

А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИИ В ОДНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua

Abstract. The instability of the zeroth solution is observed for the general case. Within the qualitative analysis, the existence of a plane attractor and bifurcations of trajectory in the Rikitaki model is established. An analytical solution is shown in coordinates associated with the plane.

Key words: two-disk dynamo model, bifurcation, nonlinear monotonic systems, chaos.

Динамические состояния, описывающие сложные процессы, совершенствуются по двум направлениям: усложнение моделирования процесса [5]; углубление анализа сложных движений [13, 14]. Методы качественной теории нелинейной механики берут свое начало в работах Пуанкаре, Андронова и получили развитие в ряде современных работ [6, 7, 13, 14 и др.]. Данная работа связана с проблемой классификации физических объектов, порождающих многомерные аттракторы, а также с анализом простых и сложных движений многомерных систем, которые вызываются бифуркационным процессом и неустойчивостью орбит [9, 10]. Прикладная задача, которая рассмотрена в работе, относится к базовым моделям в теории земного динамо [12].

§1. Предварительные сведения.

Палеомагнитные исследования показали, что магнитное поле Земли претерпевает изменение направления (полярности) на обратное. В течение последних сотен миллионов лет смена направления происходит нерегулярным образом. Помимо подробной магнитогидродинамической модели построены простые модели. Базовой моделью в теории земного динамо является модель Рикитакки [12]. Эта модель описывает систему из двух дисков динамо, соединенных как показано на рис. 1. Диски этой модели могут рассматриваться как имитация двух больших вихрей в ядре Земли. Рассмотрим возбуждения полей в двух дисках.

Ток I_1 вызывает магнитное поле, в котором второй диск индуцирует ток I_2 . Этот ток в свою очередь вызывает поле, в котором первый диск индуцирует ток I_1 . Нелинейность возникает при учете обратной реакции момента электромагнитной силы на движение, т.е. на угловые скорости Ω_1 и Ω_2 .

Согласно законам механики и электродинамики система уравнений имеет вид

$$L \frac{dI_1}{d\tau} + RI_1 = MI_2\Omega_1; \quad L \frac{dI_2}{d\tau} + RI_2 = MI_1\Omega_2, \quad (1)$$

где L – индуктивность дисков; R – сопротивление контуров; M – взаимная индуктивность между контуром и диском. Систему (1) называют уравнениями динамо. Система

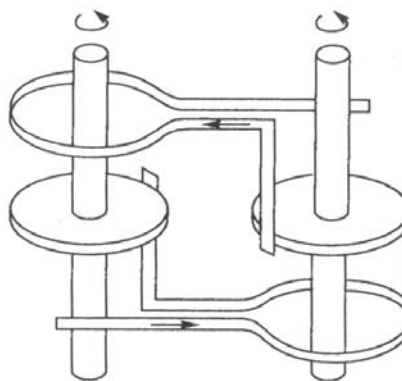


Рис. 1

$$J \frac{d\Omega_1}{d\tau} = G - MI_1 I_2; \quad J \frac{d\Omega_2}{d\tau} = G - MI_1 I_2, \quad (2)$$

где J – момент инерции дисков; G – момент внешних сил, описывает обратную реакцию электромагнитных сил на движение.

Введем безразмерные переменные, следуя Рикитаки [2], x_1, x_2, x_3, x_4, t :

$$I_1 = x_1 \sqrt{G/M}; \quad I_2 = x_2 \sqrt{G/M}; \quad \Omega_1 = x_3 \sqrt{(GL)/(JM)}; \quad \Omega_2 = x_4 \sqrt{(GL)/(JM)};$$

$$\tau = t \sqrt{(JL)/(MG)}.$$

Системы (1), (2) в безразмерном виде запишем так:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\mu x_1 + x_2 x_3; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\mu x_2 + x_1 x_4; \quad \frac{dx_3}{dt} = 1 - x_1 x_2; \quad \frac{dx_4}{dt} = 1 - x_1 x_2. \quad (3)$$

Здесь $\mu = R\sqrt{J/(GLM)}$ – коэффициент омической диссипации. Из системы (3) следует, что разность угловых скоростей есть величина постоянная ($x_3 - x_4 = a$, где $a = \text{const}$). Предположим, что $a \neq 0$, тогда $x_4 = x_3 - a$. Находим значения координат особых точек системы (3) из системы уравнений

$$-\mu x_1 + x_2 x_3 = 0; \quad -\mu x_2 + x_1 (x_3 - a) = 0; \quad 1 - x_1 x_2 = 0.$$

