6,4 \cdot 10^{-4}$  м, во вто-



ром (рис. 2.5, б) – оболочка постоянной длины  $l = 5R$ . Остальные параметры соответствовали (2.15). При определении безразмерного параметра  $k_0$  во всех случаях принято  $l = 0,80$  м.

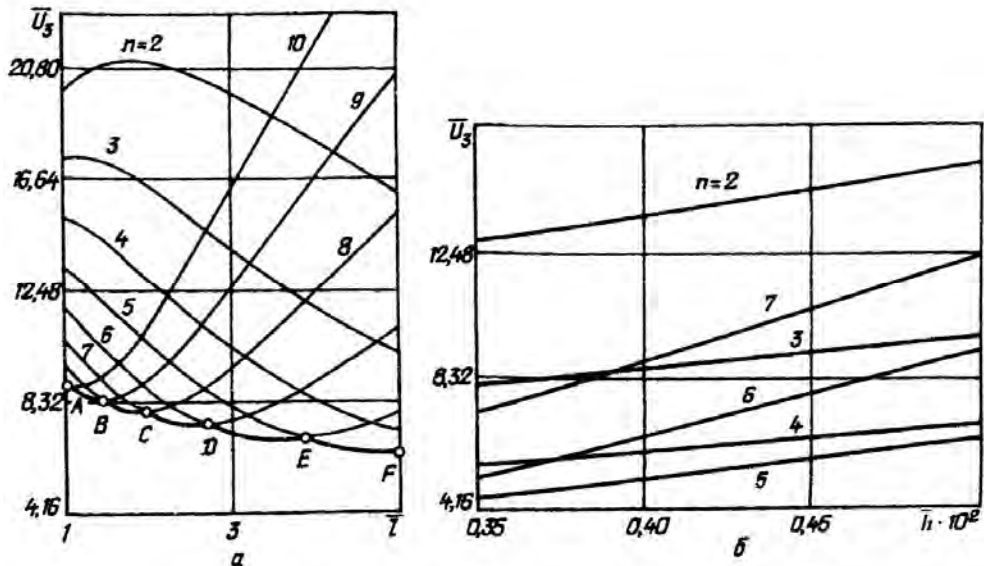


Рис. 2.5

Представленные графики свидетельствуют о более сильном влиянии на динамическую неустойчивость оболочки изменения ее длины, чем толщины. Из рис. 2.5, а видно, например, что при варьировании параметра  $\bar{l}$  в пределах  $1 < \bar{l} < 5$  критическим скоростям  $\bar{U}_\phi$  (им соответствует нижняя огибающая  $AB \dots F$  всех показанных кривых) будут отвечать формы с пятью различными значениями параметра  $n$ : на участке  $AB - n = 9$ ;  $BC - n = 8$  и т. д. Во втором случае (рис. 2.5, б) волновой параметр  $n$  при потере устойчивости оболочек с относительной толщиной  $0,0035 < \bar{h} < 0,005$  остается одним и тем же для всех возможных в данной области значений критической скорости  $\bar{U}_\phi$ .

На рис. 2.6 показано как изменяются частоты самовозбуждаемых колебаний оболочки  $\bar{\lambda} = \lambda_\phi l / k_0$ , возникающих в момент флаттерной потери устойчивости при увеличении относительных длины  $\bar{l}$  (рис. 2.6, а) или толщины  $\bar{h}$  (рис. 2.6, б).

Обозначенные здесь жирными участки частотных кривых  $AB, B_1C, C_1D, D_1E, E_1F$  соответствуют минимальным

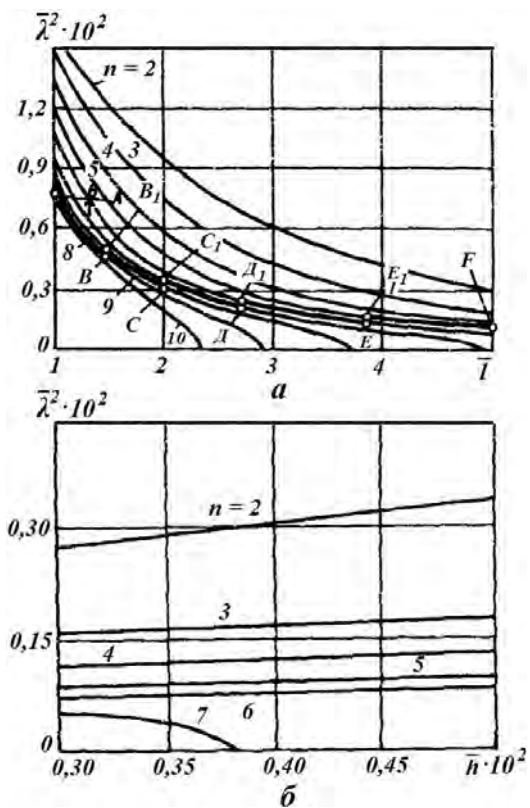


Рис. 2.6

значениям критических скоростей  $\bar{U}_\phi$  и определяют частоту флаттерных колебаний  $\bar{\lambda}$  для каждого из выбранных параметров  $n$ . Наблюдаемые при этом «скачки» частот при определенных величинах длин оболочки объясняются изменением в этот момент формы ее волнообразования в окружном направлении при динамической потере устойчивости.

**2.7. Частотные спектры оболочек, взаимодействующих с потоком жидкости. Внутренние резонансы.** При практических расчетах флаттерной потери устойчивости оболочек вследствие взаимодействия их с жидкостным потоком ограничиваются, как уже отмечалось, учетом в расчетной математической модели двух низших осевых форм ( $m_1 = 1, m_2 = 2$ ). Такой упрощенный подход можно считать правомерным, если в разрешающих динамических уравнениях, построенных на основании (1.15) или (1.16), отсутствуют внутренние резонансы [13, 23] (нет близких или кратных частот, соответствующих флаттерным колебаниям оболочки). Между тем, многие реальные оболочки, заполненные подвижной жидкостью, не всегда удовлетворяют этим требованиям. В результате установленные при решениях соответствующих задач значения критических скоростей потока могут оказаться далекими от истинных значений. Так, в табл. 2.3 приведены, например, полученные из соотношения (2.16) с учетом (2.15) численные значения безразмерных критических скоростей потока жидкости  $\bar{U}_\phi$ , отвечающих различным комбинациям окружных ( $n$ ) и осевых ( $m_1, m_2$ ) волновых параметров [24]. Как обычно, здесь выделены величины минимальных скоростей  $\bar{U}_\phi$ , при которых ранее всего возникнут неосесимметричные колебания оболочки с прогрессирующими во времени амплитудами для каждой из серий параметров. Отметим, что эти скорости соответствуют взаимодействию «соседних» осевых форм, т.е. форм с параметрами  $m_1$  и  $m_2 = m_1 + 1$ . Учет в аппроксимациях (1.15) или (1.16) форм с какими-либо другими комбинациями параметров  $m_1, m_2$  (например,  $m_1 = 1, m_2 = 3$ ;  $m_1 = 2, m_2 = 4$  и т.д.) обусловит возникновение флаттера при бо'льших значениях скоростей  $U$ . Отметим также, что соответствующая минимальной скорости потока  $\bar{U}_\phi^{(\min)}$  ( $\bar{U}_\phi^{(\min)} = 6,003$ ) потеря устойчивости оболочки в рассматриваемом случае произойдет вследствие взаимодействия осевых форм  $m_1 = 2$  и  $m_2 = 3$ , которые не отвечают низшим осевым формам оболочки. Отсутствие в некоторых случаях положительных решений  $U$  в (2.16) означает, что уравнение (2.3) не имеет кратных корней. Следовательно, потеря устойчивости оболочки по флаттерному типу в данной ситуации вообще невозможна. Реализованной может быть лишь дивергентная форма потери устойчивости.

Таблица 2.3

| $m_1$ | $m_2$ | $n$    |        |        |              |              |              |               |        |
|-------|-------|--------|--------|--------|--------------|--------------|--------------|---------------|--------|
|       |       | 2      | 3      | 4      | 5            | 6            | 7            | 8             | 9      |
| 1     | 2     | 16,121 | 10,078 | 7,174  | <b>6,343</b> | 7,822        | 11,066       | 15,362        | 20,598 |
|       | 3     | 36,852 | 25,697 | 18,316 | 13,185       | –            | –            | –             | –      |
|       | 4     | 23,815 | 18,207 | 13,852 | 10,665       | –            | –            | –             | –      |
| 2     | 3     | 17,546 | 12,114 | 8,800  | 6,163        | <b>6,003</b> | 6,402        | 8,226         | 10,974 |
|       | 4     | 38,539 | 30,860 | 23,760 | 18,409       | 14,309       | 10,559       | –             | –      |
|       | 5     | 23,788 | 20,198 | 16,364 | 13,222       | 10,748       | 8,641        | –             | –      |
| 3     | 4     | 18,295 | 13,732 | 10,483 | 8,281        | 6,888        | <b>6,235</b> | 6,471         | 7,787  |
|       | 5     | 35,555 | 32,321 | 26,870 | 21,902       | 17,854       | 14,504       | <b>11,344</b> | –      |
|       | 6     | 21,794 | 20,534 | 17,730 | 14,953       | 12,579       | 10,602       | 8,838         | –      |

Таблица 2.4

| $m_1$ | $m_2$ | $n$     |        |         |               |               |         |         |        |
|-------|-------|---------|--------|---------|---------------|---------------|---------|---------|--------|
|       |       | 2       | 3      | 4       | 5             | 6             | 7       | 8       | 9      |
| 1     | 2     | 42,008  | 25,991 | 18,307  | 15,038        | 11,916        | 2,704   | 15,471  | 24,743 |
|       | 3     | 183,457 | 127,86 | 90,058  | 61,677        | –             | –       | –       | –      |
|       | 4     | 114,899 | 89,197 | 67,040  | 48,140        | –             | –       | –       | –      |
| 2     | 3     | 43,181  | 25,838 | 17,357  | <b>14,444</b> | <b>14,822</b> | 12,302  | 17,062  | 34,297 |
|       | 4     | 305,41  | 248,95 | 191,701 | 147,155       | 111,051       | 72,754  | –       | –      |
|       | 5     | 167,1   | 154,42 | 127,363 | 102,172       | 79,363        | 52,827  | –       | –      |
| 3     | 4     | 46,646  | 23,359 | 3,422   | 7,917         | 5,970         | 13,826  | 13,767  | 20,207 |
|       | 5     | 369,803 | 350,84 | 294,438 | 239,674       | 193,349       | 15 2,60 | 108,812 | –      |
|       | 6     | 171,298 | 199,78 | 181,48  | 155,100       | 129,198       | 103,85  | 73,453  | –      |

Величины безразмерных частот  $\bar{\lambda}_\phi$  флаттерных колебаний оболочки, полученные на основании формулы (2.17), приведены в табл. 2.4. Как следует из представленных в таблице результатов, возбуждаемые вследствие потери устойчивости колебания оболочки в зависимости от волновых параметров  $m_1, m_2, n$  могут характеризоваться близкими, а также кратными частотами. Например, близкими можно считать выделенные в табл. 2.4 частоты  $\bar{\lambda}_\phi = 14,444$  и  $\bar{\lambda}_\phi = 14,822$ , соответствующие комбинированным формам:  $m_1 = 2, m_2 = 3, n = 5$  и  $m_1 = 2, m_2 = 3, n = 6$ . Безразмерная скорость движения жидкости при этом –  $\bar{U} \approx 6$ . В таблице можно также обнаружить немало и кратных частот. Однако, такая ситуация менее опасна с точки зрения динамической прочности рассматриваемой оболочечно-жидкостной конструкции, поскольку может быть реализована в достаточно узкой частотной зоне [23].

Физически близость (кратность) частот означает, что динамическая потеря устойчивости оболочки может происходить при одновременном участии в данном процессе изгибных форм с разными как осевыми ( $m_1, m_2$ ), так и окружными  $n_k, n_j$  ( $k \neq j$ ) параметрами. Энергетически эти формы сильно связаны между собой при колебаниях – возбуждение каким-либо внешним источником некоторой одной из них обусловит немедленное возбуждение других форм, частоты которых находятся в резонансных соотношениях с частотой исходной формы. Отметим, что эта особенность обязательно должна учитываться при построении достоверных нелинейных расчетных моделей оболочек, взаимодействующих с жидкостным потоком.

Из табл. 2.4 также следует, что действительные значения  $\bar{\lambda}_\phi$  отсутствуют при тех же значениях  $n$  ( $n \geq 6$ ), при которых нет положительных решений для  $\bar{U}_\phi$  (табл. 2.3).

**2.8. Влияние диссипативных сил на устойчивость оболочек. Эффект «дестабилизации».** Задача об определении критических скоростей движения жидкости в несущей оболочке усложняется при учете в динамических уравнениях демпфирования (т.е. когда  $\varepsilon_0 \neq 0$ ). Устойчивость оболочки регламентируется в данном случае общими критериями (2.11) или (2.12). Некоторые особенности влияния демпфирования на потерю устойчивости упругих систем при наличии неконсервативных (зависящих от перемещений упругого объекта) сил детально ранее исследованы В.В.Болотиным [6], Г.Циглером [28], другими авторами [3, 8]. Было обнаружено специфическое явление «дестабилизации», заключающееся в том, что эти системы при учете достаточно малого демпфирования могли потерять устойчивость при меньших значениях сжимающих «следящих» нагрузок или меньших уровнях аэродинамического давления (по сравнению со случаем, когда демпфирование вообще не принималось во внимание). Такого

же рода явления следует ожидать и при взаимодействии цилиндрических оболочек с протекающей внутри жидкостью, несмотря на качественное различие сил аэродинамического и гидродинамического давлений (первые из них структурно являются «позиционными» [6, 25], вторые – имеют «гироскопическую» структуру).

Эффект «дестабилизации» применительно к оболочкам с жидкостью иллюстрируется рис. 2.7 (а, б), 2.8 (а, б), на которых показаны траектории действительных ( $Re\Omega$ ) и мнимых ( $Im\Omega$ ) частей всех четырех корней характеристического уравнения (2.3) в случае  $n=4$  при  $\bar{\varepsilon}_0=0$  и  $\bar{\varepsilon}_0=0,108$  ( $\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0/(2\omega_1 m_{01})$ ) [33], соответственно, при увеличении скорости потока жидкости от 0 до 100 м/с. Рассмотрена изотропная оболочка с параметрами (2.15).

Таким образом, как следует из рисунков, потеря устойчивости оболочки при  $\varepsilon_0=0$  и  $\varepsilon_0 \neq 0$  реализуется по качественно различным сценариям. В частности, при  $\varepsilon_0 \neq 0$  существует лишь одна область скоростей  $M_1(0 \leq U \leq U_A)$ , в которой оболочка будет устойчивой. Если же  $\varepsilon_0=0$ , таких непересекающихся областей устойчивости две:  $0 \leq U \leq U_A$ ,  $U_B \leq U \leq U_C$ .

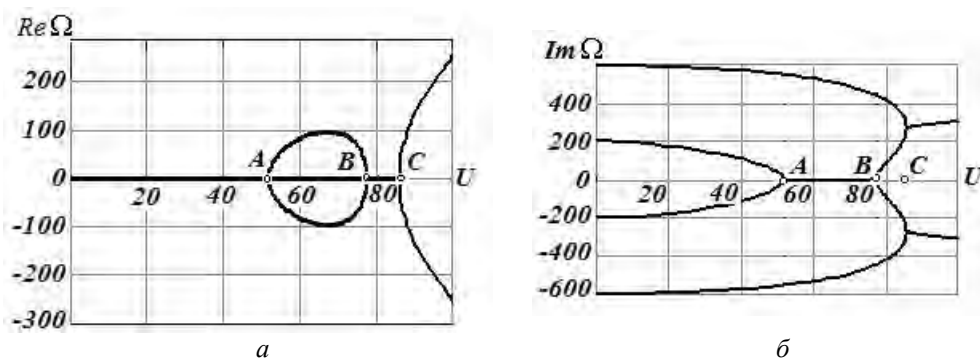


Рис. 2.7

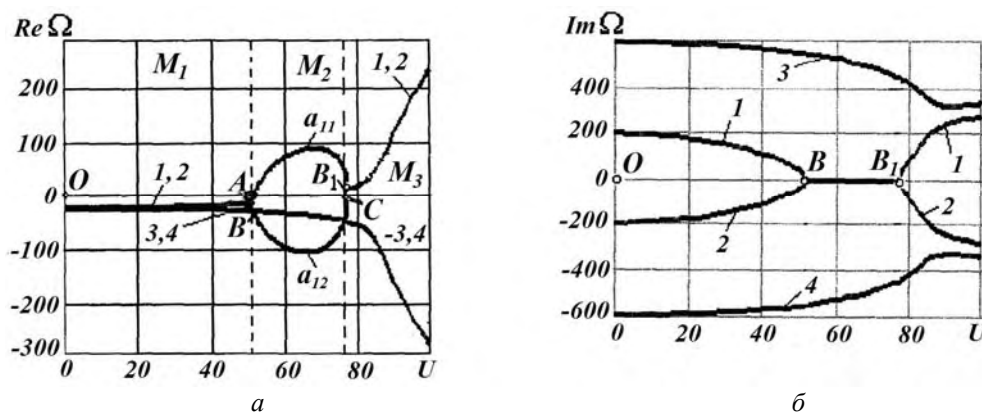


Рис. 2.8

Дивергентная неустойчивость наступит при скорости потока  $U=U_A$ , величина которой в рамках принятой модели не зависит от параметра демпфирования. Правая граница дивергентной области  $U=U_{B_1}$  незначительно превышает величину  $U_B$ , установленную при  $\varepsilon_0=0$ . При этом в случае малого демпфирования потеря устойчивости по типу флаттер в случае малого демпфирования практически наступит сразу после окончания дивергентной зоны, т.е., при  $U=U_{B_1}$ .

Для определения величины действительной части характеристического показателя  $\Omega$  в точке  $B_1$  следует в уравнении (2.3) принять [57]  $\Omega_{1,2} = s_1 \pm i s_2$ ,  $\Omega_3 = \Omega_4 = a_{00} > 0$  ( $a_{00} = a_{11} = a_{12}$ ). В результате из (2.3) получим такую систему:

$$\begin{aligned} 3a_{00}^4 + 2c_1a_{00}^3 + c_2a_{00}^2 - c_4 = 0; \quad 2a_{00}^4 + c_1a_{00}^3 - c_3a_{00} - 2c_4 = 0; \\ 4a_{00}^3 + 3c_1a_{00}^2 + 2c_2a_{00} + c_3 = 0, \end{aligned}$$

которая имеет действительные решения  $a_{00}$  лишь при определенных скоростях жидкостного потока  $U = U_0$ . Данная система эквивалентна двум уравнениям с двумя неизвестными величинами  $a_{00}$  и  $U_0$  [57]:

$$e_0a_{00}^2 + e_1a_{00} + e_2 = 0; \quad e_3a_{00}^2 + e_4a_{00} + e_5 = 0. \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} [e_0 = 8c_2 - 3c_1^2; e_1 = 2(6c_3 - c_1c_2); e_2 = 16c_4 - c_1c_3; e_3 = 16c_4 - c_1c_3; \\ e_4 = 2(6c_1c_4 - c_2c_3); e_5 = 8c_2c_4 - 3c_3^2, \end{aligned}$$

причем зависимость коэффициентов  $c_1, \dots, c_4$  от  $U_0$  устанавливается соотношениями (2.4)].

В табл. 2.5 приведены численные значения искомого параметра  $a_{00}$  и  $U_0$  для рассматриваемой оболочки при  $n = 4$  в зависимости от коэффициента демпфирования  $\varepsilon_0$ .

Таблица 2.5

| $a_{00}, 1/c$<br>$U_0, м/с$ | $\varepsilon_0, 1/c$ |        |        |        |
|-----------------------------|----------------------|--------|--------|--------|
|                             | 0,2                  | 0,4    | 0,6    | 1,0    |
| $a_{00} \cdot 10^2$         | 0,107                | 0,215  | 0,324  | 0,539  |
| $U_0$                       | 77,558               | 77,558 | 77,558 | 77,558 |

Таким образом, с ростом параметра  $\varepsilon_0$  величина  $a_{00}$  также возрастает, что обусловит соответствующее увеличение темпа возрастания амплитуды колебаний оболочки в момент появления флаттера. При этом скорость  $U_0$  при рассматриваемых относительно малых значениях  $\varepsilon_0$  остается практически неизменной (отличие наблюдается в четвертой – пятой значащей цифре после запятой).

Описанное выше явление дестабилизации может быть устранено путем увеличения коэффициента демпфирования  $\varepsilon_0$  (эффект «больших сил трения»). Критическое значение параметра  $\varepsilon_0$ , при котором указанный эффект исчезает, определяем из соотношения  $U_0(\varepsilon_0) = U_\phi$ , где  $U_0(\varepsilon_0)$  – скорость потока, вычисляемая из уравнений (2.18),  $U_\phi$  – критическая скорость флаттера, определяемая формулой (2.16). На рис. 2.9 показаны

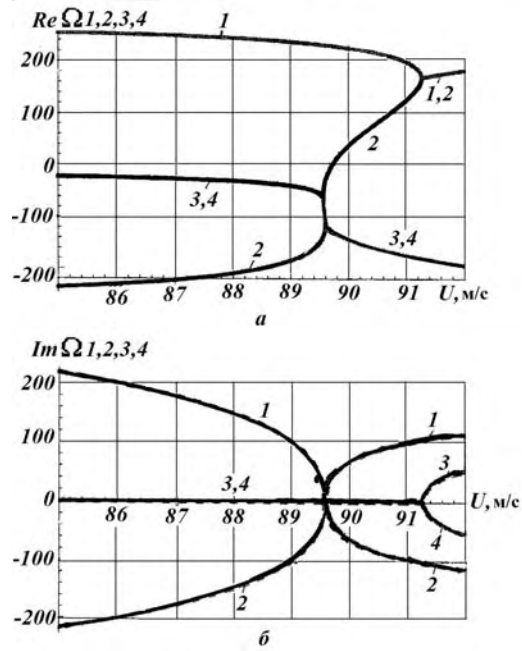


Рис. 2.9

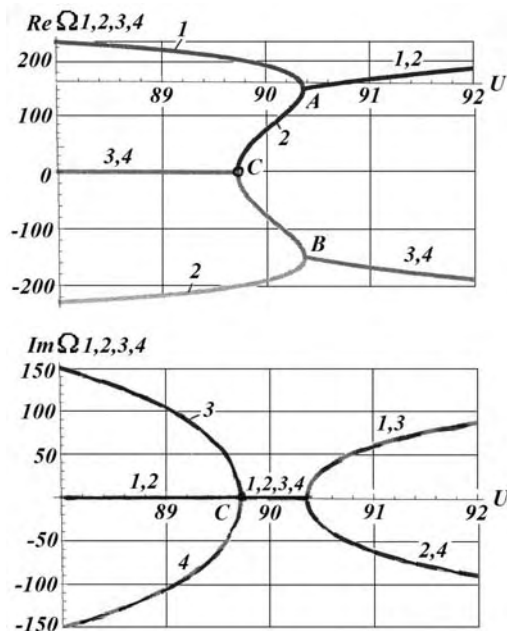


Рис. 2.10

подчеркнуть, что возникшие при флаттере колебания вначале (при  $U \approx U_\phi$ ) будут характеризоваться очень низкими частотами. В последующем, по мере удаления от границы флаттера, частоты данных колебаний будут возрастать, устремляясь к некоторому стационарному значению, соответствующему установившимся режимам.

