

**В. А. Крысько, Т. В. Яковлева, В. В. Добрян, И. В. Папкина**  
**ХАОТИЧЕСКАЯ синхронизация колебаний многослойных**  
**МЕХАНИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА БАЗЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА**

*ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.», ул. Политехническая, 77, 410054, Саратов, Россия,  
e-mail: yan-tan1987@mail.ru*

**Abstract.** The chaotic synchronization of vibrations of contacting multilayer beam-plate-shell constructions is studied under action of external loading. These constructions have gaps between the layers. A behavior of these systems is studied fully. The parameters of influence are exposed, which characterize the safe and risky regimes. A technique is developed to study the chaotic phase synchronization of different nature. Four different types of two-layer structures are analyzed.

**Key words:** multilayer beam-plate-shell constructions, chaotic synchronization of vibrations, two-layer structures.

**Введение.**

Балки, пластинки и оболочки являются широко распространенным элементом сложных конструкций и различных машин, особенно широко встречаются в инженерных конструкциях. Динамическое нагружение таких элементов – одна из базовых задач расчета поведения всей конструкции. Особый интерес представляет зависимость динамического режима колебаний от параметров внешнего нагружения и дисперсионных свойств среды. Задачи расчета подобных конструкций привели к необходимости построения и исследования их математических моделей [19 – 20]. Моделирование колебаний указанных выше систем и их соединений под действием поперечных нагрузок различной природы является одной из актуальных задач современной механики и прикладной математики [7 – 8, 13 – 17]. Чрезвычайно важным является вопрос о нелинейной динамике пластин и оболочек с учетом диссипации энергии под воздействием знакопеременных нагрузок и изучение поведения таких систем в состоянии хаоса. Таким исследованиям посвящены работы [3 – 5]. Одними из первых публикаций в этом направлении являются книги А.С. Вольмира, Б.Я. Кантора [2], В.А. Крысько [6, 9 – 12, 18], Я.М. Григоренко [14], в которых авторы интересуются именно нелинейными колебаниями пластин и оболочек. Эта область представляет одну из частей общей нелинейной механики твердых деформируемых тел, или, в более широких рамках, нелинейной механики сплошных сред. Одним из важных практических приложений в этом направлении является вопрос о поведении пластин и оболочек при импульсных воздействиях. Этому вопросу в указанных выше источниках уделяется большое внимание.

В настоящей работе изучается хаотическая синхронизация колебаний о контактном взаимодействии многослойных балочно-пластинчато-оболочечных структур, соединенных через краевые условия, под действием внешней нагрузки. Эти системы

имеют зазоры между слоями. Такие системы называем конструктивно нелинейными. Они находят широкое применение в медицине, авиастроении и космонавтике. Элементы конструкций испытывают действие внешнего давления различной природы, поэтому необходимо комплексно исследовать поведение таких систем и установить параметры воздействия, которые характеризуют безопасный и опасный режимы. Разработан подход, позволяющий идентифицировать влияние внешней поперечной нагрузки, которая может вызвать простые и сложные колебания, включая хаотические.

### §1. Метод фазовой хаотической синхронизации.

Вопрос о синхронизации различной природы систем занимает умы ученых со времен Гюйгенса.

Фазовая хаотическая синхронизация систем – одно из важных явлений современной теории нелинейных колебаний. Это явление экспериментально наблюдалось для радиотехнических генераторов, лазеров, электрохимических осцилляторов, сердечного ритма, газового разряда, а также изучение этого явления весьма важно применительно к передаче информации с помощью детерминированных хаотических колебаний.

В данной работе это явление впервые обнаружено в механических системах: многослойных балках, пластинках, оболочках, соединенных между собой через краевые условия; ниже впервые разработан метод для механических систем исследования фазовой синхронизации на базе вейвлет-анализа, т. е. способа, позволяющего проанализировать на любом временном масштабе характер колебаний любой природы. Характеризует частоту и ее локализацию во времени. Существуют различные типы вейвлет-преобразований. Предпочтение отдаем вейвлету Морле. Анализ различных типов вейвлетов для оболочек проведен в работе [6].

Фазовая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов в то время, как амплитуды этих сигналов остаются несвязанными друг с другом и выглядят хаотическими. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы. Вейвлетная поверхность  $W(s, t_0) = \|W(s, t_0)\| \exp[j\varphi_s(t_0)]$  характеризует поведение системы на каждом временном масштабе  $s$  в любой момент времени  $t_0$ . Величина  $\|W(s, t_0)\|$  характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба  $s$  в момент времени  $t_0$ . Вводится интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по временным масштабам  $E(s) = \int \|W(s, t_0)\|^2 dt_0$ . Фаза определяется как  $\varphi_s(t_0) = \arg W(s, t)$  для каждого временного масштаба  $s$ , т. е. возможно характеризовать поведение каждого временного масштаба  $s$  с помощью ассоциированной с ним фазы  $\varphi_s(t)$ . Особое внимание уделено синхронизации колебаний рассматриваемых структур с помощью вейвлет-анализа разности фаз на основе вейвлета Морле.