Квадрат значения координаты x_1 обозначим v и находим $v = a / (2\mu) + \sqrt{a^2 / (2\mu)^2 + 1}$ из уравнения

$$v^2 - av / \mu - 1 = 0. \quad (4)$$

Имеют место две особые точки: $A(\sqrt{v}, 1/\sqrt{v}, \mu v)$, $B(-\sqrt{v}, -1/\sqrt{v}, \mu v)$.

Введем систему координат, связанную с точкой A : $x = x_1 - \sqrt{v}$, $y = x_2 - 1/\sqrt{v}$, $z = x_3 - \mu v$, и запишем уравнения движения относительно точки A (при составлении уравнений применяется равенство (4))

$$\frac{dx}{dt} = -\mu x + \mu v y + \frac{z}{\sqrt{v}} + yz; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\mu x}{v} - \mu y + \sqrt{v} z + xz; \quad (5)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{v}} - \sqrt{v} y - xy.$$

Введем малые отклонения $\delta x, \delta y, \delta z$ в системе (5) от частных решений $\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)$ и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = -\mu \delta x + (\mu v + \bar{z}) \delta y + \left(\frac{1}{\sqrt{v}} + \bar{y} \right) \delta z; \quad \frac{d\delta y}{dt} = \left(\frac{\mu}{v} + \bar{z} \right) \delta x - \mu \delta y + (\sqrt{v} + \bar{x}) \delta z;$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = -\left(\frac{1}{\sqrt{v}} + \bar{y} \right) \delta x - (\sqrt{v} + \bar{x}) \delta y.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнениям в вариациях, имеет вид

$$\lambda^3 + 2\mu\lambda^2 + \lambda \left(\mu^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{v}} + \bar{y} \right)^2 + (\sqrt{v} + \bar{x})^2 - \left(\frac{\mu}{v} + \bar{z} \right) (\mu v + \bar{z}) \right) +$$

$$+ (\sqrt{v} + \bar{x}) \left(\frac{1}{\sqrt{v}} + \bar{y} \right) \left(\mu \left(v + \frac{1}{v} \right) + 2\bar{z} \right) + \mu \left((\sqrt{v} + \bar{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{v}} + \bar{y} \right)^2 \right) = 0.$$

С помощью этого уравнения определим характер особых точек. Точка A и точка B (узел – центры) при значениях параметров $(\mu, a) = (1; 1)$ имеют характеристические показатели $\lambda_{1,2} = \pm 1,4953i$; $\lambda_3 = -2$, а при значениях параметров $(\mu, a) = (1; 2)$ – $\lambda_{1,2} = \pm 1,6817i$; $\lambda_3 = -2$, соответственно.

§2. Переход к новым переменным. Анализ решения при $a = 0$.

Введем новые оси координат Au, Av поворотом старых Ax, Ay на угол $\alpha = \arctg(1/\nu)$. Новые координаты связаны со старыми следующими соотношениями:

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

В системе координат $Auvz$ уравнения (5) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\mu(\nu^4 - 1)}{\nu(\nu^2 + 1)}v + \frac{2\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu^2 + 1}}z + \frac{2\nu}{\nu^2 + 1}uz + \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 1}vz; \\ \frac{dv}{dt} &= -2\mu\nu + \frac{\nu^2 - 1}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu^2 + 1}}z + \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 1}uz - \frac{2\nu}{\nu^2 + 1}vz; \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{2\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu^2 + 1}}u - \frac{(\nu^2 - 1)}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu^2 + 1}}v - \frac{(\nu^2 - 1)}{\nu^2 + 1}uv - \frac{\nu}{\nu^2 + 1}u^2 + \frac{\nu}{\nu^2 + 1}v^2. \end{aligned} \quad (6)$$

При $a = 0$ ($\nu = 1$) уравнения (6) перепишем так:

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{2}z + uz; \quad \frac{dv}{dt} = -2\mu\nu - vz; \quad \frac{dz}{dt} = -\sqrt{2}u - u^2/2 + v^2/2 \quad (7)$$

$$\text{или} \quad \frac{du}{dt} = F_u; \quad \frac{dv}{dt} = F_v; \quad \frac{dz}{dt} = F_z, \quad (8)$$

где F_u, F_v, F_z – правые части уравнений (7). Проанализируем выполнение в трехмерной системе (8) условий замыкания траекторий в плоскости Auz . Для этого привлечем принцип симметрии [3, 11].