### §3. Влияние конструктивных особенностей на квазистатическую и динамическую формы потери устойчивости несущих оболочек.

В большинстве исследований по проблемам устойчивости оболочек при взаимодействии с протекающей жидкостью используются некоторые упрощенные расчетные модели этих оболочек. Материал оболочек предполагается обычно изотропным, что не всегда соответствует действительности. Нередко встречающиеся на практике малые, жестко присоединенные к оболочкам массы при динамических расчетах на устойчивость не принимались во внимание. Не учитывались начальные несовершенства геометрического характера (т.е. некоторые малые геометрические отклонения от принятой в проекте идеальной цилиндрической формы). Задачи устойчивости оболочек рассматривались обычно при реализации на краях, в основном, условий свободного опирания. Влияние других вариантов краевых условий на потерю устойчивости исследованы недостаточно. Между тем перечисленные выше конструктивные особенности могут существенно повлиять как на значения критических скоростей потока жидкости, при которых произойдет тот или иной вид потери устойчивости оболочек (квазистатический или динамический), так и на формы волнообразования при потере устойчивости, а также на частоты самовозбуждаемых колебаний, характер переходных процессов, предшествующих установлению стационарных режимов деформирования, и пр.

Ниже кратко изложены некоторые результаты решения такого рода задач, используя приведенные в §1 линеаризованные динамические уравнения оболочек с жидкостью [19, 47 – 49, 51 и др.].

**3.1. Оболочки, нагруженные присоединенными массами.** Пусть на краях оболочки (рассматривается изотропная модель) реализованы условия  $SS1/SS1$ . На рис. 3.1 показаны наиболее часто встречающиеся на практике варианты жесткого крепления масс к развернутой поверхности оболочки (здесь 1 – масса  $M$ , сосредоточенная в точке с координатами  $(x_0, y_0)$ ; 2, 3 – эта же масса равномерно распределена вдоль образующей или вдоль замкнутого поперечного кольца, соответственно; 4, 5 – масса

построенные при относительно большом демпфировании  $\bar{\varepsilon}_0$  ( $\bar{\varepsilon}_0 = 10,8$ ) траектории корней характеристического уравнения, соответствующие волновому параметру  $n = 6$ . Здесь показан фрагмент, иллюстрирующий поведение корней  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 4$ ) непосредственно в области перехода от неустойчивости дивергентного типа к флаттеру. Для сравнения на рис. 2.10 показаны траектории корней, построенные в случае  $\bar{\varepsilon}_0 = 0$ . Из анализа приведенных результатов можно сделать вывод, что колебательная потеря устойчивости оболочки при учете демпфирования произойдет при скоростях потока, превышающих соответствующие критические скорости. Например, вычисления показывают, что  $U_\phi = 90,36$  м/с, если  $\bar{\varepsilon}_0 = 0$ , и  $U_\phi = 91,4$  м/с при  $\bar{\varepsilon}_0 \neq 0$ . Важно также

равномерно распределена вдоль замкнутых прямоугольного и эллиптического контуров). Предполагается, что присоединенные массы в каждом месте контакта (точке, линии, дуге) «передают» на оболочку только радиальную (поперечную) реакцию [2, 19, 47, 51]. Инерцией поворота массы пренебрегаем [2, 9, 22].

Исходные, полученные на основе системы (1.7), линеаризованные уравнения свободных колебаний изотропной оболочки, несущей присоединенные массы, имеют в рассматриваемом случае вид [7, 9, 19, 22, 47, 51]

$$\begin{aligned} & \frac{D}{h} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \\ & = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \rho \frac{\partial w}{\partial t} - K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \frac{P_c}{h}; \\ & \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) = - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $K((\partial^2 w)/(\partial t^2))$  – функция, характеризующая «дополнительное» инерционное воздействие со стороны масс на оболочку в зоне жесткого контакта. Выражение этой функции зависит от способа и места крепления массы  $M$  к оболочке; в частности, [9, 47, 51]

$$K = \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ – для варианта 1 (на рис. 3.1);}$$

$$K = \frac{M}{2\pi R h} \delta(x - x_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ – для варианта 2 ( } x = x_0 \text{ – продольная}$$

координата кругового кольца);

$$K = \frac{M}{h l} \delta(y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ – для варианта 3 ( } y = y_0 \text{ – окружная координата}$$

образующей, вдоль которой распределена масса  $M$ ). Здесь  $\delta$  – соответственно, одно- или двумерная дельта-функция.

Систему (3.1) можно привести к одному разрешающему уравнению восьмого порядка относительно функции прогиба  $w$ :

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon_0 \frac{\partial w}{\partial t} \right) = -\nabla^4 \left[ \frac{P_c}{h} + K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right]. \quad (3.2)$$

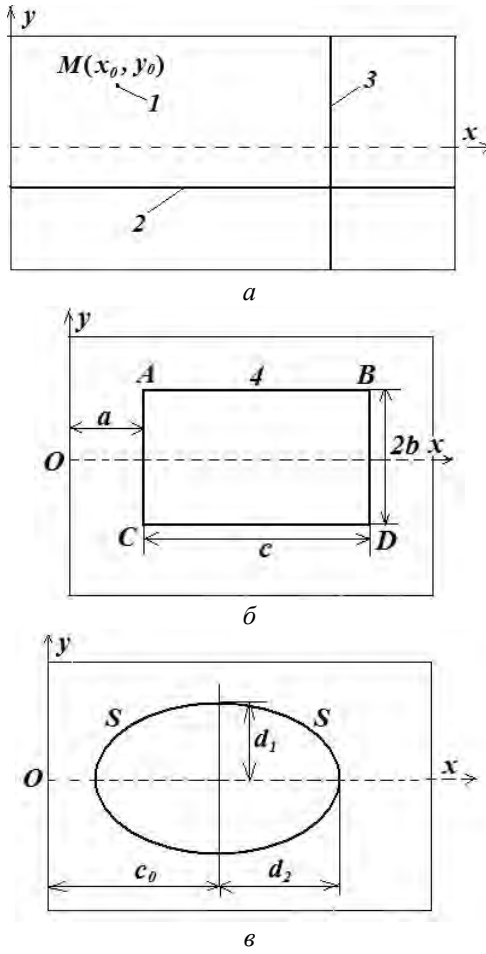


Рис. 3.1

Если прогиб  $w$  аппроксимировать рядом (1.11), то полученные на основании (3.2) уравнения для определения функций  $f_{nm}^{(1),(2)}$  могут быть сведены к виду [19, 51]

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1^{nm} + (\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm} U^2) f_1^{nm} + \varepsilon^{nm} \dot{f}_1^{nm} + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{nq}^{(m)} U \dot{f}_1^{nq} + \frac{2k_{00} G_1^{nm}}{m_0^{nm}} &= 0; \\ \ddot{f}_2^{nm} + (\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm} U^2) f_2^{nm} + \varepsilon^{nm} \dot{f}_2^{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk}^{(m)} U \dot{f}_1^{nk} + \frac{2k_{00} G_2^{nm}}{m_0^{nm}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Параметры  $\omega_{nm}$ ,  $\alpha_{nm}$ ,  $\varepsilon_{nm}$ ,  $\beta_{nq}^{(m)}$ , входящие в эти уравнения, совпадают с соответствующими коэффициентами системы (1.14), отвечающей изотропной модели;  $k_{00} = 2M / M_0$ , где  $M_0 = 2\pi R l \rho h$  – масса оболочки. Функции  $G_{1,2}^{nm}$  надлежит определить из таких соотношений [47, 51]:

$$G_1^{nm} = \frac{h}{M} \int_0^l \int_0^{2\pi R} K \cos s_n y \sin \lambda_m x \, dx \, dy; \quad G_2^{nm} = \frac{h}{M} \int_0^l \int_0^{2\pi R} K \sin s_n y \sin \lambda_m x \, dx \, dy.$$

После интегрирования эти функции, в общем случае, будут иметь вид

$$G_1^{nm} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\kappa_{ij1}^{nm} \dot{f}_1^{ij} + \kappa_{ij2}^{nm} \dot{f}_2^{ij}); \quad G_2^{nm} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\kappa_{ij3}^{nm} \dot{f}_1^{ij} + \kappa_{ij4}^{nm} \dot{f}_2^{ij}), \quad (3.4)$$

где параметры  $\kappa_{ijp}^{nm}$  ( $p = 1, 2, \dots, 4$ ) выражаются через координаты крепления массы к оболочке. Например, в случае крепления к оболочке сосредоточенной массы (вариант 1) получим  $\kappa_{nm1}^{nm} = 2 \cos^2 s_n y_0 \sin^2 \lambda_m x_0$ ;  $\kappa_{nm2}^{nm} = \sin 2s_n y_0 \sin^2 \lambda_m x_0$  и т. д.

Проанализировав уравнения (3.3), были выявлены особенности влияния различных присоединенных масс на потерю устойчивости оболочек, взаимодействующих с жидкостью. При расчетах рассматривалась упрощенная аппроксимация прогиба  $w$  в форме (1.16).

Если масса контактирует с оболочкой в одной точке  $(x_0, y_0)$  то, как показано в [51], характеристическое уравнение, полученное на основании (3.3), примет вид

$$\left[ \Omega^4 + (\omega_{11} + \omega_{22} + \beta_1 \beta_2 U^2) + \omega_{11} \omega_{22} \right] \left[ h_1 \Omega^4 + h_2 \Omega^3 + h_3 \Omega^2 + h_4 \right] = 0 \quad (3.5)$$

$$\left[ h_1 = 1 + \delta_1 \sin^2 \lambda_1 x_0 + \delta_2 \sin^2 \lambda_2 x_0; \quad h_2 = \delta_1 U (\beta_1 \delta_0 - \beta_2) \sin \lambda_1 x_0 \sin \lambda_2 x_0; \right.$$

$$\left. h_3 = (1 + \delta_1 \sin^2 \lambda_1 x_0) \omega_{22} + (1 + \delta_2 \sin^2 \lambda_2 x_0) \omega_{11} + \beta_1 \beta_2 U^2; \quad h_4 = \omega_{11} \omega_{22}; \quad \delta_1 = 2k_{00} / m_{01}; \right.$$

$$\left. \delta_2 = 2k_{00} / m_{02}; \quad k_{00} = 2M / M_0, \text{ остальные параметры такие же, как и в уравнениях (1.19)}. \right]$$

Таким образом, характеристические показатели в данном случае следует определить из двух различных уравнений, первое из которых не зависит от параметра присоединенной массы  $k_{00}$ . Такой результат является следствием того, что в данном случае масса контактирует с оболочкой в узловой точке. Второе, вытекающее из (3.5), уравнение зависит и от массы, и от скорости движения жидкости  $U$ . Из первого уравнения получаем приведенную ранее формулу для критической скорости флаттера ненагруженной оболочки (2.19). Из второго уравнения можно определить условия, регламентирующие динамическую потерю устойчивости в зависимости от обоих параметров  $k_{00}$  и  $U$ . Если, например, масса крепится к оболочке в среднем сечении, то критическая скорость флаттера  $U_\phi$  выражается так [51]:

$$U_\phi = \sqrt{-d_2/2d_1 + \sqrt{(d_2/2d_1)^2 - d_3/d_1}}$$



$$\begin{aligned}
 (d_1 &= [\alpha_1 + \alpha_2(1 + \delta_1) - \beta_1\beta_2]^2 - 4\alpha_1\alpha_2(1 + \delta_1); \\
 d_2 &= 2\{\beta_1\beta_2[(1 + \delta_1)\omega_2^2 + \omega_1^2] + [\alpha_1 - \alpha_2(1 + \delta_1)][(1 + \delta_1)\omega_2^2 - \omega_1^2]\}; \\
 d_3 &= [(\omega_1^2 - \omega_2^2(1 + \delta_1))]^2).
 \end{aligned}$$

Одновременно устанавливаем, что присоединенная масса вообще не влияет на величины критических скоростей дивергенции  $U_\delta^{(1)}$  и  $U_\delta^{(2)}$ , определяемых из биквадратного уравнения  $\alpha_1\alpha_2U^4 - (\omega_1^2\alpha_2 + \omega_2^2\alpha_1)U^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0$ .

Аналогичную структуру будут иметь характеристические уравнения, составленные для вариантов 2 и 3. В табл. 3.1 – 3.3 приведены значения соответствующих вариантам 1, 2, 3 безразмерных критических скоростей потока  $\bar{U}$  ( $\bar{U} = U/k_0$ ), при которых наступит динамическая (колебательного вида) неустойчивость оболочки, характеризуемой параметрами (2.18).

При расчетах предполагалось, что в первом варианте (табл. 3.1) масса крепилась к оболочке в точке с координатой  $x_0 = l/2$ ; во втором (табл. 3.2) – вдоль замкнутого поперечного кольца с координатой  $x_0 = l/2$ ; в третьем (табл. 3.3) – вдоль образующей (в этом случае на рис. 3.1 следует принять  $c = l, b = 0$ ). Жирным шрифтом выделены значения критических скоростей флаттера, соответствующих наиболее ранней (при наименьшей скорости потока) потере устойчивости. В целом из представленных результатов можно заключить, что влияние различных способов контакта массы с оболочкой на величины критических скоростей потока становится заметным лишь при относительно больших (по сравнению с массой оболочки) значениях этой массы. В большей степени это влияние будет проявляться при креплении массы вдоль поперечного кольца, в меньшей – вдоль образующей (в обоих случаях «суммарная» присоединенная масса предполагается одной и той же –  $M$ ).

Таблица 3.1

| $k_{00}$ | $n$    |        |        |              |       |        |
|----------|--------|--------|--------|--------------|-------|--------|
|          | 2      | 3      | 4      | 5            | 6     | 7      |
| 0        | 16,140 | 10,090 | 7,183  | <b>6,351</b> | 7,821 | 11,079 |
| 0,05     | 16,133 | 10,084 | 7,177  | <b>6,342</b> | 7,821 | 11,080 |
| 0,15     | 16,119 | 10,073 | 7,165  | <b>6,323</b> | 7,803 | 11,088 |
| 0,25     | 16,106 | 10,062 | 7,1154 | <b>6,305</b> | 7,786 | 11,101 |

Таблица 3.2

| $k_{00}$ | $n$    |        |       |              |       |        |
|----------|--------|--------|-------|--------------|-------|--------|
|          | 2      | 3      | 4     | 5            | 6     | 7      |
| 0,05     | 16,118 | 10,070 | 7,163 | <b>6,322</b> | 7,783 | 11,012 |
| 0,15     | 16,074 | 10,032 | 7,124 | <b>6,264</b> | 7,686 | 10,877 |
| 0,25     | 16,030 | 9,993  | 7,085 | <b>6,208</b> | 7,590 | 10,743 |

Таблица 3.3

| $k_{00}$ | $n$    |        |       |              |       |        |
|----------|--------|--------|-------|--------------|-------|--------|
|          | 2      | 3      | 4     | 5            | 6     | 7      |
| 0,05     | 16,133 | 10,084 | 7,177 | <b>6,342</b> | 7,821 | 11,080 |
| 0,15     | 16,119 | 10,073 | 7,165 | <b>6,323</b> | 7,803 | 11,088 |
| 0,25     | 16,106 | 10,062 | 7,154 | <b>6,317</b> | 7,805 | 11,102 |

Аналогичный подход к расчету устойчивости несущих оболочек применен и в случае крепления дополнительных масс вдоль замкнутых *прямоугольного* (рис. 3.1, б) или *эллиптического* (рис. 3.1, в) контуров [47]. В первом случае функцию  $K$  в соотношениях (3.3) следует определить из соотношения

$$K = \frac{M}{2(2b+c)} \left\{ [\delta(y-b) + \delta(y+b)] \int_a^{a+c} \delta(x-\xi) d\xi + [\delta(x-a) + \delta(x-(a+c))] \int_{-b}^b \delta(y-\eta) d\eta \right\},$$

где  $c, 2b$  – длины сторон прямоугольника. Уравнения для определения неизвестных функций  $G_{1,2}^{nm}$  структурно также будут иметь вид (3.4) с коэффициентами, зависящими от размеров прямоугольника и места его расположения на поверхности оболочки, например,

$$\kappa_{nm1}^{nm} = \frac{1}{d} \left[ (c_1 - a) - \frac{1}{2\lambda_m} (\sin 2\lambda_m c_1 - \sin 2\lambda_m a) \right] \cos^2 s_n b + \\ + \frac{1}{d} \left[ \left( b + \frac{1}{2s_n} \sin 2s_n b \right) (\sin^2 \lambda_m a + \sin^2 \lambda_m c_1) \right] (c_1 = a + c, d = 2(2b + c)) c \text{ и т.д.}$$

Такое же заключение справедливо и по отношению к 5-му варианту крепления массы к оболочке (вдоль эллиптического контура). Функции  $G_1^{nm}, G_2^{nm}$  в уравнениях (3.2) в данном случае определяем из соотношений [47]

$$G_1^{nm} = \frac{1}{l_0 h} \int_{x_0-d_1}^{x_0+d_1} \left\{ \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} [\delta(y-y_1) + \delta(y+y_1)] F(x) \cos s_n y \sin \lambda_m x \right\} dx; \\ G_2^{nm} = \frac{1}{l_0 h} \int_{x_0-d_1}^{x_0+d_1} \left\{ \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} [\delta(y-y_1) + \delta(y+y_1)] F(x) \sin s_n y \sin \lambda_m x \right\} dx,$$

где  $l_0, x_0$  – периметр эллипса и координата его центра;  $2d_1$  и  $2b_1$  – большая и малая оси эллипса;  $y_1 = \frac{b_1}{d_1} \sqrt{d_1^2 - (x-x_0)^2}$ ;  $F(x) = \sqrt{\frac{d_1^4 + (b_1^2 - d_1^2)(x-x_0)^2}{d_1^2 [d_1^2 - (x-x_0)^2]}}$ .

Полагая  $b_1 = d_1$ , нетрудно получить выражение функции  $K$  для случая, когда масса равномерно распределена вдоль окружности радиуса  $R = d_1$ .

**3.2. Влияние начальных прогибов.** Как известно, практически каждая цилиндрическая оболочка характеризуется малыми отклонениями от идеальной геометрической формы [9, 13, 22, 23, 49]. Естественно, что эти отклонения необходимо учитывать при динамических расчетах транспортирующих жидкость оболочек с целью определения истинных значений критических скоростей потока. Устойчивость оболочки в данном случае можно исследовать с использованием соответствующих линеаризованных динамических уравнений. В случае ортотропной оболочки эти уравнения примут следующий вид [13]:

$$\frac{1}{h} \Delta_D^4 w_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \rho \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{P_z}{h}; \\ \Delta_\delta^4 \Phi = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.7)$$

Здесь  $w_0 = w_0(x, y)$  – начальный прогиб, не вызывающий в оболочке предварительных напряжений;  $w_1$  – «дополнительный» упругий прогиб ( $w = w_1 + w_0$  – полный прогиб).

Задачи об устойчивости квазицилиндрических (с малым начальным прогибом) оболочек при отсутствии жидкостного наполнителя рассмотрены ранее [9, 22, 23 и др.]. Совместное влияние давления протекающей жидкости и начальных геометрических несовершенств на потерю устойчивости оболочек исследовано в [17, 49]. Рассмотрены два вида несовершенств – неосесимметричный и осесимметричный. В первом случае начальный прогиб задан в форме  $w_0 = f_{10} \cos s_0 y \sin \lambda_0 x + f_{20} \sin s_0 y \sin \lambda_0 x$ , где  $f_{10}, f_{20} = \text{const}$ ,  $s_0, \lambda_0$  – параметры волнообразования. Если аппроксимировать динамический прогиб  $w_1$  четырехчленным выражением [49]  $w_1 = f_1 \cos sy \sin \lambda_1 x + f_2 \sin sy \sin \lambda_1 x + f_3 \cos sy \sin \lambda_2 x + f_4 \sin sy \sin \lambda_2 x$ , и применить метод Б – Г, то для определения неизвестных функций  $f_k$  получим, в общем случае, систему уравнений

$$\ddot{f}_k + (\omega_k^2 - \alpha_k U^2) f_k + \varepsilon_k \dot{f}_k + \sum_{j=1}^4 c_{kj} f_j + \sum_{j=1}^4 \beta_{kj} U \dot{f}_j = 0 \quad (k = 1, \dots, 4),$$

в которой  $c_{kj}$  – полученные в результате проведенного интегрирования коэффициенты, зависящие от амплитудных параметров начального прогиба  $f_{10}, f_{20}$  (при  $f_{10} = f_{20} = 0$  все  $c_{kj} = 0$ ). Остальные параметры совпадают с соответствующими параметрами системы (1.18). Конкретные значения коэффициентов  $c_{kj}$  определяются соотношениями между волновыми параметрами начального  $s_0, \lambda_0$  и динамического  $s, \lambda_1, \lambda_2$  прогибов. Проведенный анализ позволил установить шесть качественно различных вариантов данных соотношений [23, 49]: 1)  $s = s_0, \lambda_1 = \lambda_0$ ; 2)  $s = s_0, \lambda_2 = \lambda_0$ ; 3)  $s \neq s_0, \lambda_1 = \lambda_0$ ; 4)  $s \neq s_0, \lambda_2 = \lambda_0$ ; 5)  $s \neq s_0, \lambda_1 \neq \lambda_0$ ; 6)  $s \neq s_0, \lambda_2 \neq \lambda_0$ .

Приведенные в [49] расчеты показывают, что наличие начального прогиба, «повторяющего» по форме динамический прогиб, (вариант 1) несущественно повлияет на величины критических скоростей  $U_\delta$  и  $U_\phi$ . В табл. 3.4 представлены значения минимальных скоростей дивергентной неустойчивости  $U_\delta$ , соответствующие различным безразмерным амплитудам начального прогиба  $\bar{f}_0 = f_{10} / h$  и параметрам волнообразования  $n$  (при расчетах принято  $f_{20} = 0$ ). Рассмотрена оболочка с параметрами [49]

$$E_1 = 2,15 \cdot 10^9 \text{ Па}; E_2 = 1,23 \cdot 10^9 \text{ Па}; G = 0,21 \cdot 10^9 \text{ Па}; \mu_1 = 0,19; \rho = 1,65 \cdot \rho_0; \\ \rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3; R = 0,16 \text{ м}; l = 5 R; h = R/100. \quad (3.8)$$

Таблица 3.4

| $\bar{f}_0$ | $n$    |        |        |        |
|-------------|--------|--------|--------|--------|
|             | 2      | 3      | 4      | 5      |
| 0           | 23,675 | 17,066 | 18,868 | 19,977 |
| 1           | 23,677 | 17,075 | 18,874 | 19,986 |
| 2           | 23,691 | 17,104 | 18,896 | 20,011 |

Как следует из табл. 3.4, относительное увеличение критических скоростей  $U_\delta$  неидеальной оболочки по сравнению со случаем идеальной оболочки (когда  $\bar{f}_0 = 0$ ) не превышает 0,22%. Такое же заключение справедливо и по отношению к значениям критических скоростей флаттера.