На плоскости Auz выполняются условия четности функции $F_z(u, z)$ относительно z и нечетности функции $F_u(u, z)$ относительно z (в плоскости Auz имеет место $F_z(u, z) = -\sqrt{2}u$, $F_u(u, z) = \sqrt{2}z + uz$), т.е. $F_u(u, -z) = -F_u(u, z)$, $F_z(u, -z) = F_z(u, z)$. Тогда в системе (7) на плоскости Auz существует замкнутая кривая и ось Au является осью симметрии.

Первое уравнение системы (7) не содержит в правой части переменную v , второе уравнение не содержит переменную u . Второе и третье уравнения системы (7) связаны лишь нелинейными составляющими. При такой характеристике правых частей системы (7) замкнутые траектории системы (7) располагаются в плоскости Auz . Таким образом, замкнутая траектория в трехмерном пространстве $Axyz$ проецируется на плоскость Axy в виде отрезка прямой под углом $\pi/4$ к оси Ax .

Введем малые отклонения $\delta u, \delta v, \delta z$ в системе (8) от частных решений $\bar{u}(t), \bar{v}(t), \bar{z}(t)$ и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta u}{dt} = \bar{z}\delta u + (\sqrt{2} + \bar{u})\delta z; \quad \frac{d\delta v}{dt} = -(2\mu + \bar{z})\delta v - \bar{v}\delta z; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -(\sqrt{2} + \bar{u})\delta u + \bar{v}\delta v. \quad (9)$$

Так как траектория располагается в плоскости Auz , то $\bar{v} = 0$. Характеристическое уравнение системы в вариациях (9) имеет вид

$$\lambda^3 + 2\mu\lambda^2 + \lambda((\bar{u} + \sqrt{2})^2 - 2\mu\bar{z} - \bar{z}^2) + (2\mu + \bar{z})(\bar{u} + \sqrt{2})^2 = 0, \quad (10)$$

где учтено, что $\bar{v} = 0$.

Приведем анализ качества точек замкнутой кривой, построенной численным способом. В системе координат $Oxyz$, Auz замкнутые кривые не содержат точку C . Наиболее отдаленные от особых точек замкнутые кривые (рис. 2, a , b – сплошная линия) определяют две области многообразия устойчивых траекторий. Между двумя замкнутыми кривыми проходит одна ось Cz . На уровне физических представлений: *точка C не может принадлежать двум замкнутым траекториям.*

С помощью уравнения (10) находим точки, в которых изменяется качество корней. На кривой от точки, близкой к C , до точки 1 (не включая точек на концах отрезка) по ходу часовой стрелки имеют место действительные корни (рис. 2, b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$. В точке 1 происходит исчезновение двух кратных действительных корней и рождение двух комплексных корней ($\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$). Внутри траектории от точки 1 до точки 2 имеют место пара комплексных корней с положительной действительной частью и действительный корень $\lambda_3 < 0$. В точке 2 происходит смена знака действительной части с плюса на минус. Далее внутри отрезка кривой 2 – 3 комплексные корни имеют отрицательный знак действительной части. В точке 3 происходит исчезновение комплексных корней и рождение двух действительных. В точке 4 наблюдается исчезновение корня $\lambda_3 < 0$ и рождение корня $\lambda_3 > 0$.

Для всего многообразия замкнутых траекторий (на рис. 2, b замкнутые траектории показаны также штриховой линией) существует подобная симметрия, с помощью которой доказывается замыкание траекторий.

Рассмотрим, например, уравнения в вариациях в плоскости движения Auz

$$\frac{d\delta u}{dt} = \bar{z}\delta u + (\sqrt{2} + \bar{u})\delta z; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -(\sqrt{2} + \bar{u})\delta u,$$

характеристическое уравнение которых имеет вид $\lambda^2 - \lambda\bar{z} + (\sqrt{2} + \bar{u})^2 = 0$. Приравняем подкоренное выражение нулю в формуле

$$\lambda_{1,2} = \bar{z}/2 \pm \sqrt{(\bar{z}/2)^2 - (\sqrt{2} + \bar{u})^2}.$$

Построим линии на плоскости Auz , которые, пересекаясь с замкнутыми кривыми, выделяют точки на замкнутых кривых, в которых происходит создание (точка 1) либо исчезновение (точка 3) двух комплексных корней. На рис. 2, c приведены пунктирные линии $z = \pm 2(\sqrt{2} + u)$. При симметрии сигнатура двух характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ) имеет вид двух нулей. Распространение симметрии на корни уравнения (10) формирует ХПЛ. Геометрическая симметрия фазовых

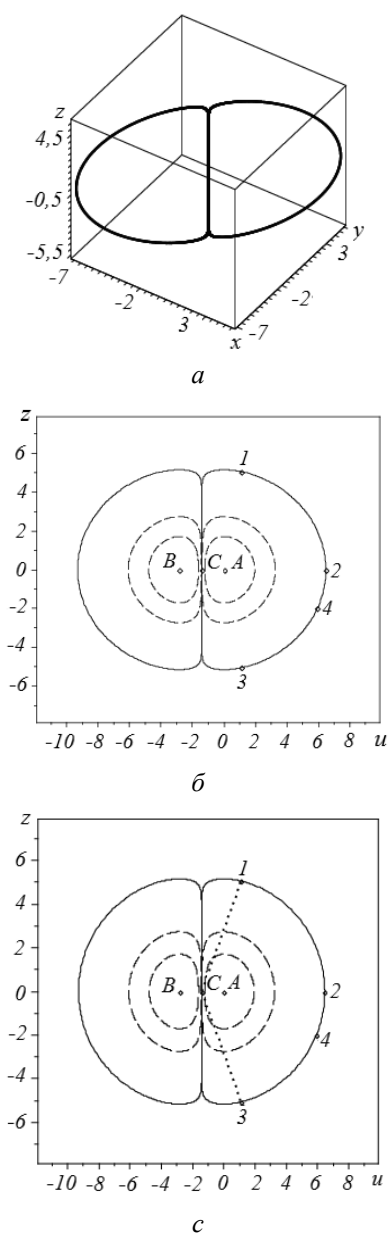


Рис. 2

траекторий системы (8) такая, что каждой точке области сверху (относительно оси Au) соответствует точка внизу области. При анализе корней уравнения (10) на круговой траектории имеем следующую картину. Корни λ_1, λ_2 определяют в сигнатуре спектра ХПЛ два первых знака $(0, 0)$, что соответствует *эллиптической составляющей движения*. Корень λ_3 определит притягивающий характер траекторий и связан преимущественно с координатой v . Сигнатура спектра ХПЛ замкнутых кривых имеет вид $(0, 0, -)$. Таким образом, геометрическая симметрия траекторий, симметрия распределения корней позволили установить орбитальную устойчивость и притягивающий характер замкнутых траекторий. Линейная система, соответствующая системе (8), распадается, так что первое и третье уравнения определяют точку A как центр $du/dt = \sqrt{2}z, z/dt = -\sqrt{2}u$. Второе уравнение $dv/dt = -2\mu v$ определяет притягивающий характер точки A , делая ее узел-центром.

Составим таблицы, из которых становится очевидным симметрия кривой. В табл. 1 приведены корни $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, координаты (u, z) в двух точках траектории. В первой строке приведены данные точки, которая предшествует точке 1, другая следует за точкой 1 (рис. 2, б). Обе – на расстоянии одного шага от точки 1.

Таблица 1

| λ_1 | λ_2 | λ_3 | u | Z |
|----------------|----------------|-------------|--------|--------|
| 2,5069 | 2,5560 | -7,0629 | 1,1171 | 5,0629 |
| 2,5314+0,0101I | 2,5314-0,0101I | -7,0629 | 1,1173 | 5,0629 |

В табл. 2 приведены корни уравнения (10) при подходе к точке 2 $(-\Delta)$, в точке 2 и в точке на расстоянии шага Δ от точки 2. Просматривается симметрия корней.