Рис. 3.2, 3.3 иллюстрируют влияние начального прогиба на критические скорости дивергенции и флаттера, соответственно, при рассмотрении более сложного «геометрического» выражения функции  $w_0$ :  $w_0 = f_{10} \cos s_0 y \sin \lambda_0 x$ ,  $m_0 = 3, n_0 = 7$  [49].

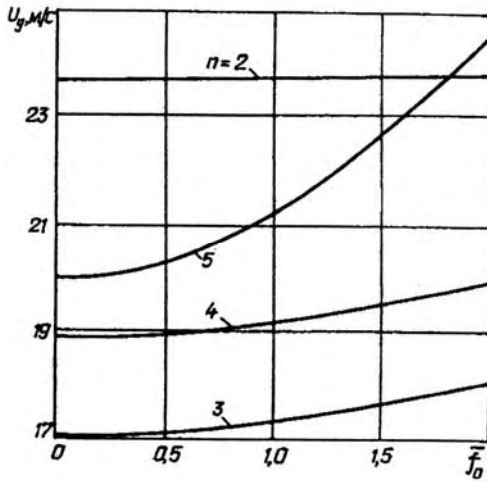


Рис. 3.2

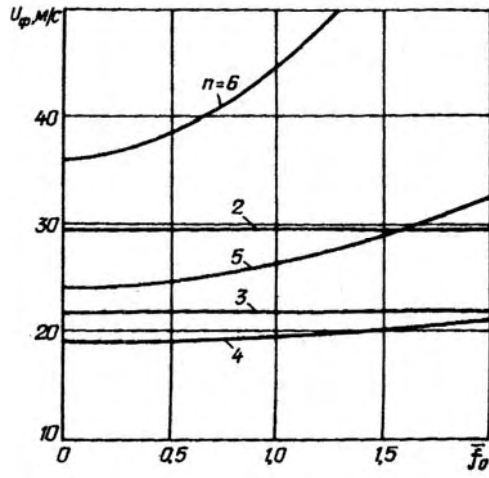
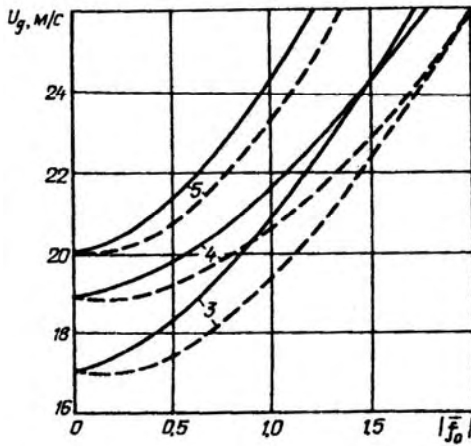
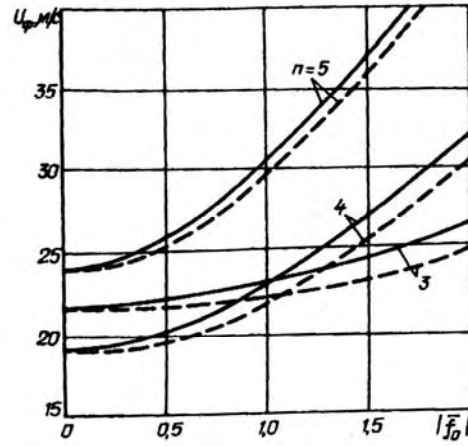


Рис. 3.3

Из представленных графиков следует, что влияние начального прогиба на величины  $U_\delta$  и  $U_\phi$  существенно возрастает (по сравнению со случаем идеальной оболочки) при относительно больших значениях волнового параметра  $n$  ( $n \geq 5$ ). Кроме того, с ростом параметра начального прогиба  $\bar{f}_0$  наблюдается тенденция к сближению критических скоростей флаттера, отвечающих двум формам  $n=3$  и  $n=4$  одновременно. В частности, проведенные исследования показали, что пока  $\bar{f}_0 \leq 2,6$ , потеря устойчивости оболочки типа флаттер будет сопровождаться возбуждением окружной формы  $n=4$ . При  $\bar{f}_0 > 2,6$  качественно изменится конфигурация формы потери устойчивости – в этот момент возбудится форма с меньшим количеством окружных волн  $n=3$ , чем это имело место в предыдущем случае.



а



б

Рис. 3.4

Влияние осесимметричного начального прогиба ( $w_0 = f_{10} \sin \lambda_0 x$ ) на флаттерную потерю устойчивости иллюстрируется графиками, приведенными на рис. 3.4, а, б. Штриховые кривые на этом рисунке построены при  $f_{10} > 0$ , сплошные – при  $f_{10} < 0$ . Таким образом, критическая скорость флаттера  $U_\phi$  в случае  $f_{10} > 0$  (когда оболочка вследствие начального прогиба становится слабо выпуклой, т.е. «бочкообразной»),

несколько увеличивается по сравнению со случаем  $w_0 = 0$ . И, наоборот, если  $f_{10} > 0$  (оболочка с отрицательной гауссовой кривизной), то начальный прогиб обусловит уменьшение величины  $U_\phi$  по сравнению со случаем идеальной оболочки.

Таблица 3.5

| $f_{10}$ | $n$   |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|
|          | 2     | 3     | 4     | 5     |
| $+h$     | 23,14 | 16,33 | 18,75 | 19,91 |
| $-h$     | 24,23 | 17,84 | 18,97 | 20,08 |
| $+2h$    | 22,60 | 15,60 | 18,62 | 19,85 |
| $-2h$    | 24,78 | 18,61 | 19,07 | 20,18 |

Аналогичные в качественном отношении результаты получены и в отношении скоростей  $U_\phi$  дивергентной формы потери устойчивости оболочки с осесимметричным начальным прогибом. Значения этих скоростей при  $f_{10} = \pm h, \pm 2h, m_0 = 1$  приведены в табл. 3.5.

**3.3. Влияние граничных условий на потерю устойчивости.** Преобладающее большинство исследований по проблеме устойчивости оболочечных объектов, транспортирующих жидкость, посвящено решению соответствующих задач при реализации простейших краевых условий, (обычно условий свободного опирания на обоих краях). Между тем, в практике нередко встречаются случаи применения других краевых условий, в частности, жесткого защемления на обоих торцах, а также варианты комбинированных, иначе «несимметричных» условий, когда на одном краю реализован один способ крепления (например, жесткое защемление), на другом – качественно иной (например, шарнирное закрепление или свободное опирание), и наоборот. Некоторые задачи о влиянии различных как «симметричных», так и «несимметричных» граничных условий на процессы взаимодействия цилиндрических оболочек с внутренним и внешним потоком жидкостей рассмотрены ранее в [10, 11]. Решение задач об устойчивости несущих оболочек проведено в этих работах на основе полубезмоментной теории с использованием некоторых математических упрощений при вычислении собственных частот. При аппроксимации прогибов применялись балочные функции (функции А.Н.Крылова). В работе [48] для расчёта устойчивости заполненных подвижной жидкостью цилиндрических оболочек (ортотропная модель) используются линеаризованные уравнения (1.7). Для различных краевых условий построены аналитические формулы, позволяющие определять значения критических скоростей потока жидкости, при которых происходит та или иная форма потери устойчивости несущих оболочек. Анализируется зависимость величин критических скоростей от собственных частот оболочек с жидкостью, а также всестороннего статического нагружения. Искомый динамический прогиб  $w$  аппроксимирован двухпараметрическим разложением

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(t) X_m(x) \cos s_n y, \quad (3.9)$$

где  $X_m(x)$  – собственные осевые формы, удовлетворяющие задаваемым краевым условиям;  $s_n = n / R$  – параметры окружного волнообразования. При расчетах рассмотрено четыре варианта крепления оболочек на торцах [7, 48]:

- 1)  $v = 0, w = 0, M_x = 0, N_x = 0$  при  $x = 0, x = l$ ;
  - 2)  $v = 0, v = 0, w = 0, \partial w / \partial x = 0, N_x = 0$  при  $x = 0, x = l$ ;
  - 3)  $v = 0, w = 0, N_x = 0$  при  $x = 0, x = l$ ;  $M_x = 0$  при  $x = 0; \partial w / \partial x = 0$  при  $x = l$ ;
  - 4)  $v = 0, w = 0, N_x = 0$  при  $x = 0, x = l$ ;  $\partial w / \partial x = 0$  при  $x = 0; M_x = 0$  при  $x = l$ .
- (3.10)

Соответствующие этим условиям осевые формы с использованием тригонометрических функций заданы в форме [48]:

$$\begin{aligned} 1. X_m(x) &= C_m \sin \lambda_m x; \quad 2. X_m(x) = C_m \sin^2 \lambda_m x; \quad 3. X_m(x) = C_m (\sin 2\lambda_m x - 0,5 \sin 4\lambda_m x); \\ 4. X_m(x) &= C_m (\sin \lambda_m x - 0,5 \sin 2\lambda_m x) \quad (C_m = \text{const}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Потенциалы скоростей жидкости, отвечающие каждой из этих форм, будут такими:

$$\begin{aligned} 1) \varphi &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_{nm}}{\lambda_m} (f_{nm} \sin \lambda_m x + f_{nm} \lambda_m U \cos \lambda_m x) \cos s_n y; \\ 2) \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( f_{nm} \frac{Q_{nm}}{4\lambda_m} \cos 2\lambda_m x - \frac{1}{2} f_{nm} Q_{nm} U \sin 2\lambda_m x - f_{nm} \frac{r^n}{2nR^{n-1}} \right) \cos s_n y; \\ 3) \varphi &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \begin{aligned} & f_{nm} \left( \frac{Q_{nm}}{2\lambda_m} \sin 2\lambda_m x - \frac{F_{nm}}{8\lambda_m} \sin 4\lambda_m x \right) + \\ & + f_{nm} \left( Q_{nm} \cos 2\lambda_m x - \frac{F_{nm}}{2} \cos 4\lambda_m x \right) U \end{aligned} \right] \cos s_n y; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$4) \varphi = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \begin{aligned} & \left( f_{nm} \frac{T_{nm}}{\lambda_m} \sin \lambda_m x - \frac{Q_{nm}}{4\lambda_m} \sin 2\lambda_m x \right) + \\ & + f_{nm} \left( T_{nm} \cos \lambda_m x - \frac{Q_{nm}}{2} \cos 2\lambda_m x \right) U \end{aligned} \right] \cos s_n y.$$

Функции  $Q_{nm}, T_{nm}$  и  $F_{nm}$  определяются из соотношений  $Q_{nm} = \frac{I_n(2\lambda_m r)}{I'_n(2\lambda_m R)}$ ;  $T_{nm} = \frac{I_n(\lambda_m r)}{I'_n(\lambda_m R)}$ ;

$$F_{nm} = \frac{I_n(4\lambda_m r)}{I'_n(4\lambda_m R)}.$$

После подстановки (3.9) с учетом (3.11), (3.12) в исходное динамическое уравнение и реализации метода (Б – Г) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, из которой надлежит определить неизвестные величины  $f_{nm}(t)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{f}_{nm} + (\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm} U^2) f_{nm} + \varepsilon_{nm} \dot{f}_{nm} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ (p \neq n, q \neq m)}}^{\infty} \kappa_{pq}^{nm} \ddot{f}_{pq} + \\ + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ (p \neq n, q \neq m)}}^{\infty} \gamma_{pq} f_{pq} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq}^{nm} \dot{f}_{pq} = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots),$$

где  $\omega_{nm}$  – собственные частоты оболочки с учетом влияния присоединенной массы жидкости,  $\varepsilon_{nm}$  – приведенные коэффициенты демпфирования;  $\alpha_{nm}, \kappa_{pq}^{nm}, \gamma_{pq}^{nm}, \beta_{pq}^{nm}$  – постоянные коэффициенты, зависящие от способа крепления оболочки на краях. На основании системы (3.13) с использованием изложенных в §2 данного обзора соответствующих методик, определены значения критических скоростей потока, которые отвечают той или иной (дивергентной или флаттерной) форме потери устойчивости. Результаты соответствующих расчетов безразмерных скоростей  $\bar{U}_d, \bar{U}_\phi$  ( $\bar{U} = U/k_0$ ) для оболочки с параметрами

$$E_1 = 2,15 \cdot 10^9 \text{ Па}; E_2 = 1,23 \cdot 10^9 \text{ Па}; G = 0,21 \cdot 10^9 \text{ Па}; \mu_1 = 0,19; \rho = 1,65 \cdot \rho_0;$$

$$\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3; R = 0,16 \text{ м}; l = 5 R; h = R/64 \quad (3.14)$$

в случае симметричных краевых условий (свободное опирание – свободное опирание С – С, жесткое защемление – жесткое защемление Ж – Ж (варианты 1 и 2 в (3.10)) приведены, соответственно, в табл. 3.6, 3.7. Как обычно, жирным выделено наименьшие значения указанных скоростей.

Таблица 3.6

| $\bar{U}$         | $n$  |             |             |      |      |       |       |       |       |
|-------------------|------|-------------|-------------|------|------|-------|-------|-------|-------|
|                   | 2    | 3           | 4           | 5    | 6    | 7     | 8     | 9     | 10    |
| $\bar{U}_o^{(1)}$ | 2,93 | <b>2,41</b> | 3,43        | 5,62 | 8,74 | 12,79 | 17,82 | 23,89 | 31,06 |
| $\bar{U}_o^{(2)}$ | 3,76 | 2,83        | <b>2,65</b> | 3,29 | 4,65 | 6,59  | 9,08  | 12,10 | 15,69 |
| $\bar{U}_\phi$    | 4,25 | <b>3,23</b> | 3,57        | 5,62 | 8,80 | 12,95 | 18,13 | 24,42 | 31,90 |

Таблица 3.7

| $\bar{U}$         | $n$  |             |             |      |             |       |       |       |
|-------------------|------|-------------|-------------|------|-------------|-------|-------|-------|
|                   | 2    | 3           | 4           | 5    | 6           | 7     | 8     | 9     |
| $\bar{U}_o^{(1)}$ | 3,78 | 3,01        | <b>2,83</b> | 2,90 | 3,45        | 4,46  | 5,88  | 7,67  |
| $\bar{U}_o^{(2)}$ | 4,27 | <b>3,43</b> | 3,72        | 5,46 | 8,22        | 11,90 | 16,51 | 22,09 |
| $\bar{U}_\phi$    | 5,96 | 4,66        | 3,88        | 3,42 | <b>3,18</b> | 3,21  | 3,79  | 5,21  |

Сравнение приведенных в таблицах данных свидетельствует о том, что потеря устойчивости оболочки по дивергентному типу при краевых условиях Ж – Ж произойдет при больших значениях скоростей  $U$  в сравнении со случаем краевых условий С – С. Кроме того, более сложной является форма деформирования оболочки при потере устойчивости. Значительно усложняется мода, по которой будет происходить флаттерная потеря устойчивости (если для опертой оболочки этой моде отвечают волновые параметры  $m_1 = 1, m_2 = 2, n = 3$ , то для жестко закрепленной оболочки, соответственно, имеем  $m_1 = 1, m_2 = 2, n = 6$ ).

Таблица 3.8

| $\bar{U}$         | $n$  |      |      |             |      |      |      |      |
|-------------------|------|------|------|-------------|------|------|------|------|
|                   | 2    | 3    | 4    | 5           | 6    | 7    | 8    | 9    |
| $\bar{U}_o^{(1)}$ | 4,67 | 3,73 | 3,15 | <b>2,86</b> | 3,08 | 4,37 | 6,33 | 8,80 |
| $\bar{U}_o^{(2)}$ | 4,17 | 3,05 | 2,36 | <b>2,17</b> | 2,60 | 3,06 | 3,76 | 4,76 |
| $\bar{U}_\phi$    | 4,73 | 3,77 | 3,20 | <b>2,96</b> | –    | –    | –    | –    |

В таблицах 3.8, 3.9 приведены результаты вычислений соответствующих критических скоростей потока для оболочек с «несимметричными» краевыми условиями 3 и 4 из (3.10).

Таблица 3.9

| $\bar{U}$         | $n$  |      |             |      |      |       |       |       |
|-------------------|------|------|-------------|------|------|-------|-------|-------|
|                   | 2    | 3    | 4           | 5    | 6    | 7     | 8     | 9     |
| $\bar{U}_o^{(1)}$ | 5,49 | 4,28 | <b>4,17</b> | 5,78 | 8,20 | 11,60 | 15,94 | 21,22 |

Как видно, в первом случае (табл. 3.8) и дивергентная и флаттерная неустойчивости оболочки произойдут при возбуждении в ней одной и той же окружной моды  $n = 5$ . При этом критические скорости потока  $U_o$  несколько превышают значения соответствующих скоростей, вычисленных для оболочки со свободными или жестко защемленными краями. Очевидно также, что при  $\bar{U} > 2,96$  возможна лишь дивергентная потеря устойчивости (флаттер оболочки здесь не будет реализован, если  $n > 6$ ).

Во втором случае (табл. 3.9) отсутствуют значения критических скоростей  $\bar{U}_\phi^{(2)}$  и  $\bar{U}_\phi$ , поскольку действительных корней в соответствующих уравнениях, из которых находим эти величины, не было получено. Это означает, что оболочка при всех выбранных значениях окружного волнового параметра  $n$  будет терять устойчивость лишь по типу дивергенция.

Таким образом, формы потери устойчивости оболочек при «несимметричных» краевых условиях существенно зависят от того, в каком направлении протекает жидкость в оболочке – от заземленного края к свободно опертому или, наоборот, от свободно опертого к жестко заземленному.

#### §4. Влияние внешней среды на потерю устойчивости.

В процессе эксплуатации цилиндрические оболочки, транспортирующие жидкость, нередко подвергаются действию внешних статических или динамических нагрузений, в частности, распределенному по всей боковой поверхности давлению окружающей среды, осевому статическому сжатию, влиянию внешних подвижных ударных волн и др. Поэтому актуальными представляются задачи о выяснении влияния такого вида нагружений на потерю устойчивости несущих оболочечных конструкций при взаимодействии их с протекающей внутри жидкостью.

**4.1. Оболочки при действии всестороннего радиального давления и осевого сжатия.** Для изучения особенностей воздействия внешних статических сил на характер потери устойчивости оболочек используем линеаризованные динамические уравнения, полученные на основании системы (1.7). В случае изотропной модели эти уравнения имеют вид [7, 8, 57]

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{q_0 R}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \rho \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{P_c}{h}; \quad \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

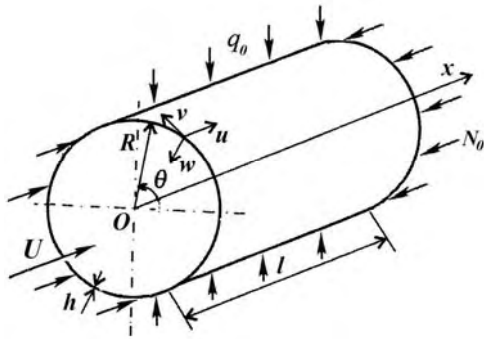


Рис. 4.1

Здесь  $q_0 = \text{const}$  – всестороннее внешнее радиальное давление на оболочку (рис. 4.1),  $N_0 = \text{const}$  – равномерно распределенное вдоль дуговых кромок осевое сжатие (остальные обозначения общепринятые).

Для исследования основных особенностей потери устойчивости оболочек непосредственно в дивергентной и флаттерной зонах достаточно использовать упрощенную (двухмодовую) аппроксимацию прогиба  $w$  [57]

$$w = f_1 \cos sy \sin \lambda_1 x + f_3 \cos sy \sin \lambda_2 x, \quad (4.2)$$

учитывающую две низшие осевые формы ( $\lambda_1 = \pi/l$ ,  $\lambda_2 = 2\pi/l$ ). Полученные из (4.1) уравнения, на основании которых надлежит исследовать устойчивость оболочки, имеют в данном случае вид

$$\ddot{f}_1 + \bar{\omega}_{11} f_1 + \varepsilon_1 \dot{f}_1 - \beta_1 U \dot{f}_3 = 0; \quad \ddot{f}_3 + \bar{\omega}_{33} f_3 + \varepsilon_3 \dot{f}_3 + \beta_2 U \dot{f}_1 = 0,$$

$$\bar{\omega}_{kk} = \omega_{kk} - \frac{1}{\rho m_{ok}} (N_0 \lambda_k^2 + (q_0 R s^2)/h) \quad (k = 1, 3). \quad (4.3)$$

Остальные параметры в системе (4.3) выражаются так же, как и в системах (1.18) или (1.19).

Очевидно, что критерии устойчивости в рассматриваемом случае по форме совпадут с (2.11) с учетом замен  $\omega_{11} \rightarrow \bar{\omega}_{11}$  и  $\omega_{33} \rightarrow \bar{\omega}_{33}$ , т.е. будут зависеть также и от параметров внешнего нагружения. Зона дивергентной неустойчивости оболочки по-



прежнему будет определяться из третьего критерия (2.12), т.е. из условия  $\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_{33} > 0$ . Минимальная критическая скорость флаттера  $U_\phi^{(\min)}$ , в свою очередь, должна быть установлена, исходя из условия появления первого комплексного характеристического показателя  $\Omega$  с положительной действительной частью. Для определения этой скорости следует использовать справедливую при  $\varepsilon_0 = 0$  формулу [57]

$$(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{33} + \beta_1 \beta_2 U^2) = 2\sqrt{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_{33}}. \quad (4.4)$$

В табл. 4.1 приведены численные значения критических скоростей дивергенции  $U_\phi^{(1)}$  (верхняя строка) и  $U_\phi^{(2)}$  (нижняя строка) для оболочки с параметрами (2.15), подверженной изолированному и совместному действию внешних нагрузок  $N_0$  и  $q_0$  (указаны в таблице) при  $3 \leq n \leq 7$ . Традиционно жирным шрифтом выделены минимальные величины данных скоростей, реализуемые при определенных волновых параметрах  $n$ . Очевидно, что радиальная нагрузка  $q_0$  более существенно влияет на критическую скорость дивергенции по сравнению с осевой нагрузкой  $N_0$ . Такая нагрузка, кроме того, что значительно снижает минимальные величины  $U_\phi^{(1)}$  и  $U_\phi^{(2)}$ , может обусловить изменение формы волнообразования оболочки при потере устойчивости. Например, если незагруженная оболочка теряет устойчивость по моде с числом окружных волн  $n = 4$ , то при определенных значениях  $q_0$  форма ее окружного деформирования при  $U = U_\phi^{(1)}$  усложняется и соответствует  $n = 5$ .

Таблица 4.1

| $N_0$ , Па     | $n$    |              |              |       |        |
|----------------|--------|--------------|--------------|-------|--------|
|                | 3      | 4            | 5            | 6     | 7      |
| 0              | 62,66  | <b>51,82</b> | 63,14        | 63,31 | 75,84  |
| 0              | 10,32  | 77,56        | 64,02        | 92,38 | 132,62 |
| 0              | 56,84  | 32,37        | <b>30,19</b> | 51,13 | 59,58  |
| $10^4$         | 109,47 | 74,80        | 56,35        | 55,10 | 94,17  |
| $3 \cdot 10^6$ | 62,37  | <b>51,35</b> | 62,65        | 62,72 | 75,28  |
| 0              | 110,13 | 77,24        | 63,55        | 91,98 | 132,30 |
| $3 \cdot 10^6$ | 56,52  | 31,61        | <b>29,17</b> | 50,41 | 58,86  |
| $10^4$         | 109,30 | 74,46        | 55,80        | 54,44 | 93,73  |

Табл. 4.2 иллюстрирует влияние статических нагрузений на критическую скорость флаттера  $U_\phi$ , вычисленную на основании формулы (4.4). Как и в рассмотренном выше случае, величина  $U_\phi$  более «чувствительна» к действию на оболочку радиальной загрузки  $q_0$ .