Таблица 2

| $\pm \Delta$, т. 2 | λ_1 | λ_2 | λ_3 | u | Z |
|---------------------|-----------------|-------------------|-------------|--------|---------|
| $-\Delta$ | 0,0003+7,8880I | 0,0003 - 78880I | -2 | 6,4738 | 0,0006 |
| Точка 2 | 7,8880I | -7,8880I | -2 | 6,4738 | 0 |
| $+\Delta$ | -0,0003+7,8880I | -0,0003 - 7,8880I | -2 | 6,4738 | -0,0006 |

В табл. 3 приведены корни $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, координаты (u, z) в двух точках. В первой строке приведены данные точки, которая предшествует точке 3, другая следует за точкой 3. Обе на расстоянии одного шага от точки 3. Корни $\lambda_{1,2}$ на участке 1–2 равны по модулю и противоположны по знаку действительной части корням на участке 2–3.

Таблица 3

| λ_1 | λ_2 | λ_3 | u | Z |
|-----------------|------------------|-------------|--------|---------|
| -2,5314+0,0045I | -2,5314-0,0045 I | 3,0629 | 1,1174 | -5,0629 |
| -2,5067 | -2,5562 | 3,0629 | 1,1171 | -5,0629 |

Аналитическое решение. Введем координату $w = u + \sqrt{2}z$ и запишем уравнения (7) в системе координат $Cwvz$

$$\frac{dw}{dt} = wz; \quad \frac{dv}{dt} = -2\mu v - vz; \quad \frac{dz}{dt} = 1 - w^2/2 + v^2/2. \quad (11)$$

Покажем на рис. 3, а пунктиром замкнутые кривые, построенные численно, которым в начальный момент времени соответствуют следующие значения координат: $w(0) = 0,000001$;

$v(0) = 0; z(0) = 0$ и $w(0) = -0,000001; v(0) = 0; z(0) = 0$. В общем случае не известно аналитическое решение уравнений (3). Единственная ситуация $-\mu = 0, a = 0$, в которой известно точное решение [1].

Так как доказано, что траектория лежит в плоскости Auz , также в плоскости Cwz и $\bar{v} = 0$, то аттрактору могут соответствовать два уравнения

$$\frac{dw}{dt} = wz; \quad \frac{dz}{dt} = 1 - w^2 / 2. \quad (12)$$

Исключив время, разделим переменные в системе (12), имеем

$$z^2 = 2 \ln |w| - w^2 / 2 + D, \quad (13)$$

где D – постоянная интегрирования.

Предположим, что движение начинается с точки C . Определим D из следующих условий:

$$w(0) = 0; \quad z(0) = 0. \quad (14)$$

Полученный результат $-D = \infty$ подтверждает физическое представление: точка C не может принадлежать двум замкнутым траекториям. В данном случае система (12) показывает границу аттрактора

$$z = \pm \sqrt{2 \ln |w| - w^2 / 2 + D}, \quad (15)$$

где $D = -2 \ln |w(0)| + w(0)^2 / 2$, для начальных условий $0 < w(0) \leq w_k; z(0) = 0$, где w_k – конечное значение. Решение (15) можно назвать точным, однако, при начальных условиях (14) имеем $z^2 \rightarrow \infty$, а не $z \rightarrow \infty$. Последнее показывает численное решение. Причина состоит в том, что система (12) является упрощенной и игнорирование уравнения относительно v в системе (12) не позволяет вычислить все интегралы системы (11). На рис. 3, *a* показано численное решение с начальными условиями (14). На численное решение (рис. 3, *a*) наложено аналитическое решение (15), которое при $t = 0$ имеет следующие значения координат: $w(0) = 0,000001; z(0) = 0$. Все это показано на рис. 3, *б*.

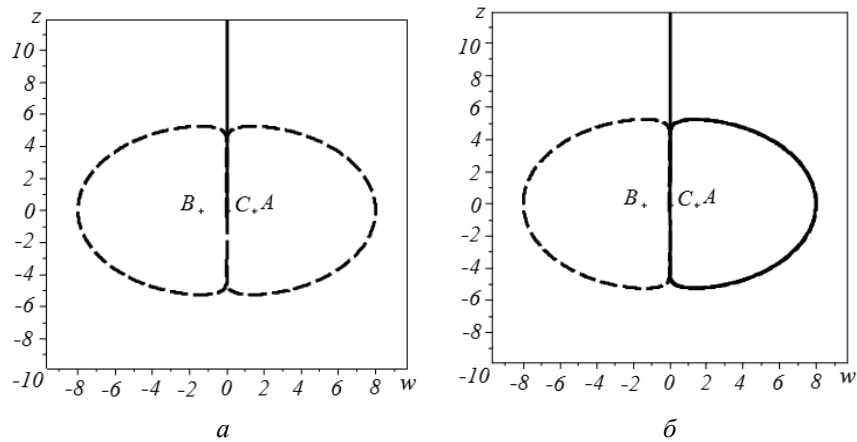


Рис. 3

При переходе к упрощенной системе (12) получено аналитическое решение (15), несмотря на диссипацию. Произошло разделение характеристических показателей: два показателя связаны с границей аттрактора и порождают сигнатуру спектра $(0, 0)$; третий – с диссипацией и определяет притяжение к плоскости аттрактора $(0, 0, -)$. Кроме замкнутых траекторий, существует решение, уходящее на бесконечность. Упрощенная система показывает тенденцию ухода на бесконечность, но не показывает знак бесконечности.

Подставим в характеристическое уравнение (10) $\bar{u} = \bar{w} - \sqrt{2}$ и примем $\bar{w} = 0$, тогда на оси Cz характеристические показатели вычисляются так:

$$\lambda_1 = 0; \lambda_{2,3} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 + \bar{z}(2\mu + \bar{z})}. \quad (16)$$

Один характеристический показатель ($\lambda_3 < 0$), согласно (16), на всей оси Cz показывает притяжение траектории. Начальные условия (14) порождают решение, которое, попадая на ось Cz в точку C , уходит на ∞ , т.к. для $z > 0$ имеет место $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, причем геометрически λ_3 соответствует притяжению к оси Cz , которое направлено вдоль оси Cv .

Неустойчивость орбиты аттрактора. На рис. 3, б замкнутые траектории относительно особых точек A и B ограничивают области многообразий замкнутых траекторий. Эти области разделяются осью Cz . Если начальное положение траектории находится не в точке C и вне областей многообразий правой и левой полуплоскости, то система обладает избытком энергии. Изображающая точка при избытке энергии стремится, преодолевая ось Cz , совершить переход из одной области устойчивых движений в другую. В двух точках на оси Cz (с координатами $z = -2, z = 0$) характеристические показатели, согласно (16), имеют вид

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = -2. \quad (17)$$

Возможно, что через две точки (17) на Cz траектория переходит из одной полуплоскости в другую, если система обладает избыточной энергией.

Стохастика движения при этом возникает из-за того, что существует не один путь перехода из области в область. Если бы путь перехода был один, то через некоторый отрезок времени (переходный период) траектория замкнулась относительно двух узел-центров A и B , образуя устойчивую орбиту движения.

На рис. 4 приведен фрагмент орбитально неустойчивой траектории системы (11) (начальные возмущения $w(0) = 8,8$; $v(0) = 0$; $z(0) = 0$). В сигнатуре спектра ХПЛ появляется знак плюс $(+, 0, -)$.

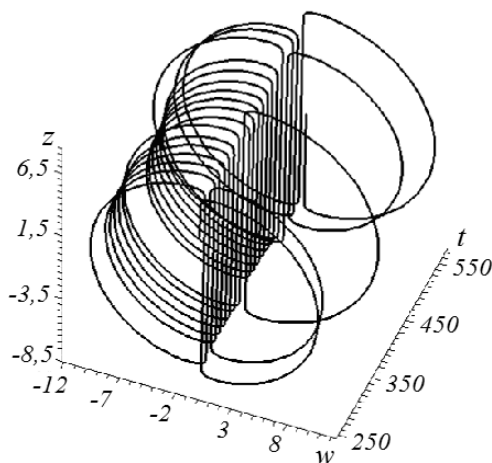


Рис. 4

§3. О неустойчивости нулевого решения при $a \neq 0$.

При исследовании динамических систем важной характеристикой служат ХПЛ. Определение сигнатуры спектра ХПЛ по экспериментальным данным (методика разработана в середине прошлого столетия) можно отнести к техническим способам анализа. Разумеется, в многомерных системах технический подход приемлем. Однако, вопрос систематизации сложных движений в трехмерных системах связан с качественным анализом, результаты которого отражают особенности движения.