Таблица 4.2

| $N_0$ , Па     | $n$    |       |              |       |        |
|----------------|--------|-------|--------------|-------|--------|
|                | 3      | 4     | 5            | 6     | 7      |
| 0              | 120,78 | 85,98 | <b>76,02</b> | 93,74 | 132,62 |
| 0              | 119,19 | 80,60 | <b>61,23</b> | 62,86 | 94,51  |
| $3 \cdot 10^6$ | 120,56 | 85,58 | <b>75,44</b> | 93,26 | 132,30 |
| $3 \cdot 10^6$ | 118,97 | 80,19 | <b>60,55</b> | 62,03 | 94,01  |

Количественное влияние статического нагружения на обе формы потери устойчивости (дивергенцию и флаттер) в случае  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $n = 5$  проиллюстрировано графически на рис. 4.2 *а, б*. Здесь показаны траектории действительных и мнимых частей всех 4-х безразмерных ( $\bar{\Omega} = \Omega l / k_0$ ) корней характеристического уравнения (2.3) при изменении скорости движения жидкости в пределах  $4,175 < \bar{U} < 6,68$  и  $1,67 < \bar{U} < 6,68$ . Рис. 4.2, *а* при этом соответствует незагруженной статическими усилиями оболочке, а рис. 4.2, *б* – оболочке, подверженной комбинированному нагружению ( $N_0 = 3 \cdot 10^6$  Па,  $q_0 = 10^4$  Па).

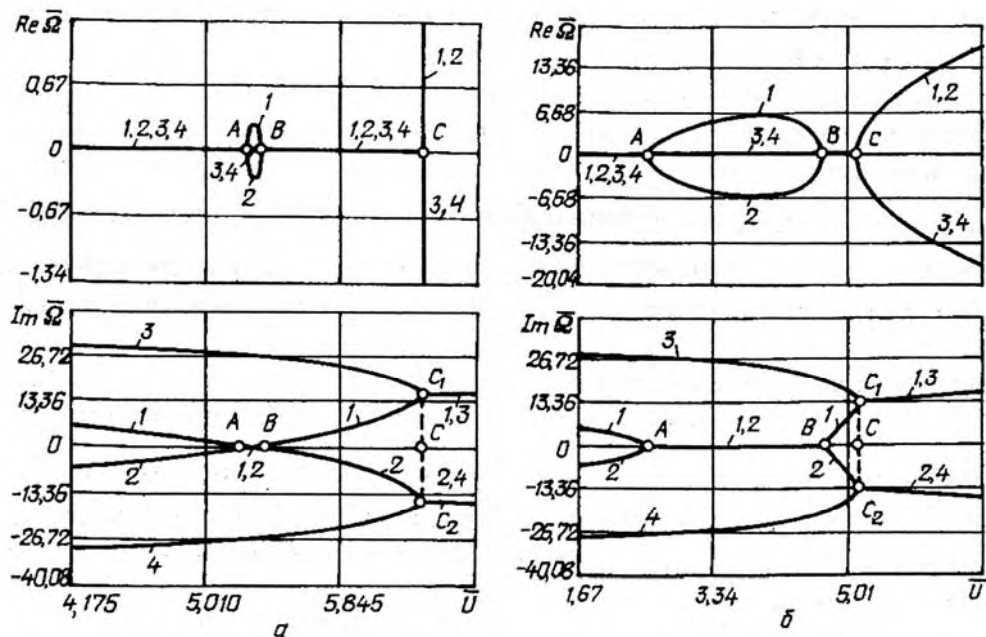


Рис. 4.2

Отметим, что дивергентная неустойчивость оболочки в обоих случаях реализуется в области (AB), причем эта область вследствие действия внешней нагрузки существенно расширяется. Одновременно происходит ее смещение в область меньших скоростей потока жидкости. Флаттер оболочки, в свою очередь, наступит при  $\bar{U} \geq \bar{U}_C$  и, как видно из рис. 4.2, *б*, неустойчивость этого вида при статическом нагружении реализуется при значительно меньших скоростях по сравнению со случаем  $N_0 = 0$ ,  $q_0 = 0$ .

При  $\varepsilon_0 \neq 0$  критические скорости дивергенции нагруженной оболочки не изменятся (будут такими же, как и в случае  $\varepsilon_0 = 0$ ). Критические скорости флаттера при относительно малом коэффициенте демпфирования, как уже отмечалось ранее в §2, практически совпадут с критическими скоростями  $U_0$  на правой границе дивергентной области. При этом установлено, что эффект «дестабилизации» в большей степени проявляется тогда, когда оболочка свободна от внешних нагружений. Это непосредственно следует из сравнения соответствующих траекторий частот, приведенных на рис. 2.8 и 4.2, построенных, соответственно, при отсутствии и наличии внешних давлений на оболочку.

Сравнительная характеристика величин частотного параметра  $s_1 = \text{Re} \bar{\Omega}_1$ , определяющего «темп» возрастания амплитуд колебаний статически сжатых оболочек в области дивергенции ( $U_A < U < U_{B_1}$ ) (см. рис. 2.8) и флаттера ( $U > U_{B_1}$ ), представлена на рис. 4.3. Рис. 4.3, *а* построен при нагружении вида  $\bar{q}_0 = 0$ ,  $\bar{N}_0 = 0,29$ ; рис. 4.3, *б* – при  $\bar{N}_0 = 0$ ,  $\bar{q}_0 = 15$  Па; рис. 4.3, *в* – при  $\bar{q}_0 = 15$ ,  $\bar{N}_0 = 0,29$ . При построении использованы

следующие безразмерные параметры:  $\bar{q}_0 = q_0/q_0^*$ ,  $\bar{N}_0 = N_0/N_0^*$ , где  $q_0^*$ ,  $N_0^*$  – величины критических нагрузок, которые выражаются следующим образом [7]:  $q_0^* = (h\rho\omega_1^2)/(Rs^2)$ ,  $N_0^* = (\rho\omega_1^2)/\lambda_1^2$ .

Нагрузки  $q_0^*$ ,  $N_0^*$  отвечают здесь статической потере устойчивости заполненной жидкостью оболочки по низшей осевой форме  $\lambda_1 = \pi/l$  при изолированном действии каждой из них, т.е. при  $q_0^* \neq 0$ ,  $N_0^* = 0$  и  $q_0^* = 0$ ,  $N_0^* \neq 0$ , соответственно). Во всех случаях предполагалось  $n = 4$ ,  $\bar{\varepsilon}_0 = 0,108$  ( $\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0/(2\omega_1 m_{01})$ ) [33]. Из результатов рис. 4.3 также следует, что действительная часть характеристического показателя  $\Omega_1$  принимает максимальные значения при комбинированном (совместном продольно-поперечном) нагружении. В других случаях (в большей степени это относится к действию радиального давления) величина  $\max(\text{Re } \Omega_1)$  всегда ниже соответствующих параметров, показанных на рис. 4.3, в.

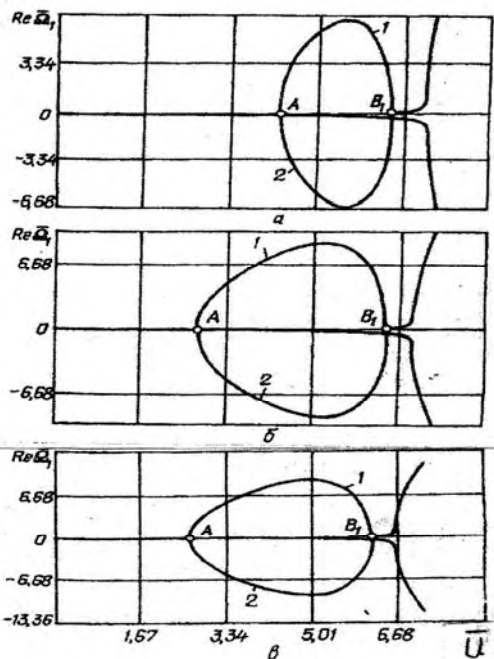


Рис. 4.3

$\max(\text{Re } \Omega_1)$  всегда ниже соответствующих параметров, показанных на рис. 4.3, в.

**4.2. Оболочки с жидкостью при действии набегающей волны давления.** В последние годы все более актуальными становятся практически важные задачи об устойчивости и закритическом деформировании взаимодействующих с внутренним потоком жидкости оболочек, испытывающих одновременно действие внешних подвижных ударных нагрузок в сочетании с внешним статическим давлением (рис. 4.4).

Особенностью этих задач является то, что потеря устойчивости несущей конструкции может быть вызвана как влиянием неконсервативных гидродинамических сил, инициируемых протекающей жидкостью, так и воздействием на объект волны давления, распространяющейся вдоль оси, или в поперечном направлении [7, 12, 15].

Ниже при изучении потери устойчивости несущей оболочки (для определенности полагаем ее изотропной) используем линейаризованные динамические уравнения типа (1.7)

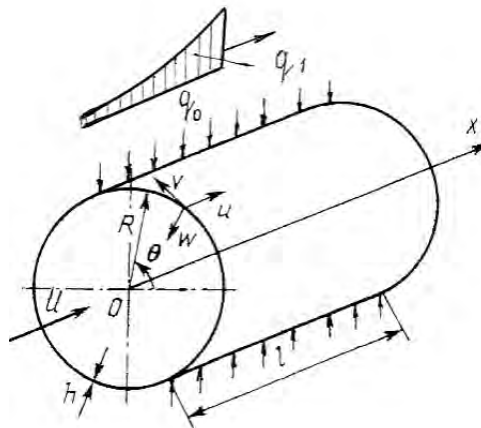


Рис. 4.4

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \rho \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{q_0 R}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{q_1}{h} - \frac{P_c}{h}; \quad \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.5)$$

где  $\nabla^4$  – известный дифференциальный оператор;  $q_1$  – интенсивность волновой нагрузки, обусловленной действием ударной волны, распространяющейся в продольном направлении; остальные обозначения общеприняты. В работах [7, 12, 15 и др.] изложены различные подходы к определению функции давления  $q_1$ . В большинстве практических случаев при расчетах используется следующая формула:

$$q_1 = q_\phi e^{-\eta(ct-x)} H(ct-x) - \rho_c c \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\rho_c c^2}{2R} w, \quad (4.6)$$

где  $q_\phi$  – давление на фронте волны;  $\eta$  – показатель экспоненты, определяющей закон изменения давления за фронтом;  $c$  – скорость распространения волны в окружающей оболочке среде;  $\rho_c$  – плотность среды;  $H$  – функция Хевисайда.

Для изучения характерных особенностей динамического поведения рассматриваемой оболочки в момент потери устойчивости можно использовать упрощенную аппроксимацию прогиба  $w$  в форме (4.2) (предполагается выполнение на краях оболочки условий свободного опирания). Система разрешающих уравнений, полученных в результате применения к системе (4.5) с учетом (4.6) метода Б – Г, примет тогда следующий вид:

$$\ddot{f}_1 + \bar{\omega}_{11} f_1 + \bar{\varepsilon}_1 \dot{f}_1 - \beta_1 U \dot{f}_3 = p_{11}(t) f_1 + p_{12}(t) f_3; \quad (4.7)$$

$$\ddot{f}_3 + \bar{\omega}_{33} f_3 + \bar{\varepsilon}_3 \dot{f}_3 + \beta_2 U \dot{f}_1 = p_{21}(t) f_1 + p_{22}(t) f_3$$

$$\left\{ \bar{\omega}_{kk} = \omega_{kk} - \frac{1}{h \rho m_{0k}} \left( \frac{\rho_c c^2}{2R} \right); \omega_{kk} = \omega_k^2 - \alpha_k U^2; \right.$$

$$\left. \omega_k^2 = \frac{1}{\rho m_{0k}} \left[ \frac{D}{h} \Delta(\lambda_k, s) + \frac{E \lambda_k^4}{R^2 \Delta(\lambda_k, s)} - \frac{q_0 R s^2}{h} \right]; \right.$$

$$m_{0k} = 1 + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{K_{nk}}{h \lambda_k}; \quad \alpha_{nk} = \frac{\rho_0}{\rho h} \frac{\lambda_k}{m_{0k}} K_{nk}; \quad \bar{\varepsilon}_k = \varepsilon_k + \frac{\rho_c c}{\rho h m_{0k}}; \quad \varepsilon_k = \frac{\varepsilon_0}{m_{0k}}; \quad \Delta(\lambda_k, s) = (\lambda_k^2 + s^2)^2;$$

$$\beta_1 = \frac{16}{3} \frac{\rho_0}{\rho m_{01}} \frac{1}{\lambda_2 h l} K_{n2}; \quad \beta_2 = \frac{16}{3} \frac{\rho_0}{\rho m_{02}} \frac{1}{\lambda_1 h l} K_{n1}; \quad K_{nk} = \frac{2I_n(\lambda_k R)}{I_{n-1}(\lambda_k R) + I_{n+1}(\lambda_k R)} \quad (k=1, 3);$$

$$p_{11}(t) = \frac{T}{m_{01}} H_1; \quad p_{12}(t) = \frac{T}{m_{01}} H_2; \quad p_{21}(t) = \frac{T}{m_{02}} H_2; \quad p_{22}(t) = \frac{T}{m_{02}} H_3; \quad T = \frac{2s^2 R q_\phi e^{-\eta ct}}{\rho l h};$$

$$H_1 = \frac{1}{2\eta} (e^{\eta ct} - 1) e^{-\frac{1}{2(\eta^2 + 4\lambda_1^2)}} \left[ e^{\eta ct} (\eta \cos 2\lambda_1 ct + 2\lambda_1 \sin 2\lambda_1 ct) t - \eta \right];$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\eta^2 + \lambda_1^2} \left[ (\eta \cos \lambda_1 ct + \lambda_1 \sin \lambda_1 ct) e^{\eta ct} - \eta \right] - \frac{1}{\eta^2 + 9\lambda_1^2} \left[ (\eta \cos 3\lambda_1 ct + 3\lambda_1 \sin 3\lambda_1 ct) e^{\eta ct} - \eta \right] \right\}; \quad (4.8)$$

$$H_3 = \frac{1}{2\eta} (e^{\eta ct} - 1) e^{-\frac{1}{2(\eta^2 + 4\lambda_2^2)}} \left[ e^{\eta ct} (\eta \cos 2\lambda_2 ct + 2\lambda_2 \sin 2\lambda_2 ct) - \eta \right];$$

$$T = \frac{2s^2 R q_\phi e^{-\eta ct}}{l \rho h} \left. \right\}.$$

Из (4.7), (4.8) и материалов §2 настоящего обзора следует, что при отсутствии ударной волны ( $q_1 \equiv 0$ ) наиболее ранняя потеря устойчивости оболочки по типу дивергенция произойдет при скорости потока жидкости  $\min U = U_o = \min(\omega_1/\sqrt{\alpha_1}, \omega_2/\sqrt{\alpha_3})$ . Флаттерная неустойчивость наступит при скорости  $U$ , определяемой из уравнения (2.16), если  $\varepsilon_0 = 0$ , или, в случае малого демпфирования, – при  $U = U_\phi \approx \max(\omega_1/\sqrt{\alpha_1}, \omega_2/\sqrt{\alpha_3})$ . На рис. 4.5 показано взаимное расположение критических скоростей ких скоростей дивергенции (кривые 1 и 2) и флаттера (кривая 3), соответствующие различным значениям волнового параметра  $n$  ( $2 \leq n \leq 7$ ) (рассматривалась оболочка с параметрами (2.18)). Такие графики характерны для всех рассмотренных в предыдущих главах данного обзора задач об устойчивости взаимодействующих с жидкостным потоком оболочек в предположении, что отсутствует демпфирование ( $\varepsilon_0 = 0$ ). Из графиков можно сделать вывод о том, что минимальной скорости флаттера  $U_\phi$  соответствует момент, когда выполняется условие  $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{\alpha_1/\alpha_3}$ . Кроме того, при каждом значении параметра  $n$  скорость  $U_\phi$  всегда превышает скорости  $U_o^{(1)}$  и  $U_o^{(2)}$ , причем с ростом  $n$ , начиная с  $n = 5$ , происходит сближение величин  $U_\phi$  и  $U_o^{(1)}$ . При относительно больших параметрах  $n$  эти величины практически совпадают.

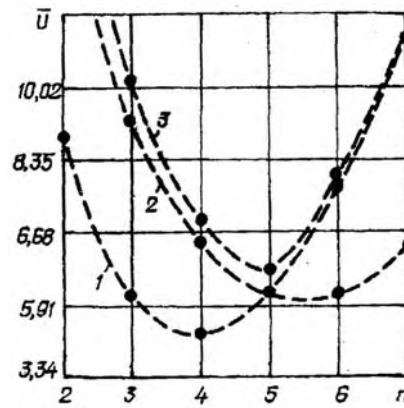


Рис. 4.5

При учете в исходных уравнениях малого демпфирования практически совпадут величины  $U_\phi$  и  $U_o$  как при малых так и при больших значениях волнового параметра  $n$ . При  $n < 5$  имеет место равенство  $U_\phi \approx U_o^{(2)}$ ; при  $n > 5$  выполняется условие  $U_\phi \approx U_o^{(1)}$ .

При действии на оболочку ударно-волновой нагрузки (жидкость в оболочке неподвижна) задача об устойчивости системы сводится к исследованию системы уравнений с переменными коэффициентами:

$$\ddot{f}_1 + \bar{\omega}_1 \dot{f}_1 + \bar{\varepsilon}_1 \dot{f}_1 = p_{11}(t)f_1 + p_{12}(t)f_3; \quad \ddot{f}_3 + \bar{\omega}_3 \dot{f}_3 + \bar{\varepsilon}_3 \dot{f}_3 = p_{21}(t)f_1 + p_{22}(t)f_3. \quad (4.9)$$

$$\bar{\omega}_k = \omega_k^2 - \frac{1}{h\rho m_{0k}} \left( \frac{\rho_c c^2}{2R} \right), \quad k = 1, 3.$$

Построение в аналитическом виде решений этих уравнений затруднительно из-за отсутствия соответствующего метода. Поэтому используется метод численного интегрирования, ориентированный на поиск такого сочетания параметров системы (скорости распространения волны  $c$ , параметров волнообразования  $\lambda_1, \lambda_2, s$ ), при котором будет иметь место наибольшая реакция оболочки на внешнее динамическое и статическое воздействия. Если при этом упростить задачу, приняв  $\lambda_1 = \pi/l$  и  $\lambda_2 = 2\pi/l$ , то динамический прогиб (4.2) при потере устойчивости будет, в данном случае, в начальные моменты времени возрастать по законам, близким к представленным на рис. 2.3. Кроме того, интегрирование уравнений (4.9) методом Рунге – Кутты показывает, что темп возрастания во времени прогиба  $w$  пропорционален параметру  $\eta$ , определяющему «крутизну» изменения давления за фронтом волны.

При совместном действии обоих факторов – внутреннего потока и подвижной волны (уравнения (4.7)) – поведение оболочки при потере устойчивости существенно

зависит от соотношений между скоростями  $U$  и  $c$ . Наиболее неблагоприятной ситуации (максимального возрастания во времени прогиба) следует ожидать при критических скоростях жидкостного потока, в которых реализуется неустойчивость дивергентного или флаттерного типа (вследствие взаимодействия с жидкостным потоком), с одной стороны, и одновременно происходит неустойчивость из-за влияния набегающего фронта волны – с другой.

В заключение отметим, что ограничение амплитуд динамического деформирования несущей оболочки как при изолированном, так и при совместном действии перечисленных выше источников, обуславливающих неустойчивость, произойдет при учете в исходных уравнениях этой оболочки тех или иных нелинейных факторов.

## §5. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек при взаимодействии с жидкостным потоком.

**5.1. Построение усредненных уравнений, описывающих флаттерные колебания оболочек.** Как ранее отмечено, в момент потери устойчивости оболочки по типу флаттер возникнут ее неосесимметричные изгибные колебания с увеличивающимися во времени амплитудами. Ограничение этих амплитуд произойдет вследствие влияния на динамический процесс нелинейных факторов – геометрической нелинейности и нелинейного демпфирования.

В работах [33 – 36 и др.] рассмотрены нелинейные задачи об определении параметров колебаний взаимодействующих с потоком жидкости цилиндрических оболочек в закритических областях, т.е. при  $U \geq U_\phi$ . Методика решения таких задач предполагает предварительное сведение с использованием метода Б – Г исходной континуальной модели оболочки к некоторой конечномерной системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для определения решений этих уравнений применялись непосредственно современные, ориентированные на компьютерный анализ, численные методы (программный пакет *AUTO* [39, 33 и др.]), в результате чего устанавливались конкретные численные значения максимальных амплитуд и частот колебаний, соответствующих каждой из учитываемых в функции прогиба изгибных форм; строились амплитудно-частотные характеристики для свободных и вынужденных колебаний; определялись области устойчивости (неустойчивости) полученных стационарных решений; строились фазовые портреты, позволяющие установить «регулярность» или «хаотичность» возникающих при потере устойчивости колебательных процессов, и т.д.

Однако, несмотря на то, что численные методы являются наиболее универсальными методами решения нелинейных задач динамики упругих и особенно упруго-жидкостных систем, они не лишены существенных недостатков. Главный из них состоит в сложности обобщения и анализа полученных численных результатов, поскольку указанные методы каждый раз направлены на решение конкретных примеров. В этой связи актуальной представляется разработка аналитических методов решения систем разрешающих уравнений (1.14) (или их упрощенных вариантов (1.18) и (1.19)). Эти системы принадлежат к классу квазилинейных систем, поскольку нелинейные члены в них являются малыми по сравнению с линейными членами. Для построения таких решений наиболее эффективным представляется применение разработанного Н.Н. Боголюбовым и Ю.А. Митропольским асимптотического метода, ориентированного на исследование одночастотных режимов в нелинейных системах со многими степенями свободы [4, 56]. Как показано в [44, 56], все три сформулированных в [4] условия, необходимые для применения данного метода к нелинейным системам типа (1.14) (или упрощенных их вариантов), полностью выполняются.

Проиллюстрируем кратко применение этой методики применительно к автономной системе (1.14), полагая в ней  $Q_1^{nm} = 0$ ,  $Q_2^{nm} = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ). Для удобства изложения методики представим эту систему в виде

$$\ddot{f}_k + (\omega_k^2 - \alpha_k U^2) f_k + \varepsilon_k \dot{f}_k + U \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q^{(k)} \dot{f}_q = F_k(\{f_p\}, \{\dot{f}_p\}) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (5.1)$$

т.е. вместо двух индексов  $m$  и  $n$  используем один «суммарный» индекс  $k$ . Отметим, что параметры  $\beta_q^{(k)}$  можно здесь всегда представить так:  $\beta_q^{(k)} = \beta_{qk}^{(1)} + \beta_{qk}^{(2)}$ , где  $\beta_{qk}^{(1)} = \beta_{kq}^{(1)}$ ;  $\beta_{qk}^{(2)} = -\beta_{kq}^{(2)}$ . Функции  $F_k$  имеют, в общем случае, вид

$$F_k = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (\delta_{pqr}^{(k)} f_p f_q f_r + \gamma_{pqr}^{(k)} \dot{f}_p \dot{f}_q \dot{f}_r) \quad (\delta_{pqr}^{(k)}, \gamma_{pqr}^{(k)} = \text{const}). \quad (5.2)$$

Для построения одночастотных асимптотических решений общей системы (5.1) рассмотрим в соответствии с [4] соответствующую ей невозмущенную систему

$$\ddot{f}_k + (\omega_k^2 - \alpha_k U^2) f_k + \varepsilon_k \dot{f}_k + U \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q^{(k)} \dot{f}_q = 0 \quad (k=1, 2, \dots), \quad (5.3)$$

полученную из (5.1) при  $F_k \equiv 0$  ( $k=1, 2, \dots$ ). Эта система не имеет «статических» решений, отличных от тривиального (случай  $\omega_k^2 - \alpha_k U^2 = 0$  соответствует неколебательным, типа дивергенция, формам деформирования [6, 56] и поэтому из рассмотрения исключается). Кроме того, вследствие учета демпфирования внутренние резонансы в системе (5.3) будут отсутствовать. И, наконец, третье условие применимости одночастотного метода требует существования описываемых уравнениями (5.3) незатухающих гармонических колебаний, зависящих от двух произвольных постоянных. Такие колебания возможны лишь при определенных значениях скоростей  $U$ , а именно, при  $U \geq U_\phi$ . Величину  $U_\phi$  и соответствующую ей частоту указанных колебаний  $\lambda_\phi$  следует определить из составленного для (5.3) характеристического уравнения

$$\| (-\lambda_\phi^2 + \omega_k^2 - \alpha_k U_\phi^2 + \varepsilon_k i \lambda_\phi) \delta_{jk} + \beta_{jk} U_\phi i \lambda_\phi \| = 0 \quad (j, k=1, 2, \dots), \quad i = \sqrt{-1}.$$

С учетом всех изложенных выше предположений и замечаний ( $\beta_{jk} = \beta_j^{(k)}$ ) одночастотное, с базовой частотой  $\lambda = \lambda_\phi$ , решение уравнений (5.1) в соответствии с [4, 56] на уровне первого приближения можно представить в виде

$$f_k = a(\varphi_k e^{i\psi} + \bar{\varphi}_k e^{-i\psi}) \quad (k=1, 2, \dots), \quad (5.4)$$

где  $\varphi_k$  – нетривиальные решения системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} [(-\lambda_\phi^2 + \omega_k^2 - \alpha_k U_\phi^2 + \varepsilon_k i \lambda_\phi) \delta_{jk} + \beta_{jk} U_\phi i \lambda_\phi] \varphi_j = 0 \quad (k, j=1, 2, \dots);$$

$\bar{\varphi}_k$  – комплексно-сопряженные величины;  $a$  и  $\psi$  – неизвестные функции времени, определяемые из уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a); \quad \frac{d\psi}{dt} = \lambda_\phi + \varepsilon B_1(a). \quad (5.5)$$

Здесь  $\varepsilon$  – формально введенный малый параметр ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ) (этому же параметру предполагаются пропорциональными и нелинейные функции  $F_k(\dots)$  [23]). Неизвестные величины  $\varepsilon A_1(a)$ ,  $\varepsilon B_1(a)$  определяются по специальной методике, изложенной в [4, 56].

Подставляя (5.4) в систему (5.1) и, учитывая (5.5), после группирования членов при  $e^{i\psi}$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & (\omega_k^2 - \lambda_\phi^2 - \alpha_k U_\phi^2 + \varepsilon_k i \lambda_\phi) a \varphi_k + i \lambda_\phi U_\phi a \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{jk} \varphi_j = G_{1k}(a) \\ & \left( G_{1k}(a) = \left\{ M_{k1} a^3 - (A_1 + i a B_1) \left[ (2i \lambda_\phi + \varepsilon_k) \varphi_k + U_\phi \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{jk} \varphi_j \right] \right\} + \right. \end{aligned}$$

$$+\Delta_1(2\alpha_k U_\phi \varphi_k - i\lambda_\phi \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{jk} \varphi_j) a \left. \right\} (k = 1, 2, \dots).$$

Здесь обозначено:  $\Delta_1 = U - U_\phi$ ;  $M_{k1}$  – постоянные коэффициенты в разложении функций  $F_k$  по гармоникам  $\pm ki\psi$ ;  $F_k = M_{k1} a^3 e^{i\psi} + \overline{M}_{k1} a^3 e^{-i\psi} + N_{k1} a^3 e^{3i\psi} + \overline{N}_{k1} a^3 e^{-3i\psi}$  ( $\overline{M}_{k1}$ ,  $\overline{N}_{k1}$  – комплексно-сопряженные величины).

Для существования периодических решений  $f_k$  и однозначного определения функций  $A_1, B_1$  необходимо и достаточно выполнение условия [4, 6, 44, 56]

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{1k}(a) \chi_k = 0, \quad (5.6)$$

где  $\chi_k$  – нетривиальное решение сопряженной по отношению к линейной части системы (5.1) системы

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[ (\omega_k^2 - \alpha_k U_\phi^2 - \lambda_\phi^2 - \varepsilon_k i \lambda_\phi) \delta_{jk} - \beta_{kj} U_\phi i \lambda_\phi \right] \chi_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

В результате из соотношения (5.6), выделяя действительную и мнимую части, получаем выражения для искомых величин  $\varepsilon A_1(a)$ ,  $\varepsilon B_1(a)$

$$\varepsilon A_1(a) = \beta_{11} \Delta_1 a + \beta_{12} a^3; \quad \varepsilon B_1(a) = \beta_{21} \Delta_1 + \beta_{22} a^2, \quad (5.7)$$

где коэффициенты  $\beta_{jk}$  имеют вид [56]

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{1}{k_0^2} (k_3 k_5 + k_4 k_6); \quad \beta_{12} = \frac{1}{k_0^2} (k_1 k_3 + k_2 k_4); \\ \beta_{21} &= \frac{1}{k_0^2} (k_3 k_6 - k_4 k_5); \quad \beta_{22} = \frac{1}{k_0^2} (k_2 k_3 - k_1 k_4); \quad k_0^2 = k_3^2 + k_4^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь  $k_1, \dots, k_6$  – действительные параметры, определяемые из равенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} M_{k1} \chi_k &= k_1 + ik_2; \quad \sum_{k=1}^{\infty} (2\alpha_k U_\phi \varphi_k - i\lambda_\phi \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{jk} \varphi_j) \chi_k = k_5 + ik_6; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (2i\lambda_\phi + \varepsilon_k) \varphi_k + U_\phi \sum_{j=1}^n \beta_{jk} \varphi_j \right] \chi_k &= k_3 + k_4. \end{aligned}$$

Аналогичные (5.7) соотношения можно получить, приравнявая в (5.6) члены при  $e^{-i\psi}$ .

Таким образом, выведены уравнения, позволяющие определять на уровне первого приближения амплитуды и фазы колебаний, описываемых системой (5.1) вблизи границы динамической (флаттерной) потери устойчивости (когда «расстройка» скоростей  $\Delta_1 = U - U_\phi$  является малой, пропорциональной параметру  $\varepsilon$  величиной). Установившиеся незатухающие колебания здесь возможны при выполнении условий  $\beta_{11} > 0$ ,  $\beta_{12} < 0$ , которые в случае  $U > U_\phi$  обычно выполняются для реальных, заполненных жидкостью оболочечных (оболочки средней длины) систем [45, 46, 58]. Амплитуда стационарных флаттерных колебаний оболочки  $a_0$  в общем случае будет такой:

$$a_0 = \sqrt{(-\beta_{11} \Delta_1) / \beta_{12}}. \quad (5.9)$$



Соответствующая частота этих колебаний равна:

$$\lambda_\phi(a_0) = \lambda_\phi + \beta_{21}\Delta_1 + \beta_{22}a_0^2. \quad (5.10)$$

Из последнего соотношения следует, что в зависимости от знака параметра  $\beta_{22}$  частота нелинейных колебаний (автоколебаний) с увеличением их амплитуды может либо увеличиваться (при  $\beta_{22} > 0$ ), либо уменьшаться (при  $\beta_{22} < 0$ ). Вместе с тем, частота соответствующих линейных (не зависящих от амплитуд) колебаний при изменении «расстройки» скоростей  $\Delta_1$  будет смещаться в одну или другую стороны от исходной величины  $\lambda_\phi$  (смещение будет отсутствовать лишь на границе флаттерной зоны, т.е. при  $U = U_\phi$ ).

**5.2. Одночастотные автоколебания оболочки при упрощенной аппроксимации прогиба. Мягкий и жесткий режимы возбуждения.** Пусть  $w$  имеет вид (1.16) с учетом (1.17). При выводе уравнений, составленных относительно доминантных координат  $f_1$  и  $f_3$ , учтем (в отличие от (1.19)) нелинейности до 5-й степени включительно. В этом случае правые части уравнений (1.19) будут иметь при  $q \equiv 0$  вид

$$\varepsilon F_{11} = \gamma_1 f_1^3 + \gamma_2 f_1 f_3^2 + \gamma_5 f_1^5 + \gamma_6 f_1 f_3^4 + \gamma_7 f_1^3 f_3^2 + d_1(3f_1^2 + f_2^2)\dot{f}_1;$$

$$\varepsilon F_{33} = \gamma_3 f_3^3 + \gamma_4 f_3 f_1^2 + \gamma_8 f_3^5 + \gamma_9 f_3 f_1^4 + \gamma_{10} f_3^3 f_1^2 + d_2(3f_2^2 + 2f_1^2)\dot{f}_3.$$

Здесь  $\gamma_1, \dots, \gamma_{10}$  – постоянные, характеризующие геометрическую нелинейность оболочки;  $d_1, d_2$  – параметры нелинейного демпфирования, полученные в результате учета в правой части первого уравнения (1.7) известного выражения [5]:  $F_0 = -(\varepsilon_0 \rho + h_0 w^2)\dot{w}$ , где  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $h_0 > 0$ . При этом  $d_k = -3h_0/16\rho m_{ok}$ ;  $\varepsilon_k = \varepsilon_0/m_{ok}$  ( $k = 1, 2$ ).

Используя изложенную в п. 5.1 методику, получаем следующие уточненные усредненные уравнения для определения амплитуды  $a$  и фазы  $\psi$  в решении (5.4):

$$\frac{da}{dt} = \beta_{11}\Delta_1 a + \beta_{12}a^3 + \beta_{13}a^5; \quad \frac{d\psi}{dt} = \lambda_\phi + \beta_{21}\Delta_1 + \beta_{22}a^2 + \beta_{23}a^4. \quad (5.11)$$

Здесь  $\beta_{13}, \beta_{23}$  – обусловленные нелинейностями пятого порядка постоянные коэффициенты, пропорциональные малому параметру  $\varepsilon$ , остальные параметры совпадают с (5.8).

Из (5.11) следует, что установление амплитуд автоколебаний оболочки будет происходить при  $\beta_{12}^2 > 4\Delta_1\beta_{11}\beta_{13}$  в соответствии с уравнением

$$\ln \frac{a^2}{a_{00}^2} - \frac{\beta_{12}}{2\beta_{13}} \frac{1}{(a_{01}^2 - a_{02}^2)} \ln \left| \frac{(a^2 - a_{01}^2)(a_{00}^2 - a_{02}^2)}{(a^2 - a_{02}^2)(a_{00}^2 - a_{01}^2)} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(a^2 - a_{01}^2)(a^2 - a_{02}^2)}{(a_{00}^2 - a_{02}^2)(a_{00}^2 - a_{01}^2)} \right| = 2\Delta_1\beta_{11}t, \quad (5.12)$$

$$\left( a_{01}^2 = -\frac{\beta_{12}}{2\beta_{13}} + \frac{1}{2\beta_{13}} \sqrt{\beta_{12}^2 - 4\Delta_1\beta_{11}\beta_{13}}; \right. \\ \left. a_{02}^2 = -\frac{\beta_{12}}{2\beta_{13}} - \frac{1}{2\beta_{13}} \sqrt{\beta_{12}^2 - 4\Delta_1\beta_{11}\beta_{13}}; a_{00} = a(0) \right). \quad (5.13)$$

Анализируя выражение (5.12) устанавливаем, что колебания оболочки с начальной амплитудой  $a_{00} < a_{01}$  со временем будут постепенно затухать. При  $a_{00} > a_{01}$  ам-

плитуды  $a(t)$  стремятся к стационарному решению  $a_{02}$  (5.13). Отметим, что действительные значения стационарных амплитуд  $a_{01}, a_{02}$  возможны в рассматриваемом случае при  $\beta_{13} < 0$ .

Таким образом, возбуждение жидкостным потоком колебаний оболочки может быть реализовано как при  $U > U_\phi$ , так и при  $U < U_\phi$ , т.е. в докритической области. Такая ситуация обусловлена специфическим влиянием геометрических нелинейностей пятого порядка [55] (в случае линейной системы или при учете нелинейностей третьего порядка вида (5.2) потеря устойчивости колебательного типа возможна лишь при  $U > U_\phi$ ). Если  $\beta_{12}^2 < 4\Delta_1\beta_{11}\beta_{13}$ , то уравнение (5.12) не будет иметь других устойчивых стационарных решений, кроме тривиального решения.

Итак, при учете нелинейностей высокого (выше третьего) порядка, в зависимости от параметров связанной системы оболочка – жидкость, наряду с «мягким» возбуждением автоколебаний несущей оболочки, возможно также «жесткое» возбуждение, наблюдаемое в докритической (с точки зрения линейной теории) области, т.е. при  $U < U_\phi$ .

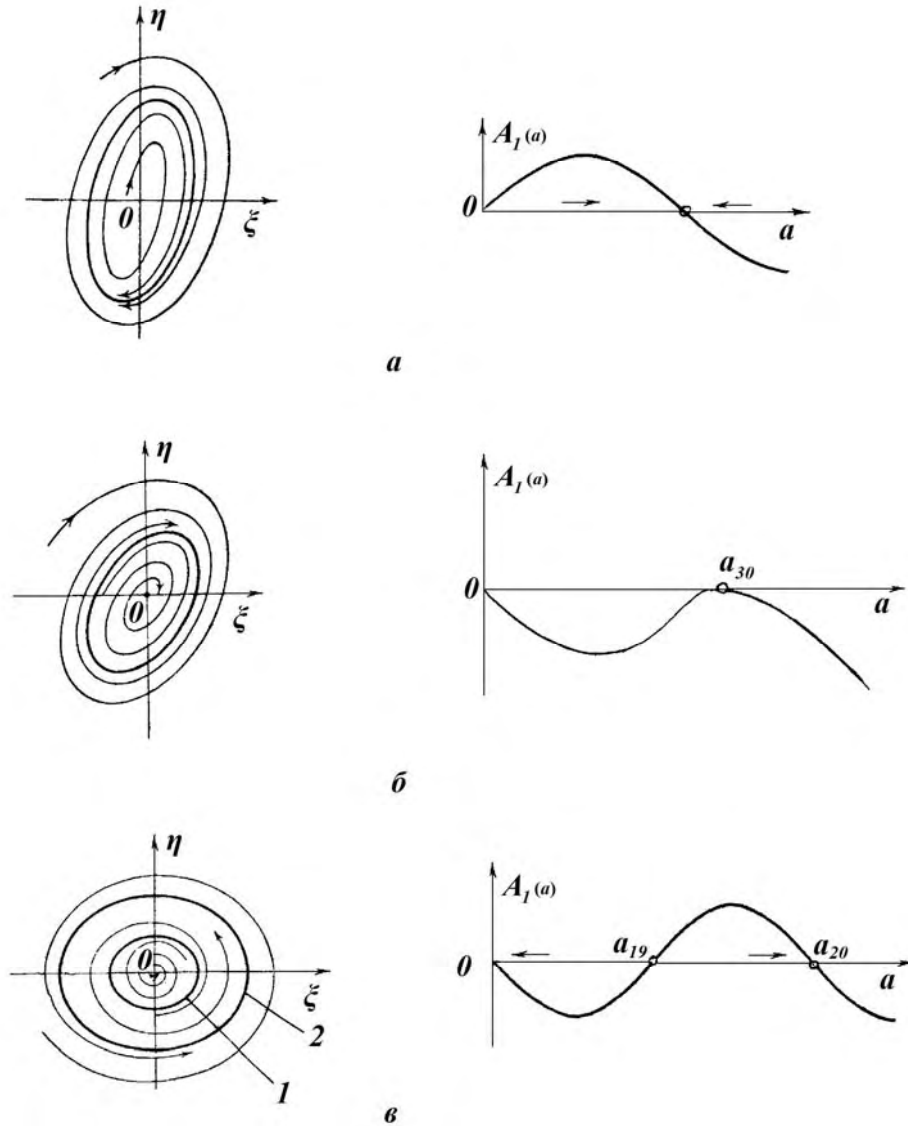


Рис. 5.1

Рис. 5.1 иллюстрируют фазовые портреты ( $\eta = df_k/dt$ ,  $\xi = f_k$ ) и отвечающие им графические представления  $A_1(a)$ , вытекающие из (5.11), построенные для двух типов возбуждений: «мягкого» (рис. 5.1, а) и «жесткого» (рис. 5.1, в). Как видно, в первом случае система (5.11) характеризуется одним устойчивым предельным циклом, во втором – двумя предельными циклами, из которых цикл 1 является неустойчивым, 2 – устойчивым. Предельный случай, реализуемый при  $\beta_{12}^2 = 4\Delta_1\beta_{11}\beta_{13}$ , изображен на рис. 5.1, б.

Если ограничиться учетом нелинейностей до третьего порядка ( $\beta_{13} = 0$ ,  $\beta_{23} = 0$ ), то после интегрирования (5.11) получим сравнительно простое решение для  $a(t)$ :

$$a^2 = \frac{a_{00}^2 \beta_{11} \Delta_1 e^{2\beta_{11} \Delta_1 t}}{\beta_{11} \Delta_1 + \beta_{12} a_{00}^2 (1 - e^{2\beta_{11} \Delta_1 t})}, \quad (5.14)$$

Из соотношения (5.14) следует, что при  $\beta_{11} \Delta_1 < 0$  единственным устойчивым стационарным решением для  $a$  будет тривиальное решение  $a = 0$ . В свою очередь, при  $\beta_{11} \Delta_1 > 0$  устойчиво решение  $a^2 = -(\beta_{11} \Delta_1) / \beta_{12}$ , к которому независимо от значения  $a_{00}$  будут стремиться амплитуды колебаний  $a(t)$ .

В работе [56] изложены методики построения улучшенного первого и более высоких приближений для определения уточненных одночастотных решений системы (5.1).

Все представленные выше особенности нелинейного по типу флаттер деформирования несущих жидкость оболочек окажут влияние и на значения частот автоколебаний (5.10) при изменении амплитуд. В зависимости от параметров совокупной системы оболочка – жидкость и величин «расстройки»  $\Delta_1 = U - U_\phi$  возможны самые различные варианты проявления «неизохронности» колебаний, аналогичные тем, которые характерны для колебаний соответствующих «сухих» оболочек [9, 22, 23 и др.].

## §6. Вынужденные нелинейные колебания оболочек при взаимодействии с жидкостным потоком.

**6.1. Одночастотные решения неавтономных уравнений колебаний оболочек. Резонансный случай.** Изложенный в §5 подход используем для расчета одночастотных колебаний несущих жидкость оболочек при действии на них внешних периодических нагрузок, неравномерно распределенных по боковой поверхности. Вместо решающих уравнений (5.1) в данном случае имеем такую систему:

$$\ddot{f}_k + (\omega_k^2 - \alpha_k U^2) f_k + \varepsilon_k \dot{f}_k + U \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q^{(k)} \dot{f}_q = F_k(\{f_p\}, \{\dot{f}_p\}) + Q_k \cos \Omega_0 t \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (6.1)$$

Как и ранее, будем строить периодическое решение уравнений (6.1) при значениях скоростей потока  $U \approx U_\phi$ . При этом рассмотрим резонансную ситуацию вида  $\lambda_\phi \approx \Omega$ , представляющую наибольший практический интерес с точки зрения динамической напряженности конструкции из-за максимальных амплитуд колебаний. Неизвестные функции  $f_k$  представим в форме, аналогичной (5.4), т.е.

$$f_k = a(\varphi_k e^{i\psi} + \bar{\varphi}_k e^{-i\psi}), \quad (6.2)$$

где  $\psi = \Omega_0 t + \theta$ , а амплитуда  $a$  и фаза  $\theta$  должны быть, в отличие от (5.5), определены из системы уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \theta); \quad \frac{d\theta}{dt} = \lambda_\phi - \Omega_0 + \varepsilon B_1(a, \theta), \quad (6.3)$$

в которой функции  $A_1$ ,  $B_1$  находим из соотношения (5.6), записанного с учетом (6.2) и равенства

$$Q_k \cos \Omega t = \frac{Q_k}{2} [(\cos \theta - i \sin \theta) e^{i\varphi} + (\cos \theta + i \sin \theta) e^{-i\varphi}]. \quad (6.4)$$

Отметим, что периодическое воздействие (6.4) предполагается величиной, имеющей порядок нелинейных сил в системе (6.1), т.е. пропорциональной малому параметру  $\varepsilon$  [4].

В конечном результате получим такие решения [44, 45]:

$$\begin{aligned} \varepsilon A_1(a, \theta) &= \beta_{11}\Delta_1 a + \beta_{12}a^3 + (R_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta); \\ \varepsilon B_1(a, \theta) &= \beta_{21}\Delta_1 + \beta_{22}a^2 + \frac{1}{a}(S_1 \cos \theta - R_1 \sin \theta). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь использованы обозначения, примененные в предыдущей главе; постоянные параметры  $R_1$  и  $S_1$ , соответственно, равны [58]

$$R_1 = \frac{q_1 k_3 + q_2 k_4}{k_0^2}; S_1 = \frac{q_2 k_3 - q_1 k_4}{k_0^2} \quad \left( q_1 = \operatorname{Re} T; q_2 = \operatorname{Im} T; T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \chi_k \right). \quad (6.6)$$

Приравнявая правые части (6.3) нулю, выводим с учетом (6.5) АЧХ для стационарных режимов [44, 58]

$$\Delta_0 = -\beta_{21}\Delta_1 - \beta_{22}a^2 \pm \sqrt{\frac{Q^2}{a^2} - (\beta_{11}\Delta_1 + \beta_{12}a^2)^2}, \quad (6.7)$$

где  $Q^2 = R_1^2 + S_1^2$ ;  $\Delta_0 = \lambda_\phi - \Omega_0$ . Решения  $a = a(\Delta_0)$  этого уравнения будут устойчивы, если удовлетворяют одновременно таким двум критериям [4, 44, 56]:

$$\frac{\partial A_1}{\partial a} + \frac{\partial B_1}{\partial \theta} < 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial a} \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \frac{\partial B_1}{\partial a} > 0,$$

из которых следуют такие условия:

$$a^2 > a_0^2 / 2; (\beta_{11}\Delta_1 + 3\beta_{12}a^2)(\beta_{11}\Delta_1 + \beta_{12}a^2) + H^2(a) + 2\beta_{22}H(a)a^2 > 0. \quad (6.8)$$

Здесь  $H(a) = \Delta_0 + \beta_{21}\Delta_1 + \beta_{22}a^2$ ;  $a_0^2 = -\beta_{11}\Delta_1 / \beta_{12}$ ;  $a_0$  – амплитуда установившихся автоколебаний несущей оболочки, возникающих в ней при отсутствии внешнего периодического воздействия ( $q \equiv 0$ ) с учетом условия  $\beta_{11}\Delta_1 / \beta_{12} < 0$ .