Установить неустойчивость нулевого решения можно на основе принципа сравнения – наиболее мощного результата качественной теории уравнений. Принцип сравнения включает составление уравнений сравнения (уравнений вида Важевского), для которых существует критерий неустойчивости нулевого решения. Укажем работу [2] и обзор [8], в котором приведены основные источники и результаты теории монотонных систем.

Введем функции $V_1 = x^2/2$, $V_2 = y^2/2$, $V_3 = z^2/2$. Производные функций $V_j (j = 1, 2, 3)$ в силу системы (5) допускают оценки

$$\begin{aligned}
x \frac{dx}{dt} &= -\mu x^2 + \mu v xy + \frac{xz}{\sqrt{v}} + xyz \leq -\mu x^2 + \mu v \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2\sqrt{v}} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2 z^2}{2}; \\
y \frac{dy}{dt} &= \frac{\mu xy}{v} - \mu y^2 + \sqrt{v} yz + xyz \leq \mu \frac{(x^2 + y^2)}{2v} - \mu y^2 + \frac{\sqrt{v}(y^2 + z^2)}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 z^2}{2}; \\
z \frac{dz}{dt} &= -\frac{xz}{\sqrt{v}} - \sqrt{v} yz - xyz \leq \frac{(x^2 + z^2)}{2\sqrt{v}} + \frac{\sqrt{v}(y^2 + z^2)}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{2}.
\end{aligned} \tag{18}$$

В системе (18) произведения двух переменных xy, yz, xz заменены на сумму квадратов, например, $\pm xz \leq x^2/2 + z^2/2$. Также представлены $\pm xyz \leq x^2/2 + y^2 z^2/2$. Запишем систему

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt} &= (\mu(v-2) + (\sqrt{v})^{-1} + 1)V_1 + \mu v V_2 + (\sqrt{v})^{-1} V_3 + 2V_2 V_3; \\
\frac{dV_2}{dt} &= \frac{\mu}{v} V_1 + (\mu((v)^{-1} - 2) + \sqrt{v} + 1)V_2 + \sqrt{v} V_3 + 2V_1 V_3; \\
\frac{dV_3}{dt} &= (\sqrt{v})^{-1} V_1 + \sqrt{v} V_2 + ((\sqrt{v})^{-1} + \sqrt{v} + 1)V_3 + 2V_1 V_2.
\end{aligned} \tag{19}$$

В системе (19) справа – функции, которые соответствуют уравнениям сравнения

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = q(\mathcal{G}), \tag{20}$$

где $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_3)^T$, векторная функция $q(\mathcal{G})$ определена и непрерывна в области $G = \{\mathcal{G} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathcal{G}\| < H\}, 0 < H < +\infty$.

Предположим, что система (20) обладает следующими свойствами.

1. Через каждую точку области G проходит единственное решение.
2. Система (20) является системой Важевского, т.е. компоненты вектор-функции $q(\mathcal{G})$ являются квазимоноotonно возрастающими функциями. Для квазимонотонного возрастания функции $q(\mathcal{G})$ необходимо и достаточно выполнения условий $\partial q_j / \partial \mathcal{G}_i \geq 0$ при $j \neq i$.
3. Существует последовательность точек $\mathcal{G}_m \in K$, $\mathcal{G}_m \rightarrow 0$, при $m \rightarrow \infty$ такая, что для каждого m выполняются неравенства

$$q_j(\mathcal{G}) \geq 0 \quad (j=1, \dots, 3), \tag{21}$$

причем хотя бы для одного j неравенство строгое и найдется окрестность нуля такая, что на множестве $K_{\mathcal{G}_m} \cap G$ векторное поле $q(\mathcal{G})$ не равно нулю, тогда нулевое решение системы (20) – неустойчиво в конусе K [2, 8].