Из (6.7), (6.8) следует, что устойчивый одночастотный (с частотой  $\Omega_0$ ) режим колебаний оболочки при  $U > U_\phi$  возможен лишь в некотором узком интервале частот  $\Omega$ , близких к частоте  $\lambda_\phi$  [9, 44]. При этом амплитуды резонансных колебаний всегда будут превышать величину  $a_0 / \sqrt{2}$ . Ниже этой величины установившиеся вынужденные резонансные колебания оболочки будут всегда неустойчивы. Второй критерий (6.8) представляет в координатах  $a, \Delta_0$  некоторый эллипс, пересекающий АЧХ (6.7) в точках, где касательные к ней вертикальны [22]. Эти точки и разделяют устойчивые и неустойчивые участки АЧХ (при условии  $a > a_0 / \sqrt{2}$ ). На рис. 6.1 показан общий вид АЧХ  $a = a(\Delta_0)$ , построенных на основании уравнения (6.7) при выполнении условий  $\Delta_1 < 0(a)$  и  $\Delta_1 > 0(b)$ , соответственно [68]. В обоих случаях предполагалось  $\beta_{11} > 0, \beta_{12} < 0$ , что, как отмечалось ранее, обычно выполняется для оболочек средней длины. Устойчивые участки кривых обозначены сплошными линиями, неустойчивые – штриховыми. Кривые 1, 2, 3 построены при различных значениях амплитудного параметра внешней силы  $Q$ :  $Q_1, Q_2, Q_3$ , причем  $Q_3 > Q_2 > Q_1$ . Параметр частотной «расстройки»  $\Delta_{01}$  в обоих случаях равен  $\Delta_{01} = -\beta_{21}\Delta_1$ .

Показанная на рис. 6.1, а АЧХ является типичной для нелинейных неавтоколебательных систем с одной степенью свободы с «мягкой» характеристикой нелинейной восстанавливающей силы [9, 22, 23]. Качественно иную форму имеют АЧХ, приведенные на рис. 6.1, б. А именно, при относительно малых значениях  $Q$  ( $Q < Q_2$ ) уравнению (6.7) соответствуют две «изолированные» одна от другой частотные харак-

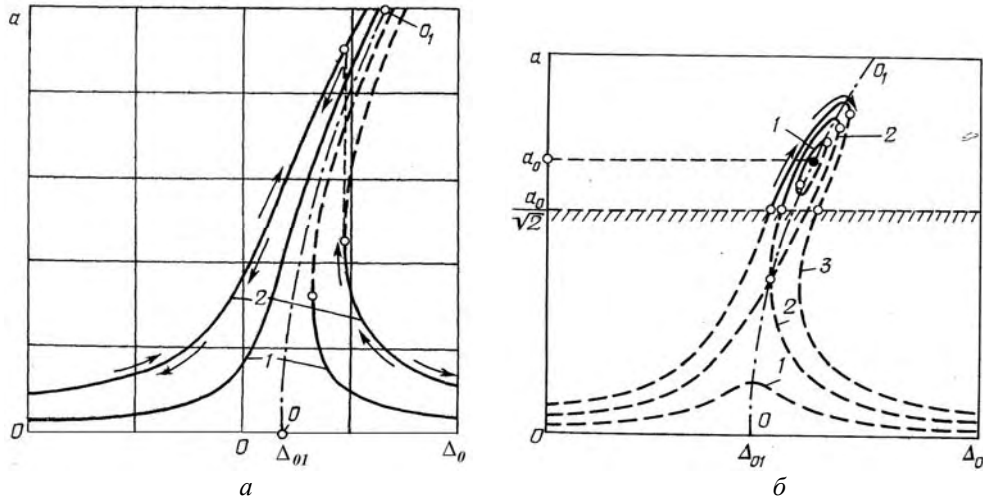


Рис. 6.1

теристики  $a = a(\Delta_0)$  (кривые 1). Соприкосновение этих характеристик произойдет при  $Q = Q_2 = -(\bar{\Delta}_0 / \beta_{22}^3)(\beta_{11}\beta_{22}\Delta_1 - \beta_{12}\bar{\Delta}_0)^2$ , где  $\bar{\Delta}_0 = \Delta_0 + \beta_{21}\Delta_1$ . Амплитуда  $a$  в точке соприкосновения равна:  $a = a_2 = \sqrt{-\bar{\Delta}_0 / \beta_{22}}$ .

В целом, представленный на рис. 6.1, б режим устойчивых стационарных колебаний именуют иногда режимом «принудительной синхронизации» или режимом «захватывания» автоколебаний с частотой  $\lambda_\phi$  вынужденными колебаниями, реализуемыми с частотой  $\Omega_0$  [9, 22,45].

**6.2. Бигармонические режимы колебаний несущей оболочки в околорезонансной области.** В областях неустойчивости (6.8) моногармонического режима (6.2), которые могут быть нарушены непосредственно в резонансной зоне, следует по аналогии с теорией классических (с механизмом «отрицательного» трения) автоколебательных систем [9] ожидать реализации двухчастотного режима [22] – появления сложных колебаний оболочки с двумя частотами: частотой внешнего возбуждения  $\Omega_0$  и частотой собственно автоколебаний  $\lambda_\phi$ . При построении двухчастотных решений здесь также можно использовать идею применявшегося в предыдущем разделе одночастотного асимптотического метода Б – М. При этом необходимо предварительно преобразовать систему исходных разрешающих уравнений к виду, который удовлетворял бы всем требованиям для применения указанного метода. Рассмотрим, к примеру, двухмодовую расчетную модель несущей оболочки в виде (1.19), приняв для упрощения  $Q_3 = 0$ , т.е.

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \omega_{11}f_1 + \varepsilon_1\dot{f}_1 - \beta_1 U \dot{f}_3 &= F_{11}(f_1, f_3) + Q_1 \cos \Omega_0 t; \\ \ddot{f}_3 + \omega_{33}f_3 + \varepsilon_3\dot{f}_3 + \beta_2 U \dot{f}_1 &= F_{33}(f_1, f_3), \end{aligned} \quad (6.9)$$

Тогда поставленную задачу решает замена переменных [4, 9, 22]

$$f_1 = M_1 \cos \Omega_0 t + N_1 \sin \Omega_0 t + z_1; \quad f_3 = M_2 \cos \Omega_0 t + N_2 \sin \Omega_0 t + z_3, \quad (6.10)$$

где  $M_1, M_2, N_1, N_2$  – постоянные величины, удовлетворяющие системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\omega_{11} - \Omega_0^2)M_1 - \beta_1 U \Omega_0 N_2 + \varepsilon_1 \Omega_0 N_1 &= Q_1; \\ -\varepsilon_1 \Omega_0 M_1 + (\omega_{11} - \Omega_0^2)N_1 + \beta_1 U \Omega_0 M_2 &= 0; \end{aligned}$$

$$\beta_2 U \Omega_0 N_1 + (\omega_{22} - \Omega_0^2) M_2 + \varepsilon_2 \Omega_0 N_2 = 0; \quad (6.11)$$

$$-\beta_2 U \Omega_0 M_1 - \varepsilon_2 \Omega_0 M_2 + (\omega_{33} - \Omega_0^2) N_2 = 0.$$

Функции  $z_1, z_2$  представляют новые переменные, подлежащие определению.

Решения уравнений (6.11) имеют вид  $M_1 = \Delta_{11}/\Delta_{00}$ ;  $N_1 = \Delta_{22}/\Delta_{00}$ ;  $M_2 = \Delta_{33}/\Delta_{00}$ ;  $N_2 = \Delta_{44}/\Delta_{00}$ , с учетом обозначений

$$\Delta_{00} = p_1^2 (p_2^2 + \varepsilon_2^2 \Omega_0^2) - 2\beta_1 \beta_2 p_1 p_2 U^2 \Omega_0^2 + p_2^2 \varepsilon_1^2 \Omega_0^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 U^4 \Omega_0^4 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \Omega_0^4 + \beta_1 \beta_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 U^2 \Omega_0^4;$$

$$\Delta_{11} = Q_1 [p_1 p_2^2 - \beta_1 \beta_2 p_2 U^2 \Omega_0^2 + p_1 \varepsilon_2^2 \Omega_0^2];$$

$$\Delta_{22} = -Q_1 [p_2^2 \varepsilon_1 + \beta_1 \beta_2 \varepsilon_2 U^2 \Omega_0^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \Omega_0^2]; \quad \Delta_{33} = -Q_1 \beta_2 U \Omega_0^2 (p_2 \varepsilon_1 + p_1 \varepsilon_2);$$

$$\Delta_{44} = Q_1 U \beta_2 \Omega_0 (-p_1 p_2 + \beta_1 \beta_2 U^2 \Omega_0^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega_0^2); \quad p_1 = \omega_{11} - \Omega_0^2; \quad p_2 = \omega_{33} - \Omega_0^2.$$

Нелинейные уравнения, составленные относительно неизвестных функций  $z_1 = z_1(t)$ ,  $z_2 = z_2(t)$ , можно записать так [9]:

$$\ddot{z}_1 + \omega_{11} z_1 + \varepsilon_1 \dot{z}_1 - \beta_1 U \dot{z}_2 = \bar{F}_{11};$$

$$\ddot{z}_2 + \omega_{22} z_2 + \varepsilon_2 \dot{z}_2 + \beta_2 U \dot{z}_1 = \bar{F}_{22}. \quad (6.12)$$

Для решения этих уравнений уже можно применять метод Б – Г, ориентированный на построение одночастотных режимов колебаний. В их правой части представлены пропорциональные малому параметру  $\varepsilon$  нелинейные функции  $\bar{F}_{11}, \bar{F}_{22}$ , полученные в результате подстановки замены (6.10) в правые части системы (6.9). Очевидно, что эти функции зависят от параметров, характеризующих геометрическую нелинейность оболочки, а также и от «амплитудных» параметров  $M_1, N_1, M_2, N_2$ , порожденных внешним нагружением, и от времени  $t$  [9].

Последующая схема решения задачи аналогична изложенной в п. 6.1. При этом предполагается, что частота  $\Omega_0$  не близка и не кратна по отношению к частоте автоколебаний  $\lambda_\phi$  (т.е. субгармонические резонансы отсутствуют). Решение уравнений (6.12) по аналогии с (6.2) можно представить на уровне первого приближения в виде

$$z_k = a_k (\varphi_k e^{i\psi_k} + \bar{\varphi}_k e^{-i\psi_k}) \quad (k = 1, 2), \quad (6.13)$$

где, как обычно,  $\varphi_k$  – собственные функции ( $\bar{\varphi}_k$  – комплексно сопряженные величины);  $\psi_k = \lambda_\phi t + \theta_k$ ,  $\lambda_\phi$  – частота автоколебательной слагаемой, которую находим из составленного для линеаризованной системы (6.12) характеристического уравнения. Уравнения для определения неизвестных величин – амплитуды  $a_k$  и фазы  $\psi_k$  – примут, в отличие от (6.3) несколько иную форму [4]

$$\frac{da_k}{dt} = \varepsilon A_{11}(a_k); \quad \frac{d\psi_k}{dt} = \lambda_\phi + \varepsilon B_{11}(a_k). \quad (6.14)$$

Функции  $A_{11}(a_k)$  и  $B_{11}(a_k)$  находим, используя приведенное ранее условие «ортогональности» (5.6). В результате получим

$$A_{11}(a_1) = \beta_{11} \Delta_1 a_1 + \beta_{12} a_1^3 + \beta_{13} a_1; \quad B_{11}(a_1) = \beta_{21} \Delta_1 + \beta_{22} a_1^2 + \beta_{23}. \quad (6.15)$$

Здесь  $\beta_{jk}$  ( $j, k = 1, 2$ ) – постоянные коэффициенты, которые совпадают с соответствующими коэффициентами в соотношениях (5.11);  $\beta_{13}, \beta_{23}$  – зависящие от амплитуды  $Q_1$  внешнего возбуждения постоянные параметры, причем  $\beta_{13} = \text{Re} T_1(Q_1)$ ;  $\beta_{23} = \text{Im} T_1(Q_1)$ ,

где  $T_1 = \frac{0,5[(3\gamma_1 A_0^2 + \gamma_2 B_0^2)\varphi_1 \chi_1 + (3\gamma_4 B_0^2 + \gamma_3 A_0^2)\varphi_2 \chi_2] + (M_1 M_2 + N_1 N_2)(\gamma_2 \varphi_2 \chi_1 + \gamma_3 \varphi_1 \chi_2)}{(2i\lambda_\phi + \varepsilon_1)\varphi_1 \chi_1 + (2i\lambda_\phi + \varepsilon_2)\varphi_2 \chi_2 + (\beta_2 \varphi_1 \chi_2 - \beta_1 \varphi_2 \chi_1)U_\phi}$ ;  
 $\chi_1, \chi_2$  – собственные функции линейной системы, сопряженной с соответствующей системой (6.12),  $A_0 = \sqrt{M_1^2 + N_1^2}$ ,  $B_0 = \sqrt{M_2^2 + N_2^2}$ .

Таким образом, как следует из (6.14), (6.15), стационарная амплитуда «флаттерной» компоненты нерезонансных колебаний оболочки  $a_1^*$  выражается следующим образом:

$$a_1^* = \sqrt{-\frac{\beta_{11}\Delta_1 + \beta_{13}}{\beta_{12}}} = \sqrt{a_0^2 - \frac{\beta_{13}}{\beta_{12}}}, \quad (6.16)$$

а частота этих колебаний  $\sigma_1$  в зависимости от амплитуды будет выражаться так:

$$\sigma_1(a_1) = \lambda_\phi + \beta_{21}\Delta_1 + \beta_{22} a_1^{*2} + \beta_{23}.$$

Процесс установления стационарных колебаний будет происходить согласно закону

$$a_1^2 = a_1^2(t) = \frac{\bar{\beta}_{11} a_{10}^2 e^{2\bar{\beta}_{11}t}}{\bar{\beta}_{11} + \beta_{12}(1 - e^{2\bar{\beta}_{11}t})a_{10}^2} \quad (\bar{\beta}_{11} = \beta_{11}\Delta_1 + \beta_{13}, \quad a_{10} = a_1(0)). \quad (6.17)$$

Таким образом, процесс деформирования несущей оболочки, выражаемый соотношением (1.16), в нерезонансной области соответствует наложению следующих трех компонент:

$$w = w_1(\Omega_0 t, x, y) + w_2(\lambda t, x, y) + W_0(\Omega_0 t, x) \quad (6.18)$$

$$(w_1 = [A \cos(\Omega_0 t + \varphi_{10}) \sin \lambda_1 x + B \cos(\Omega_0 t + \varphi_{20}) \sin \lambda_2 x] \cos sy;$$

$$w_2 = [z_1(t) \sin \lambda_1 x + z_2(t) \sin \lambda_2 x] \cos sy),$$

причем  $\varphi_{10}, \varphi_{20}$  – постоянные фазы, определяемые из соотношений  $\operatorname{tg} \varphi_{10} = N_1/M_1$ ;  $\operatorname{tg} \varphi_{20} = N_2/M_2$ ;  $W_0(\Omega_0 t, x)$  – «корректирующий» осесимметричный прогиб, имеющий вид (1.17).

Первая компонента в (6.18)  $w_1$  характеризует чисто вынужденные колебания оболочки, частота которых совпадает с частотой внешнего возбуждения  $\Omega_0$ . «Автоколебательная» слагаемая  $w_2$  общего колебательного процесса (6.18) будет известной, если построено периодическое решение (6.13) системы (6.12), т.е. если будут определены функции  $z_1$  и  $z_2$ .

Из (6.16), (6.17) следует, что при условии  $\beta_{11}\Delta_1 + \beta_{13} < 0$  амплитуда  $a_1$  флаттерных колебаний со временем  $t$  будет стремиться от задаваемого начального значения  $a_{10}$  к нулю. В итоге в общем решении (6.18) при установлении останется только периодическая (с периодом  $T = 2\pi/\Omega_0$ ) компонента. Такой режим обычно называют режимом «асинхронного гашения» колебаний. Если  $\bar{\beta}_{11} > 0$ , колебания оболочки будут происходить одновременно с двумя частотами  $\sigma_1$  и  $\Omega_0$ .

Устойчивость двухчастотного режима регламентируется исполнением лишь одного критерия  $\beta_{11}\Delta_1 + \beta_{13} + 3\beta_{12}a_1^2 < 0$ .

Таким образом, действие гармоничной силы на оболочку при взаимодействии ее с движущейся жидкостью, в общем случае может привести к возбуждению одночастотного режима синхронизации, который реализуется непосредственно в резонансной

области, а также к появлению в зоне неустойчивости указанного одночастотного режима бигармонических колебаний с различными некратными частотами. Кроме того, при определенных условиях в области неустойчивости возможен также специфический режим «асинхронного гашения» колебаний.

## §7. Устойчивость и колебания оболочек при пульсирующей скорости движения жидкости.

**7.1. Вводные замечания.** В большинстве случаев скорость движения жидкости  $U$  в оболочечных конструкциях предполагается постоянной величиной ( $U = U_0 = \text{const}$ ). Значительно меньше внимания уделялось весьма важной проблеме взаимодействия оболочек с жидкостью, движущейся с переменной во времени скоростью. Изменение во времени скорости жидкостного потока может быть обусловлено, например, «пульсирующими» режимами работы компрессоров, насосов, других нагнетательных устройств, предназначенных для создания соответствующего переменного давления в несущем упругом объекте на одном из его краев.

В работах [8, 26] рассмотрены некоторые задачи, посвященные исследованию устойчивости цилиндрических оболочек при взаимодействии с «пульсирующим» потоком жидкости. Скорость движения жидкости изменялась во времени согласно закону

$$U = U(t) = U_0(1 + \mu_0 \cos vt) \quad (\mu_0, v = \text{const}). \quad (7.1)$$

Основное внимание в этих работах уделено определению, исходя из анализа линеаризованных динамических уравнений оболочек, областей их динамической неустойчивости (ОДН). Ниже изложена и проиллюстрирована численным примером методика расчета закритических, реализуемых после потери устойчивости, нелинейных колебаний цилиндрических оболочек при наличии пульсаций скорости жидкости в виде (7.1) при условии  $\mu_0 \ll 1$ . Как и в предыдущих двух главах, полагаем  $U_0 \approx U_\phi$  и одновременно примем  $v/2 \approx \lambda_\phi$ , т.е. будем исследовать поведение оболочки в области главного параметрического резонанса при скорости потока, близкой к критической скорости флаттера [7, 18, 46].

**7.2. Построение усредненных уравнений.** По аналогии с рассмотренными в §§5, 6 задачами для построения приближенного решения системы (5.1), в которой скорость потока  $U$  имеет вид (7.1), используем одночастотный метод, обобщенный на случай нелинейных уравнений с переменными параметрами [4, 56]. Представим это решение с учетом сформулированных выше предположений в виде

$$f_k = a(\varphi_k e^{i\phi} + \bar{\varphi}_k e^{-i\phi}); \quad \psi = vt/2 + \theta \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (7.2)$$

где амплитуда и фаза  $a$  и  $\theta$  должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \theta); \quad \frac{d\theta}{dt} = \lambda_\phi - \frac{v}{2} + \varepsilon B_1(a, \theta). \quad (7.3)$$

Функции  $A_1, B_1$ , как и ранее, получим из построенного с учетом (7.2) условия (5.6) с использованием замены  $\mu_0 \cos vt = \mu_0/2[(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)e^{2i\psi} + (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)e^{-2i\psi}]$ .

В итоге уравнения (7.3) можно тогда представить в виде [44, 46, 56]:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \beta_{11}\Delta_1 a + \beta_{12}a^3 + (R_2 \cos 2\theta + S_2 \sin 2\theta)a; \\ \frac{d\theta}{dt} &= \Delta_0 + \beta_{21}\Delta_1 + \beta_{22}a^2 + \frac{1}{a}(S_2 \cos 2\theta - R_2 \sin 2\theta), \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $\Delta_0 = \lambda_\phi - v/2$ ,  $\Delta_1 = U_0 - U_\phi$ ; коэффициенты  $\beta_{jk}$  ( $j, k = 1, 2$ ) имеют вид (5.8); постоянные параметры  $R_2, S_2$  определяются из равенств



$$R_2 = \frac{k_3 k_7 + k_4 k_8}{k_0^2}; S_2 = \frac{k_3 k_8 - k_4 k_7}{k_0^2} \quad (k_7 = \operatorname{Re} T);$$

$$k_8 = \operatorname{Im} T; T = \mu_0 U_\phi \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_k U_\phi \bar{\varphi}_k + \frac{i \lambda_\phi}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{jk} \bar{\varphi}_j \right) \chi_n. \quad (7.5)$$

Полученные уравнения (7.4) являются исходными и для расчета областей устойчивости оболочек вследствие влияния пульсаций жидкостного потока, и для определения характера поведения данных оболочек в областях неустойчивости.

**7.3. Устойчивость оболочки при малых градиентах смещений.** Области динамической неустойчивости оболочки, т.е. частотные зоны, в которых имеет место самовозбуждение колебаний данной оболочки, определяются на основе соответствующего анализа линеаризованных уравнений (7.4). Вводя новые переменные  $u_1$  и  $v_1$ :  $u_1 = a \cos(\theta - \theta_0)$ ;  $v_1 = a \sin(\theta - \theta_0)$ ; ( $\theta_0 = 0,5 \operatorname{arctg} R_2/S_2$ ) и полагая в (7.4)  $\beta_{12} = 0$ ,  $\beta_{22} = 0$ , получаем

$$\frac{du_1}{dt} = [(\beta_{11} \Delta_1 + M)u_1 - (\Delta_0 + \beta_{21} \Delta_1)v_1];$$

$$\frac{dv_1}{dt} = [(\beta_{11} \Delta_1 - M)v_1 + (\Delta_0 + \beta_{21} \Delta_1)u_1] \left( M = \sqrt{R_2^2 + S_2^2} = \sqrt{\frac{k_7^2 + k_8^2}{k_0^2}} \right). \quad (7.6)$$

Анализируя корни характеристического уравнения, составленного для системы (7.6), устанавливаем, что несущая оболочка будет находиться в зоне устойчивости при выполнении двух неравенств [46]

- 1)  $\beta_{11} \Delta_1 < 0$  при  $M^2 < (\Delta_0 + \beta_{21} \Delta_1)$ ;
- 2)  $\beta_{11} \Delta_1 + \sqrt{M^2 - (\Delta_0 + \beta_{21} \Delta_1)} < 0$  при  $M^2 > (\Delta_0 + \beta_{21} \Delta_1)$ .

Очевидно, что оба критерия (7.7) существенно зависят от соотношений обоих «расстроек» —  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$ . В частности, при условии  $\beta_{11} > 0$  неустойчивость оболочки всегда наступит при  $\Delta_1 > 0$ . Если  $\Delta_1 = 0$ , ОДН определяется так:  $v_1 < v < v_2$ , где  $v_{1,2} = 2(\lambda_\phi \pm M)$ . Если же  $\Delta_1 < 0$ , областью неустойчивости оболочки будет область  $v_3 < v < v_4$ , где  $v_{3,4} = 2 \left[ \lambda_\phi + \beta_{21} \Delta_1 \mp \sqrt{M^2 - (\beta_{11} \Delta_1)^2} \right]$ .

В качестве иллюстрации на рис. 7.1 приведены ОДН ортотропной оболочки с параметрами (3.14) при  $n = 3$ , обусловленные взаимодействием с протекающей жидкостью при наличии пульсаций скорости. При расчете использована шестимодовая аппроксимация прогиба  $w$  в виде (1.15). Области  $A$  и  $B$  построены при  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_1 = -0,9 \text{ м/с}$ , соответственно, безразмерный частотный параметр  $\bar{v} = v/2\lambda_\phi$ . Таким образом, при  $\Delta_1 < 0$  существует некоторый амплитудный «порог» пульсаций скорости, ниже которого несущая оболочка всегда будет находиться в зоне устойчивости. Этот «порог» определяется формулой [46]  $M = M_* = |\beta_{11} \Delta_1|$ .

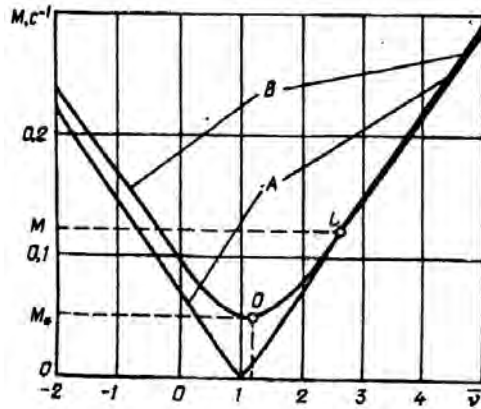


Рис. 7.1

**7.4. Амплитудно-частотные характеристики параметрических колебаний оболочки в зоне демultiпликационного резонанса.** Полагая, как обычно,  $da/dt = 0$ ,  $d\theta/dt = 0$  на основании исходной системы (7.4) получим АЧХ оболочки, соответствующую установившимся режимам колебаний [46]

$$\Delta_0 = -(\beta_{21}\Delta_1 + \beta_{22}a^2) \pm \sqrt{M^2 - (\beta_{11}\Delta_1 + \beta_{12}a^2)^2}, \quad (7.8)$$

Полученные при этом стационарные решения  $a = a(\Delta_0)$  будут устойчивыми (практически реализуемыми), если одновременно выполняются следующие два критерия:

$$2\beta_{12}a^2 + \beta_{11}\Delta_1 < 0; (\beta_{12}^2 + \beta_{22}^2)a^2 + (\beta_{12}\beta_{11} + \beta_{21}\beta_{22})\Delta_1 + \beta_{22}\Delta_0 > 0. \quad (7.9)$$

Эти критерии получены исходя из анализа уравнений в вариациях, составленных для исходной системы (7.4).

На рис. 7.2, 7.3 представлены АЧХ (7.7) для рассматриваемой оболочки, построенные с учетом условий (7.9) [46]. Здесь использованы безразмерные переменные  $\bar{a}_0 = a/h$ ,  $\bar{\Delta}_0 = \Delta_0/\lambda_\phi$ . Рис. 7.2 построен при  $\Delta_1 = 0,9 \text{ м/с}$ ,  $U_0 = 34,12 \text{ м/с}$ . Кривые 1–5 отвечают, соответственно, таким значениям параметра  $M$ :  $M = 1 \text{ с}^{-1}$ ;  $5 \text{ с}^{-1}$ ;  $10 \text{ с}^{-1}$ ;  $15 \text{ с}^{-1}$ ;  $20 \text{ с}^{-1}$ . Традиционно устойчивые участки частотных кривых обозначены сплошными линиями.

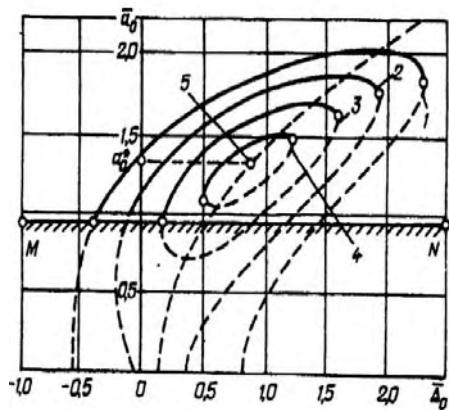


Рис. 7.2

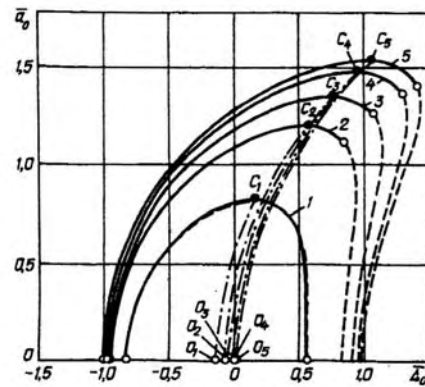


Рис. 7.3

Таким образом, с увеличением уровня амплитудной модуляции скорости движения жидкости, начиная с малых значений, резонансная зона, в которой реализуются установившиеся незатухающие колебания несущей оболочки, расширяется пропорционально росту параметра  $M$ . Ниже границы устойчивости  $MN$ , которой, как следует из (7.9), отвечает амплитуда  $a = |-\beta_{11}\Delta_1/(2\beta_{12})|$ , установившиеся одночастотные колебания несущей оболочки при каком-либо заданном значении «расстройки»  $\Delta_1 > 0$  невозможны.

Качественно иную форму имеют АЧХ данной оболочки при  $\Delta_1 < 0$ , т.е. в областях ее динамической устойчивости. На рис. 7.3 эти характеристики построены, соответственно, при  $\Delta_1 = -0,9 \text{ м/с}$  (кривая 1);  $\Delta_1 = -0,5 \text{ м/с}$  (2);  $\Delta_1 = -0,3 \text{ м/с}$  (3);  $\Delta_1 = -0,1 \text{ м/с}$  (4);  $\Delta_1 = 0$  (5). Амплитудный параметр пульсаций скорости движения жидкости  $M$  во всех случаях предполагался равным  $20 \text{ с}^{-1}$ .

С удалением от границы области динамической неустойчивости оболочки происходит некоторое смещение «скелетных» частотных кривых  $O_i C_i$  в сторону увеличения частот параметрического возбуждения (частот пульсаций скорости движения

жидкости). Одновременно уменьшаются амплитуды изгибных колебаний оболочки, поскольку поток жидкости в данном случае «демпфирует» колебания этой оболочки.

В резонансных областях, где неустойчивы одночастотные колебания оболочек (рис. 7.2), будут реализованы более сложные колебательные режимы, для теоретического изучения которых необходимо использовать специальные функции, в частности, почти периодические функции типа Матье и Флоке [9].

**7.5. Случай комбинированного нагружения.** Если взаимодействующая с потоком оболочка подвергается совместному действию «пульсирующей» гидродинамической нагрузки и поперечного периодического давления, наибольший практический интерес представляет случай «двойного» резонанса, когда  $\lambda_\phi \approx \Omega_0$  и одновременно  $\lambda_\phi \approx \nu/2$ . В этом случае следует ожидать максимальных значений амплитуд колебаний оболочки, что в итоге может привести к появлению опасных напряжений [13]. Амплитуду и фазу установившегося режима при этом надлежит определить из системы уравнений [17, 44]

$$\begin{aligned} G(a) + (R_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta) + (R_2 \cos 2\theta + S_2 \sin 2\theta)a &= 0; \\ H(a) + \frac{1}{a}(S_1 \cos \theta - R_1 \sin \theta) + (S_2 \cos 2\theta - R_2 \sin 2\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$(G(a) = \beta_{11}\Delta_1 a + \beta_{12}a^3; H(a) = \Delta_0 + \beta_{21}\Delta_1 + \beta_{22}a^2; \Delta_0 = \lambda_\phi - \Omega_0, \Omega_0 = \nu/2).$$

Параметры  $R_1, S_1$  и  $R_2, S_2$  определяются, соответственно, из формул (6.6) и (7.5).

Учитывая  $R_1 S_2 - S_2 R_1 = 0$  и вводя обозначения  $M_k^2 = R_k^2 + S_k^2$  ( $k = 1, 2$ );  $K(a) = G^2 + H^2 a^2 - M_2^2 a^2$ , из (7.10) получим, в общем случае, уравнение, устанавливающее зависимость стационарных амплитуд  $a$  от частоты  $\Omega_0$ :

$$4(R_1 H a - G S_1)^2 M_1^2 M_2^2 a^2 + K^2 (K - M_1^2)^2 = 4M_1^2 M_2^2 K^2 a^2. \quad (7.11)$$

Стационарная фаза  $\theta$  одночастотного режима определяется, в свою очередь, из соотношения [44]  $\sin \theta = (R_1 H a - G S_1) / (G^2 + H^2 a^2 - M_2^2 a^2)$ .

Полученные из (7.11) стационарные решения  $a = a(\Omega_0)$  будут устойчивы при одновременном выполнении следующих двух критериев [44]:

$$\begin{aligned} 2\beta_{12}a^2 + \beta_{11}\Delta_1 &< 0; \\ 4(\beta_{12}^2 + \beta_{22}^2)a^4 + 4[(\beta_{12}^2 + \beta_{22}^2)a^4 + 4\beta_{12}\beta_{11}\Delta_0 + \beta_{22}(\Delta_0 + \beta_{21}\Delta_1)]a^2 - \\ - \frac{M_1^2}{a^2} - \frac{1}{M_1 M_2 a^2} (K a^2 - M_1^2) [R_1 \beta_{11} \Delta_1 + S_1 (\Delta_0 + \beta_{21} \Delta_1)] + \\ + \frac{2(R_1 H - S_1 G)}{K a^2} [S_1 \beta_{11} \Delta_1 - R_1 (\Delta_0 + \beta_{21} \Delta_1)] &> 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

В заключение отметим, что в качественном отношении описываемое уравнением (7.11) с учетом условий (7.12) поведение несущей оболочки будет соответствовать поведению автоколебательных систем с одной степенью свободы при их взаимодействии с источниками внешнего возбуждения, которые генерируют одновременно вынужденные и параметрические колебания этой системы [9].

## §8. Нестационарные процессы медленного прохождения системы оболочка – жидкость через резонансные области и области неустойчивости.

Современные требования к прочности и эксплуатационной надежности трубопроводных систем приводят к необходимости рассмотрения некоторых новых, малоизученных пока на данном этапе нелинейных задач о взаимодействии оболочек цилиндрической формы с протекающей внутри жидкостью. Речь идет об исследованиях неста-

ционных процессов деформирования данных оболочек, обусловленных действием на них как внешних, так и внутренних «квазипериодических» (характеризуемых медленно изменяющимися во времени параметрами) нагрузок. Динамические нагрузки такого рода могут быть вызваны, например, работой различных, упомянутых в предыдущей главе нагнетательных устройств в режимах «разгона» или «торможения» жидкостного потока. Задачи такого рода представляют существенный интерес для исследования особенностей «прохождения» несущей конструкции через различные резонансы (гармонические, параметрические, комбинационные), при реализации которых амплитуды колебаний достигают максимальных значений. Кроме этих задач актуальными на современном этапе являются также нестационарные задачи, связанные с изучением особенностей медленного (или быстрого) прохождения оболочек с жидкостью через области дивергентной или флаттерной форм неустойчивости.

Ниже кратко изложены некоторые результаты аналитического и численного решения обоих классов задач, отдельные аспекты которых рассматривались в последние годы [18, 46, 58].

**8.1. Переход через основной гармонический резонанс при поперечном квазипериодическом возбуждении.** Предложенный в §§6, 7 подход к расчету с использованием одночастотного асимптотического метода нелинейных вынужденных и параметрических колебаний оболочек при их взаимодействии с протекающей жидкостью может быть применен и в случае, когда действующие на оболочку внешние (распределенные по боковой поверхности) и внутренние (обусловленные пульсациями скорости потока) нагрузки являются «квазипериодическими» [4]. Рассмотрим сначала действие на несущую оболочку внешнего поперечного, с медленно изменяющейся частотой, давления.

В качестве исходной системы разрешающих динамических уравнений выбрана система (6.1) с измененной правой частью [58]:

$$\ddot{f}_k + (\omega_k^2 - \alpha_k U^2) f_k + \varepsilon_k \dot{f}_k + U \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q^{(k)} \dot{f}_q = F_k(\{f_p\}, \{\dot{f}_p\}) + Q_k \cos \theta_1 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (8.1)$$

Здесь  $\theta_1$  – медленно изменяющаяся функция времени [4], причем  $d\theta_1/dt = \nu_1(\tau)$ , где  $\tau$  – «медленное» время ( $\tau = \varepsilon t$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ );  $\nu_1$  – «мгновенная» частота внешнего квазипериодического воздействия.

Как и в §6, полагаем выполненным условие  $\nu_1 \approx \lambda_\phi$ . Приближенное одночастотное решение уравнений (8.1) построим при  $U \approx U_\phi$ , т.е. исследуем нестационарные процессы в оболочке в окрестности критического значения скорости жидкостного потока, с одной стороны, и в окрестности основного резонанса, с другой. В соответствии с одночастотным асимптотическим методом неизвестные функции  $f_k$  представим в форме, аналогичной по структуре (6.2), т.е.

$$f_k = a(\varphi_k e^{i\psi_1} + \bar{\varphi}_k e^{-i\psi_1}), \quad (8.2)$$

но с учетом замены  $\psi_1 = \theta_1 + \psi$  [58]. Неизвестные величины  $a$  и  $\varphi$  определим из уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \varphi); \quad \frac{d\varphi}{dt} = \lambda_\phi - \nu_1(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \varphi), \quad (8.3)$$

в которых функции  $A_1$ ,  $B_1$  находим, используя изложенный в §5 подход. А именно, из условия «ортогональности» (5.6), построенного с учетом (8.2), (8.3), получим такую систему уравнений для определения указанных функций [4, 58]:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left( k_7 \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - k_8 a \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} \right) \Delta_0 + \varepsilon (k_3 A_1 - k_4 a B_1) &= k_1 a^3 + \Delta_1 k_5 a + q_1 \cos \varphi + q_2 \sin \varphi; \\ \varepsilon \left( k_8 \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} + k_7 a \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} \right) \Delta_0 + \varepsilon (k_4 A_1 + k_3 a B_1) &= k_2 a^3 + \Delta_1 k_6 a - q_1 \sin \varphi + q_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Здесь использованы обозначения, примененные ранее в §§5, 6; кроме того, обозначено  $\Delta_0 = \lambda_\phi - \nu_1(\tau)$ . Действительные параметры  $k_7, k_8$  определяем из приведенного в [58]

$$\text{соотношения } k_7 + ik_8 = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \chi_j.$$

Интегрируя (8.4) с использованием метода неопределенных коэффициентов, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon A_1(a, \theta) &= \beta_{11} \Delta_1 a + \beta_{12} a^3 + (R_{11} \cos \varphi + S_{11} \sin \varphi); \\ \varepsilon B_1(a, \theta) &= \beta_{21} \Delta_1 + \beta_{22} a^2 + \frac{1}{a} (S_{11} \cos \varphi - R_{11} \sin \varphi), \end{aligned} \quad (8.5)$$

где  $\beta_{pq}(p, q = 1, 2)$  имеют вид (5.8), а постоянные параметры  $R_{11}$  и  $S_{11}$ , соответственно, равны [58]

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{q_1[k_3 + (\lambda_\phi - \nu_1)k_8] + q_2[k_4 - (\lambda_\phi - \nu_1)k_7]}{\Delta_{00}}; \\ S_{11} &= \frac{q_2[k_3 + (\lambda_\phi - \nu_1)k_8] - q_1[k_4 - (\lambda_\phi - \nu_1)k_7]}{\Delta_{00}}; \\ \Delta_{00} &= [k_3 + (\lambda_\phi - \nu_1)k_8]^2 + [k_4 - (\lambda_\phi - \nu_1)k_7]^2. \end{aligned}$$

Таким образом, полностью определены правые части системы (8.3), что позволяет получить конкретные значения амплитудного ( $a$ ) и фазового ( $\varphi$ ) параметров нестационарного деформирования несущей оболочки при медленном изменении «мгновенной» частоты  $\nu_1$  нестационарного внешнего воздействия на нее в резонансной зоне и в ее окрестности. В конечном итоге известными будут и все характеристики динамического прогиба  $w$ , выбранного в одной из форм (1.11), (1.15) или (1.16).

Если предположить, что  $\nu_1 = \Omega = \text{const}$ , то на основании (8.3) с учетом (8.5) можно получить АЧХ (6.7), соответствующую стационарному режиму вынужденных колебаний оболочки.

На рис. 8.1 приведены типичные результаты исследования нестационарных процессов прохождения оболочки с параметрами (2.15) через основной гармонический резонанс при различных режимах изменения скорости. Эти результаты получены путем численного интегрирования методом Рунге – Кутты представленных выше уравнений (8.3), (8.5) при аппроксимации прогиба  $w$  упрощенным выражением (1.16). Предполагалось, что «мгновенная» частота внешнего квазипериодического возбуждения  $\nu_1$  является линейной возрастающей или убывающей функцией времени, т.е.  $\nu_1 = \bar{\Omega}_0 \pm \mu_0 t$ , ( $\bar{\Omega}_0, \mu_0 = \text{const}$ ).

Графики зависимостей  $\bar{a} = \bar{a}(\bar{\Delta}_0)$  (рис. 8.1, а) построены при  $U = 72$  м/с; (рис. 8.1, б – при  $U = 80$  м/с). Кривые 1, 2 на обоих рисунках соответствуют прямому прохождению резонансной зоны (параметр  $\mu_0$  здесь принят равным, соответственно,  $\mu_0 = 4,5$  и  $\mu_0 = 6$   $1/c^2$ ,  $\bar{\Omega}_0 = 0,9\Omega_0$ ); кривые 1', 2' – обратному прохождению этой зоны ( $\mu_0 = -4,5$  и  $\mu_0 = -6$   $1/c^2$ ,  $\bar{\Omega}_0 = 1,1\Omega_0$ ). Начальные условия  $a(0)$  соответствуют стационарным значениям амплитуд, вычисленным на основании формулы (6.7), которая справедлива в случае  $\mu_0 = 0$ . Соответствующие этому случаю частотные кривые выделены на рисунке жирными линиями.

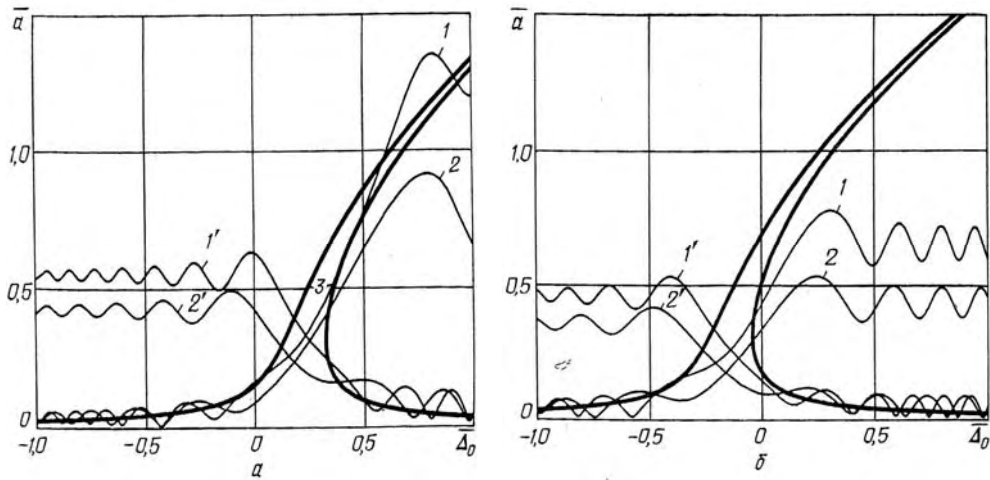


Рис. 8.1

Таким образом, кривые прохождения через резонанс в докритической ( $U < U_0^*$ ) и закритической ( $U > U_0^*$ ) зонах существенно различаются между собой. Это естественно, поскольку в первом случае система (1.19) (на ее основании получены соотношения (8.5)) не является при  $Q_1 = 0, Q_3 = 0$  автоколебательной системой, во втором – в ней на границе потери устойчивости (при  $U_0^* = 76,02 \text{ м/с}, n = 5$ ) возникнут флаттерные колебания. При увеличении скорости изменения частоты внешней силы максимумы амплитуд нестационарных процессов, соответственно, уменьшаются. Отметим также, что эти максимумы при  $\Delta_1 < 0$  и  $\Delta_1 > 0$  реализуются при различных значениях расстройки  $\Delta_0$ . В частности, при  $\Delta_1 < 0$  максимальные амплитуды колебаний оболочки при переходе через резонанс достигаются в более поздние моменты времени по сравнению со случаем  $\Delta_1 > 0$ . Это обусловлено тем, что при переходе от отрицательных значений величины  $\Delta_1$  к положительным происходит некоторое смещение стационарной АЧХ  $a = a(\Delta_0)$  в сторону бо'льших значений частоты внешнего возбуждения  $\Omega_0$  и наоборот. Еще одна характерная особенность исследуемых процессов состоит в том, что максимальные амплитуды колебаний оболочки при  $\Delta_1 < 0$  всегда превышают амплитуды, вычисленные при  $\Delta_1 > 0$ . По-видимому, здесь проявляется известный из теории нелинейных систем с самовозбуждением (автоколебательных систем) эффект «захватывания» колебаний, обусловленный специфическим взаимодействием чисто вынужденных колебаний и автоколебаний (вынужденные колебания в резонансной области, реализуемые с частотой  $\Omega_0$ , «подавляют» автоколебания с частотой  $\lambda_\phi$ ) [9, 22].

Другие, описываемые системой (8.3) особенности прохождения несущей оболочки через резонанс, в качественном отношении согласуются с обнаруженными ранее при анализе нелинейных систем с одной степенью свободы [4]. В частности, после достижения первого максимума наблюдаются биения амплитуд колебаний оболочки как в до, так и в закритической зонах, причем со временем размахи этих биений и их периоды постепенно уменьшаются. Амплитудные кривые при прямом прохождении резонанса существенно отличаются от кривых, полученных при обратном прохождении этого резонанса. Различие кривых в большей степени проявляется в случае медленного прохождения резонансной области. Отметим также, что резкие изменения во времени амплитуд колебаний оболочки реализуются в окрестности частотной области, в которой наблюдаются срывы стационарных амплитуд на АЧХ (6.7).