Неустойчивость системы сравнения (19) влечет за собой неустойчивость системы (5). При значениях параметров: $(\mu, a=1;1)$ и $(\mu, a=1;2)$ для системы сравнения выполняются условия (21). Особые точки A, B (устойчивые узел – центры) имеют определенную симметрию в фазовом пространстве и в случае устойчивости нулевого решения образуют симметричные многообразия притягивающих траекторий как при $a=0$. При $a \neq 0$ и указанных значениях пара-

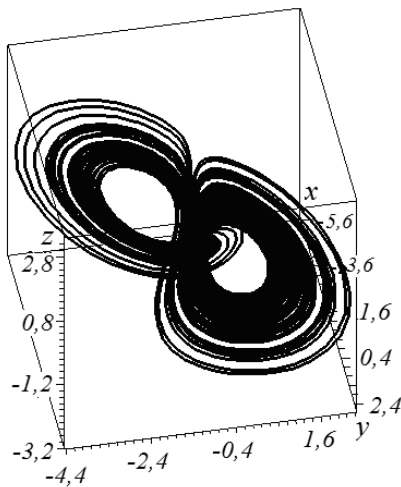


Рис. 5

метров, вследствие неустойчивости нулевого решения, траектория переносится из области в окрестности особой точки A в область в окрестности особой точки B . Смена орбит вызывает появление знака плюс в сигнатуре спектра ХПП [7]. При $a \neq 0$ предполагается, что не существует $q_j(\mathcal{S}) = 0$. Осуществлена проверка на основе численного эксперимента. На рис. 5 приведена орбитально неустойчивая траектория, которая имеет следующие параметры и начальные условия: $(\mu, a, x(0), y(0), z(0)) = (1; 1; 0, 7; 0, 7; 0)$.

Замечание по поводу системы Рикитаки. Система Рикитаки обладает интегралом движения. Различные интегралы движения соответствуют различным установившимся движениям [1, 12]. Система Рикитаки имеет неограниченное решение $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 + a = t$, а также при $a = 0$. Обобщенная модель [4], учитывающая трение и несимметрию системы, не имеет этих недостатков.

§4. Заключение.

В работе рассмотрены два случая возникновения странных колебаний в модели земного динамо. В обоих случаях особые точки – устойчивые узел – центры. В первом случае ($a = 0$) наряду с многообразием замкнутых кривых существуют странные кривые. Неустойчивость орбит связана с избытком энергии, который вынуждает траекторию менять орбиту движения.

Для более общего случая ($a \neq 0$) странный аттрактор возникает при малом начальном возмущении. Установлена неустойчивость нулевого решения системы сравнения, которая приводит к орбитальной потере устойчивости.

Теорема о неустойчивости системы сравнения [3, 4, 9] применяется здесь для установления потери устойчивости орбиты при возникновении сложных колебаний.

РЕЗЮМЕ. Для загального випадку ($a \neq 0$) встановлено нестійкість нульового розв'язку. У рамках якісного аналізу встановлено існування плоского атратора ($a = 0$) та біфуркації траєкторії у моделі Рікітакі. У координатах, зв'язаних з площиною, наведено аналітичний розв'язок.

1. Куж А., Робертс П. Система двухдискового динамо Рикитаки. В кн.: Странные аттракторы. – М.: Мир, 1981. – С. 164 – 292.
2. Мартынюк А.А., Оболенский А.Ю. Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. – 1980. – 16, N 8. – С. 1392 – 1407.
3. Никитина Н.В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – К.: Феникс, 2012. – 235 с.
4. Потанов В.И. Визуализация фазовых траекторий динамической системы Рикитаки // Нелинейная динамика – 2010. – 6, N2. – С. 255 – 265.
5. Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Borshch E.I. Self-Excited Vibrations of a Drillstring Bit // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 3. – P. 350 – 359.
6. Guckenheimer J., Holmes Ph. Nonlinear Oscillation, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. – N.Y.:Springer-Verlag, 1983. – 560 p.
7. Leonov G.A. Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St. Peterburg: St. Peterburg University Press, 2008. – 160 p.
8. Martynuk A.A. Asymptotic Stability Criterion for Nonlinear Monotonic Systems and Its Applications (Review) // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 5. – P. 475 – 534.
9. Martynuk A.A., Nikitina N.V. Bifurcation Processes Periodically Perturbed Systems // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 1. – P. 103 – 113.
10. Nikitina N.V. Compound Motion of Conservative Systems under Periodic Perturbation // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 3. – P. 344 – 349.
11. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equations. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. – 550 p.
12. Rikitake T. Oscillations of a System of Disk Dynamos // Proc. Camdr. Philos. Soc. – 1958. – 54 – P. 89 – 105.
13. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore: World Scientific, 1998. – 416 с.
14. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore: World Scientific, 2001. – 592 p.

Поступила 28.03.2012

Утверждена в печать 29.05.2014