**8.2. Переход через параметрический резонанс.** Используя изложенные в §7 результаты, построим далее разрешающие (усредненные) уравнения, описывающие нестационарные колебания оболочки с протекающей жидкостью при наличии пульсаций скорости. При этом предполагаем, что частота пульсаций медленно изменяется со временем [18]. Рассмотрен нестационарный процесс перехода совокупной оболочечно-жидкостной системы через главный параметрический резонанс в случае, когда скорость движения жидкости  $U$  представляла медленно изменяющуюся функцию времени вида

$$U = U_0 (1 + \mu_0 \cos \theta_2). \quad (8.6)$$

Здесь  $d\theta_2/dt = v_2(\tau)$ ,  $\tau = \varepsilon t$  ( $U_0, \mu_0 = \text{const}$ ;  $0 < \mu_0 \ll 1$ ). Одновременно принято выполненным известное резонансное соотношение  $\lambda_\phi \approx v_2/2$  [4, 6] и традиционное условие  $U_0 \approx U_\phi$ . Соответствующее этим условиям решение уравнений (5.1) с учетом (8.6) представим в виде

$$f_k = a(\varphi_k e^{i\varphi_2} + \bar{\varphi}_k e^{-i\varphi_2}) \quad (\varphi_2 = \theta_2 + \varphi), \quad (8.7)$$

где неизвестные функции  $a$  и  $\varphi$  следует определить из системы уравнений

$$da/dt = \varepsilon A_1(\tau, a, \varphi); \quad d\varphi/dt = \lambda_\phi - v_2/2(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \varphi). \quad (8.8)$$

Входящие в (8.8) функции  $A_1, B_1$  по-прежнему определяем из условия (5.6) главы 5. В результате получим аналогичную (8.4) систему уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \left( k_7 \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - k_8 a \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} \right) \Delta_0 + \varepsilon (k_3 A_1 - k_4 a B_1) &= k_1 a^3 + \Delta_1 k_5 a + p_1 \cos 2\varphi + p_2 \sin 2\varphi; \\ \varepsilon \left( k_8 \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} + k_7 a \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} \right) \Delta_0 + \varepsilon (k_4 A_1 + k_3 a B_1) &= k_2 a^3 + \Delta_1 k_6 a - p_1 \sin 2\varphi + p_2 \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Здесь также использованы обозначения, принятые в §5. Постоянные параметры  $p_1, p_2$  определяем из соотношений  $p_1 = \text{Re} T_1$ ;  $p_2 = \text{Im} T_1$ , где функция  $T_1$  совпадает с функцией  $T$  (см гл. 7).

После интегрирования (8.9) получим такие решения:

$$\begin{aligned} \varepsilon A_1 &= \beta_{11} \Delta_1 a + \beta_{12} a^3 + (R_{22} \cos 2\varphi + S_{22} \sin 2\varphi) a; \\ \varepsilon B_1 &= \beta_{21} \Delta_1 + \beta_{22} a^2 + (S_{22} \cos 2\varphi - R_{22} \sin 2\varphi), \end{aligned} \quad (8.10)$$

в которых медленно изменяющиеся функции  $R_{22}, S_{22}$  выражаются так:

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{[k_3 + 2(\lambda_\phi - v_2/2)g_8] p_1 + [k_4 - 2(\lambda_\phi - v_2/2)k_7] p_2}{\Delta_{00}}; \\ S_{22} &= \frac{[k_3 + 2(\lambda_\phi - v_2/2)g_8] p_2 - [k_4 - 2(\lambda_\phi - v_2/2)k_7] p_1}{\Delta_{00}}, \\ \Delta_{00} &= (k_3 + \Delta_0 k_8)^2 + (k_4 - \Delta_0 k_7)^2; \quad \Delta_0 = \lambda_\phi - v_2/2. \end{aligned}$$

Таким образом, выведены уравнения, позволяющие исследовать особенности нестационарного деформирования несущей оболочки в зоне главного параметрического резонанса при медленном изменении частоты пульсаций жидкостного потока.

В качественном отношении описываемые уравнениями (8.8) совместно с (8.10) кривые прохождения оболочки через параметрический резонанс аналогичны соответствующим кривым прохождения через основной гармонический резонанс, представленным на рис. 8.1.

**8.3. Переход оболочечно-жидкостной системы через области динамической неустойчивости.** Практически важными являются также задачи об исследовании нестационарных процессов перехода несущей оболочки через область дивергентной неустойчивости или область флаттера в режимах «разгона» или «торможения» скорости жидкостного потока. Некоторые типичные результаты таких исследований представлены на рис. 8.2 и 8.3 [58]. Здесь показаны графики изменения во времени безразмерного прогиба  $\bar{w} = w/h$ , выбранного в форме (1.16), при медленном прямом и обратном прохождении критических скоростей дивергенции и флаттера. Рассмотрена заполненная подвижной жидкостью оболочка с параметрами (2.15). В расчетных динамических уравнениях оболочки (1.19) учитывались геометрически нелинейные члены до третьего порядка включительно и линейное демпфирование с параметром  $\varepsilon_0 = 0,1 (1/c)$ . Внешнее периодическое воздействие предполагается отсутствующим ( $Q_1 = 0, Q_3 = 0$ ). Функции  $f_3$  и  $f_4$ , характеризующие осесимметричную составляющую  $W_0(x)$  (1.17) общего прогиба  $w$  (1.16), определены из решения «квазистатической» задачи [7].

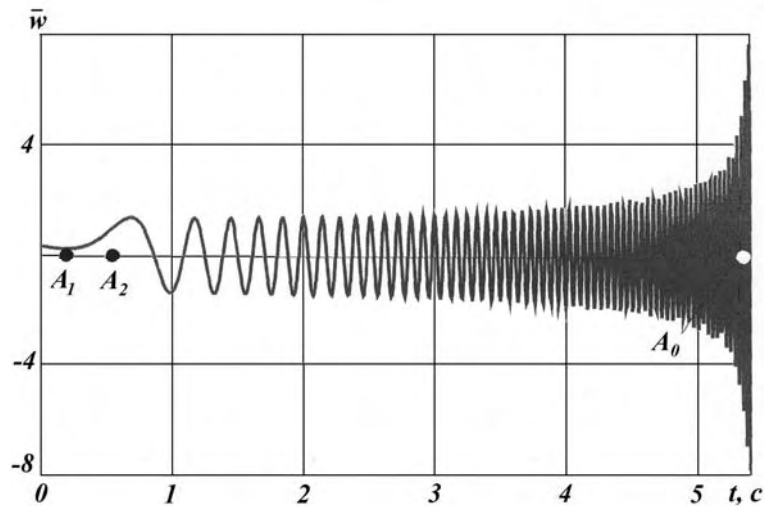


Рис. 8.2

Рис. 8.2 соответствует процессу прямого прохождения областей неустойчивости, рис. 8.3 – случаю обратного прохождения указанных областей. В первом варианте скорость движения жидкости изменялась в соответствии с законом  $U(t) = U_{01} + \mu_1 t$ , где  $U_{01} = 60,64$  м/с; во втором (рис. 8.3) принято  $U(t) = U_{03} - \mu_1 t$ , где  $U_{03} = 76,16$  м/с. Напомним, что минимальная скорость дивергенции для рассматриваемой оболочки  $U_{\delta}^{(1)} = 63,15$  м/с (потеря устойчивости при этом произойдет по окружной форме с параметром волнообразования  $n = 4$ ), а минимальная скорость флаттера  $U_{\phi} = 76,02$  м/с, ( $n = 5$ ). Параметр  $\mu_1$ , определяющий «темп» прохождения оболочкой соответствующих зон неустойчивости, принят равным:  $\mu_1 = 2,5$  м/с<sup>2</sup>. Интегрирование уравнений (8.1) проведено при начальных условиях  $w(0) = 0,34h$ ;  $\dot{w}(0) = 0$  (одновременно предполагалось  $x = l/4$ ;  $y = 0$ ). Точки  $A_0, A_1, A_2$  на обоих рисунках соответствуют полученным ранее (см. §2) критическим скоростям флаттера и дивергенции  $U_{\phi}, U_{\delta}^{(1)}, U_{\delta}^{(2)}$ , вычисленным по формулам (2.14) и (2.16), соответственно.

Из данных рис. 8.2 видно, что с увеличением скорости  $U$ , начиная с малых (докритических) значений ( $U < U_{\phi}$ ), прохождение дивергентной зоны (область  $A_1 A_2$ ) при



выбранном параметре ускорения  $\mu_1$  происходит без развития больших амплитуд прогиба  $w$ . С уменьшением  $\mu_1$  величина прогиба в этой зоне будет, соответственно, увеличиваться, и наоборот. В области  $A_2A_0$  сначала также наблюдается относительно медленное развитие амплитуд колебаний флаттерного типа, являющихся следствием влияния на процесс демпфирования. Одновременно происходит постепенное увеличение частоты нестационарных колебаний. При приближении к критической скорости  $U_\phi$  амплитуды колебаний оболочки резко возрастают, достигая при  $U > U_\phi$  за короткий промежуток времени достаточно больших значений. Этот процесс именуют иногда «бурным» или классическим флаттером [6, 11], в формировании которого принимают одновременно участие две взаимодействующие между собой доминирующие формы в аппроксимации (1.16), отвечающие обобщенным координатам  $f_1$  и  $f_3$ .

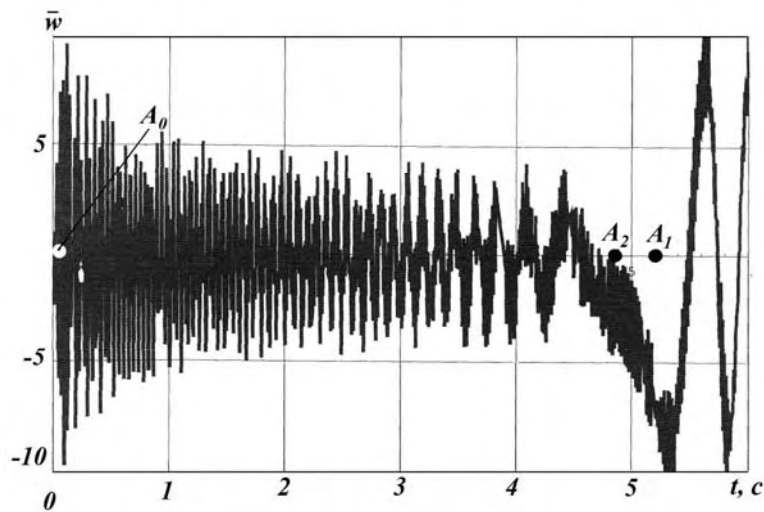


Рис. 8.3

Рис. 8.3 иллюстрирует нестационарный процесс обратного прохождения оболочкой областей неустойчивости. Как видно, этот процесс качественно отличается от изображенного на рис. 8.2. В области, расположенной между точками  $A_0$  и  $A_2$ , колебания оболочки имеют нерегулярный характер и лишь при  $U < U_\phi^{(1)}$  (скорости  $U_\phi^{(1)}$  отвечает точка  $A_1$ ) они преобразуются в колебания, близкие к гармоническим.

#### Заключение.

В настоящей статье приведены обзор и краткий анализ результатов теоретических исследований устойчивости и колебаний изотропных и композитных (ортотропная модель) цилиндрических оболочек конечной длины при взаимодействии с внутренним потоком жидкости. Сформулированы постановки различных линейных и нелинейных задач о потере устойчивости и закритическом деформировании несущих жидкость оболочек; построены общие и упрощенные расчетные модели, описывающие процессы взаимодействия оболочек с протекающей жидкостью. Предложены критерии, позволяющие устанавливать моменты наступления неустойчивости «квазистатического» (дивергентного) и динамического («флаттерного») видов. Проведен анализ влияния конструктивных особенностей жестко присоединенных к несущей оболочке масс и начальных несовершенств геометрического характера на потерю устойчивости. Рассмотрено влияние окружающей среды (внешнего статического давления) на значения критических скоростей движения жидкости, при которых реализуется потеря устойчивости. С использованием одночастотного асимптотического метода по-

строены решения разрешающих уравнений несущих оболочек, соответствующие их самовозбуждаемым и вынужденным колебаниям. Изучены особенности динамической потери устойчивости и закритического деформирования оболочек при взаимодействии с пульсирующим потоком жидкости. Рассмотрены некоторые задачи о нестационарных процессах медленного прохождения системы оболочка – протекающая жидкость через гармонический и параметрический резонансы.

Авторы выражают глубокую признательность кандидатам физико-математических наук, доцентам Л.А. Крук и Н.П. Подчасову, принимавшим участие в проведении совместных исследований по динамике и устойчивости оболочек, взаимодействующих с протекающей жидкостью, и что отражено в ряде публикаций [20, 24, 45 – 50, 56 – 58].

РЕЗЮМЕ. Наведено результати систематичних досліджень стійкості та нелінійних коливань тонких циліндричних оболонок при взаємодії з протікаючою рідиною. Розглянуто основні закономірності динамічного деформування оболонок при втраті стійкості типу дивергенція та флатер; проаналізовано вплив різного роду конструктивних особливостей: початкових недосконалостей геометричної форми, приєднаних зосереджених мас, крайових умов та поздовжніх і поперечних статичних навантажень на критичні швидкості дивергенції та флатеру; побудовано та досліджено на стійкість амплітудно-частотні характеристики даних оболонок при дії зовнішніх радіальних періодичних навантажень та внутрішнього періодичного тиску, зумовленого малими пульсаціями швидкості руху рідини. Запропоновано методика, з використанням якої розглянуто нелінійні задачі про нестационарні процеси проходження через резонансні області оболонок при взаємодії їх з рідинним потоком.

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г. Динамика ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1983. – 204 с.
3. Байков А.Е., Красильников П.С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // Прикл. математика и механика. – 2010. – 74, № 1. – С. 74 – 88.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
5. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
6. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
7. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
8. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
9. Ганиев Р.Ф., Ковальчук П.С. Динамика систем твердых и упругих тел. – М.: Машиностроение, 1980. – 208 с.
10. Горачек Я., Золотарев И.А. Влияние закрепления краев цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью на ее динамические характеристики // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 8. – С. 88 – 98.
11. Горачек Я., Золотарев И.А. Собственные колебания и устойчивость цилиндрических оболочек при взаимодействии с протекающей жидкостью // Динамика тел, взаимодействующих со средой / Под ред. акад. АН УССР А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1991. – С. 215 – 272.
12. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. – Л.: Судостроение, 1974. – 208 с.
13. Динамика элементов конструкций / Под ред. чл.-корр. НАН Украины В.Д. Кубенко. – К.: «АСК», 1999. – 379 с. (Механика композитов. В 12-ти томах. Т. 9).
14. Динамика тел, взаимодействующих со средой / Гузя А.Н., Маркуш Ш., Пуст Л. и др. / Под ред. А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1991. – 392 с.
15. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. – М.: Наука, 1991. – 196 с.
16. Ковальчук П.С. Нелинейные изгибные волны в ортотропных оболочках вращения (распространение и взаимодействие) // Динамика элементов конструкций / Под ред. В.Д. Кубенко. – К.: «АСК», – 1999. – С. 224 – 246. (Механика композитов: в 12-ти т., Т.9).
17. Ковальчук П.С., Ковтун С.С. Вимушені коливання циліндричних оболонок, що взаємодіють із пульсуючим потоком рідини // Наук. вісник націон. аграрного ун-ту. – 2007. – 112. – С. 65 – 71.
18. Ковальчук П.С., Ковтун С.С. Про розрахунок нестационарних процесів проходження через параметричний резонанс трубопроводу з протікаючою рідиною // Наук. вісник націон. аграрного ун-ту. – 2008. – 113. – С. 86 – 92.
19. Ковальчук П.С., Ковтун С.С., Пучка Г.Н. Про розрахунок стійкості циліндричних оболонок з приєднаною масою при взаємодії з рухомою рідиною // Наук. вісник націон. ун-ту біоресурсів та природокористування України. – 2009. – 137. – С. 55 – 60.

20. Ковальчук П.С., Крук Л.А. Анализ нелинейного взаимодействия изгибных форм композитных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 65 – 71.
21. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Бояршина Л.Г и др. Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость. – К.: Наук. думка, 1992. – 184 с.
22. Кубенко В. Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наук. думка, 1984. – 220 с.
23. Кубенко В. Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Вища шк., 1989. – 208 с.
24. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов М.П. Аналіз стійкості циліндричних оболонок при взаємодії з рухомою рідиною // Доп. НАН України. – 2010. – № 5. – С. 50 – 56.
25. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
26. Механика систем оболочка – жидкость – нагретый газ / Под ред. Н.А.Кильчевского. – К.: Наук. думка, 1970. – 328 с.
27. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. – 1951. – № 94. – С. 169 – 170.
28. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с.
29. Халфман Р. Динамика. – М.: Наука, 1972. – 568 с.
30. Amabili M. Nonlinear Vibration and Stability of Shells and Plates. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 402 p.
31. Amabili M. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach // J. of Sound and Vibr. – 2003. – **264**. – P. 1091 – 1125.
32. Amabili M., Paidoussis M.P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, N 4. – P. 349 – 381.
33. Amabili M., Pellicano F., Paidoussis M.P. Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Part I: Stability // J. of Sound and Vibr. – 1999. – **225**, N 4. – P. 655 – 699.
34. Amabili M., Pellicano F., Paidoussis M.P. Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Part II: Large amplitude vibrations without flow // J. of Sound and Vibr. – 1999. – **228**, N 5. – P. 1103 – 1124.
35. Amabili M., Pellicano F., Paidoussis M.P. Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Part III: Truncation effect without flow and experiments // J. of Sound and Vibr. – 2000. – **237**, N 4. – P. 617 – 640.
36. Amabili M., Pellicano F., Paidoussis M.P. Nonlinear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Part IV: Large amplitude vibrations with flow // J. of Sound and Vibr. – 2000. – **237**, N 4. – P. 641 – 666.
37. Amabili M., Pellicano F., Paidoussis M.P. Nonlinear stability of circular cylindrical shells in annual and unbounded axial flow // J. of Appl. Mech. – 2001. – **66**. – P. 827 – 834.
38. Chen S.S., Rosenberg C.E. Free vibrations of fluid-conveying cylindrical shells // Trans ASME, J. of Engineering for Industry. – 1974. – **96**. – P. 420 – 426.
39. Doedel E.J., Champneys A.R., Fairgrieve T.F., Kuznetsov Y.A., Sandstede B., Wang X. Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with Hom-Cont). – Canada: Concordia University Auto 97. – Montreal, 1998. – 157 p.
40. Dowell E.H., Hall K.C. Modeling of fluid structure interaction // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2001. – N 33. – P. 445 – 490.
41. Dzurjanov V.A., Lilkova-Markova S.V. Divergent Instability Domains of a Fluid-Conveying Cantilevered Pipe with a Combined Support the Moving and Rested on Combined Bearing // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 3. – P. 319 – 323.
42. Horachek J., Zolotarev I. Stability and bending wave propagation in a long cylindrical shell containing a flowing fluid ( in Czech) // Strojnický casopis. – 1981. – **32**, N 6. – P. 687 – 700.
43. Horachek J., Zolotarev I. Natural frequencies, damping and stability of a structurally damped cylindrical shell conveying fluid (in Czech) // Strojnický casopis. – 1983. – **34**, N 1 – 2. – P. 189 – 204.
44. Kovalchuk P.S. Nonlinear Vibrations of a Cylindrical Shells Containing a Flowing Fluid // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 4. – P. 405 – 412.
45. Kovalchuk P.S., Kruk L.A. Forced Nonlinear Oscillations of Cylindrical Shells Interacting with Fluid Flow // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 4. – P. 447 – 454.
46. Kovalchuk P.S., Kruk L.A. Nonlinear Parametric Vibrations of the Orthotropic Cylindrical Shells Interacting with a Pulsating Fluid Flow // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 9. – P. 1007 – 1015.

47. Kovalchuk P.S., Kruk L.A., Pelykh V.A. The Stability of Composite Cylindrical Shells with Added Mass in Fluid Flow // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 5. – P. 101 – 110.
48. Kovalchuk P.S., Kruk L.A., Pelykh V.A. The Stability of Composite Cylindrical Shells with Different Boundary Conditions // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 6. – P. 670 – 678.
49. Kovalchuk P.S., Podchasov N.P. Influence of Initial Deflections on the Stability of Composite Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 8. – P. 902 – 911.
50. Kovalchuk P.S., Podchasov N.P. On Stability of Elastic Cylindrical Shells Interacting with Flowing Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 1. – P. 73 – 82.
51. Kovalchuk P.S., Puchka G. N. Stability of Cylindrical Shells with Added Mass in Fluid Flow // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 5. – P. 546 – 555.
52. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S. Nonlinear Problems of the Cylindrical Shells (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 8. – P. 703 – 728.
53. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S. Nonlinear Problems of the Dynamics of Elastic Shells Partially Filled with a Liquid // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 4. – P. 421 – 448.
54. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S. Modelling Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 4. – P. 353 – 364.
55. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Kruk L.A. Nonlinear interaction of bending deformation of free oscillating cylindrical shells // *J. of Sound and Vibr.* – 2003. – N 265. – P. 245 – 268.
56. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Kruk L.A. Application of the asymptotic methods for investigation of the one-frequency nonlinear vibrations of the cylindrical shells, containing a flowing fluid // *Ukr. Math. J.* – 2007. – **59**, N 4. – P. 476 – 487.
57. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Kruk L.A. Influence of External Loading on the Stability of a Fluid-Conveying Pipeline // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 636 – 644.
58. Kubenko V. D., Kovalchuk P.S., Podchasov N.P. Analysis of Non-Stationary Processes in Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 10. – P. 1119 – 1131.
59. Lakis A.A., Laveau A. Non-linear dynamic analysis of anisotropic cylindrical shells containing a flowing fluid // *Int. J. of Solids and Struct.* – 1991. – **28**. – P. 1079 – 1094.
60. Matsuzaki Y., Fung Y. C. Unsteady fluid dynamic forces on a simply-supported circular cylinder of finite length conveying a flow, with applications to stability analysis // *J. of Sound and Vibr.* – 1977. – **54**. – P. 317 – 330.
61. Nguyem V.B., Paidoussis M.P., Misra A.K. An experimental study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // *J. Fluid. Struct.* – 1993. – N 7. – P. 913 – 930.
62. Paidoussis M.P. *Fluid Structure Interaction. Slender Structures and Axial Flow.* **2**. – London: Elsevier Academic Press, 2004.
63. Paidoussis M.P., Chan S.P., Misra A.K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid // *J. Sound. Vibr.* – 1984. – 97. – P. 201 – 235.
64. Paidoussis M.P., Misra A.K., Nguyem V.B. A CFD - based model for the study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid // *J. Sound. Vibr.* – 1994. – **176**. – P. 105 – 235.
65. Paidoussis M.P., Nguyem V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // *J. Fluid. Struct.* – 1991. – N 5. – P. 127 – 164.
66. Pellicano F., Amabili M. Stability and vibration of empty and fluid-filled circular cylindrical shells under static and periodic axial loads // *Int. J. of Solids and Structures.* – 2003. – **40**. – P. 3229 – 3251.
67. Pellicano F, Mikhlin Y., Zolotarev I. Nonlinear dynamics of shells with fluid structure interaction containing flowing fluid // *Publ. Inst. of Thermomechanics AS CR, Prague.* – 2002.
68. Selmane A., Lakis A.A. Non-linear dynamic analysis of orthotropic cylindrical shells subjected to a flowing fluid // *J. of Sound and Vibr.* – 1997. – N 202. – P. 67 – 93.
69. Wearer D.S., Unny T. E. On the Dynamic Stability Domains of Fluid – Conveying Pipes with a Combined Support the Moving and Rested on Combined Bearing // *Trans ASME, J. of Applied Mech.* – 1973. – **40**, N 3. – P. 48 – 52.
70. Zolotarev I. Natural vibrations of cylindrical shell conveying fluid with spring supported ends (in Czech) // *Strojnický časopis.* – 1987. – **38**, N 5. – P. 533 – 550.

Поступила 24.01.2014

Утверждена в печать 30.09.2014