### §2. Двухслойный пакет пластин, соединенных через краевые условия.

Изучаем синхронизацию колебаний конструктивно нелинейных двухслойных пластин, соединенных через краевые условия, под действием внешней поперечной нагрузки (рис. 1).

Запишем исходные уравнения двухслойного пакета упругих пластин, описываемых динамическими уравнениями типа Жермен – Лагранжа в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{12(1-\mu^2)}(\nabla_\lambda^4 w_1) + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial t} - q(t) - K(w_1 - w_2 - h_k)\Psi = 0; \\ \frac{1}{12(1-\mu^2)}(\nabla_\lambda^4 w_2) + \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_2}{\partial t} - q_1(t) + K(w_1 - w_2 - h_k)\Psi = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\left( \Psi = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_2)] \right); \quad (2.1.1)$$

$\nabla_\lambda^4 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ ;  $q_1(t) = 0$ ;  $\Psi = 1$ , если  $w_1 > w_2 + h_k$  – при контакте между пластинами, иначе –  $\Psi = 0$ ;  $w_1, w_2$  – функции прогибов верхней и нижней пластины, соответственно;  $K$  – коэффициент жесткости трансверсального обжатия структуры в зоне контакта;  $h_k$  – зазор между пластинами).

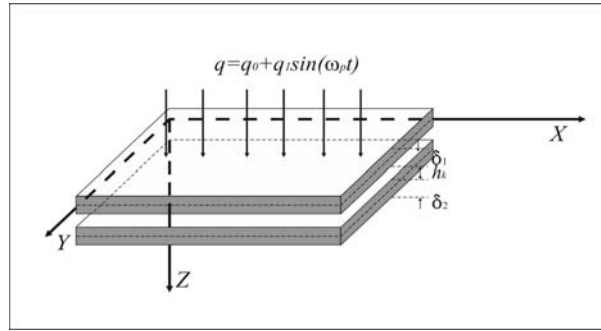


Рис. 1

Система уравнений (2.1) приведена к безразмерному виду следующим образом:

$$x = a\bar{x}, \quad y = a\bar{y}; \quad q = \bar{q} \frac{E(2h)^4}{a^2 b^2}, \quad \tau = \frac{ab}{2h} \sqrt{\frac{\gamma}{Eg}}, \quad \lambda = \frac{a}{b},$$

где  $a, b$  – размеры пластины по  $x$  и  $y$ , соответственно;  $t$  – время;  $\varepsilon$  – коэффициент затухания;  $w$  – функция прогиба;  $2h$  – толщина пластины;  $\mu = 0,3$  – коэффициент Пуассона;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $E$  – модуль упругости;  $q(x, y, t)$  – поперечная нагрузка;  $\gamma$  – удельный вес материала. Для простоты записи черточки над безразмерными параметрами в системе уравнений (2.1) опущены.

К исходным уравнениям следует присоединить граничные и начальные условия. Полученные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (2.1) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях в форме В.З. Власова. Функции  $w_1$  и  $w_2$ , являющиеся решениями (2.1), приближенно аппроксимируем выражением в виде произведения функций, зависящих от времени и от координат

$$w_m = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} A_{ij}^m(t) \varphi_{ij}(x, y), \quad m = 1, 2, \quad (2.2)$$

После применения метода Бубнова – Галеркина по пространственным переменным с учетом (2.2) уравнения (2.1) записываем в таком виде:

$$\sum_{kl} \left[ \sum_{ij} A_{ij}^1 S_{ijkl} - q Q_{kl} + \sum_{ij} \left[ \frac{d^2 A_{ij}^1}{dt^2} + \varepsilon \frac{dA_{ij}^1}{dt} \right] G_{ijkl} - K \Psi_{ij} \sum_{ij} [(A_{ij}^1 - A_{ij}^2) G_{ijkl} - h_k Q_{kl}] \right] = 0;$$

$$\sum_{kl} \left[ \sum_{ij} A_{ij}^2 S_{ijkl} - q_1 Q_{kl} + \sum_{ij} \left[ \frac{d^2 A_{ij}^2}{dt^2} + \varepsilon \frac{dA_{ij}^2}{dt} \right] G_{ijkl} + K \Psi_{ij} \sum_{ij} [(A_{ij}^1 - A_{ij}^2) G_{ijkl} - h_k Q_{kl}] \right] = 0,$$

где  $S_{ijkl}$ ,  $Q_{kl}$ ,  $G_{ijkl}$  – интегралы процедуры Бубнова – Галеркина по области  $\{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ .

Выше приведенную систему уравнений второго порядка сводим к системе первого порядка

$$\dot{\mathbf{R}}^{(1)} = -\varepsilon \mathbf{R}^{(1)} + K\Psi(A^{(1)} - A^{(2)}) - \mathbf{G}^{-1}SA^{(1)} + (q - K\Psi h_k)\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}; \quad \dot{A}^{(1)} = \mathbf{R}^{(1)};$$

$$\dot{\mathbf{R}}^{(2)} = -\varepsilon \mathbf{R}^{(2)} - K\Psi(A^{(1)} - A^{(2)}) - \mathbf{G}^{-1}SA^{(2)} + (q_1 + K\Psi h_k)\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}; \quad \dot{A}^{(2)} = \mathbf{R}^{(2)}. \quad (2.3)$$

Задачи Коши для нелинейной системы уравнений 1го порядка (2.3) решаются методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности по временной координате.

Рассмотрим в качестве примера структуру двухслойных квадратных в плане пластин ( $\lambda = 1$ ) с граничными условиями – шарнирное опирание по контуру и нулевыми начальными условиями, т. е.

$$w_m = 0; \quad w_m''|_x = 0; \quad \text{при } x = 0; 1; \quad w_m = 0; \quad w_m''|_y = 0; \quad \text{при } y = 0; 1; \quad m=1, 2; \quad (2.4)$$

$$w_m(x, y)|_{t=0} = 0, \quad \dot{w}_m|_{t=0} = 0, \quad m=1, 2. \quad (2.5)$$

В этом случае функции  $w_1$  и  $w_2$  из (2.2) представляем в виде

$$w_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(m)}(t) \sin(i\pi x) \sin(j\pi y), \quad m=1, 2. \quad (2.6)$$

Исследована сходимость этих процессов методом Бубнова – Галеркина при  $N=1, 3, 5$ , и установлено, что достаточно  $N=3$  в формуле (2.6).

Для исследования сложных колебаний конструктивно-нелинейных структур применяется качественная теория дифференциальных уравнений и нелинейная динамика: анализ сигналов, фазовых и модальных портретов, сечений Пуанкаре, автокорреляционных функций, анализ знаков старших Ляпуновских показателей во времени, Фурье-анализ для каждой из структур. Используются различные вейвлет-преобразования.

Опишем алгоритм вычисления показателей Ляпунова. Оценка спектра Ляпунова по выборке из одной координаты с использованием нейронных сетей заключается в следующем: пусть имеется реконструированная последовательность

$$x_i = (x(i), x(i - \tau), \dots, x(i - (m - 1)\tau)) = (x_1(i), x_2(i), \dots, x_m(i)), \quad (2.7)$$

где  $i = \overline{((m - 1)\tau + 1), N}$ ,  $m$  – размерность пространства вложения;  $\tau$  – временная задержка,  $N$  – длина временного ряда. Прodelьываем следующую совокупность шагов: 1) на основании выборки вычислена подходящая временная задержка  $\tau$ ; 2) вычислена размерность  $m$  пространства вложения; 3) выполнена псевдофазовая реконструкция траектории методом временных задержек. При этом получена выборка  $m$ -мерных векторов, объём которой будет немного меньше объёма исходной выборки; 4) впервые сконструирована аппроксимирующая нейронная сеть, которая существенно улучшает сходимость итерационного процесса; 5) нейронная сеть обучена вычислять очередной вектор реконструированной последовательности на основании предыдущего; 6) применив, обученную таким образом сеть, в обобщённом алгоритме Бенеттина рассчитана оценка спектра Ляпунова.

Идея обобщённого алгоритма Бенеттина заключается в следующем: пусть  $r_0$  – некоторая точка аттрактора системы. Зафиксировав некоторое небольшое, по сравнению с линейными размерами аттрактора, положительное число  $\varepsilon$ , выберем возмущённые точки  $x_0, y_0$  и  $z_0$  так, чтобы векторы возмущений  $\Delta x_0 = x_0 - r_0$ ,  $\Delta y_0 = y_0 - r_0$  и  $\Delta z_0 = z_0 - r_0$  имели длину  $\varepsilon$  и были взаимно ортогональны. Через некоторый неболь-

шой промежуток времени  $T$  точки  $r_0$ ,  $x_0, y_0$  и  $z_0$  эволюционируют в точки  $x_1, y_1$  и  $z_1$ , соответственно. Рассмотрим новые векторы возмущений  $\Delta x_1 = x_1 - r_1$ ,  $\Delta y_1 = y_1 - r_1$  и  $\Delta z_1 = z_1 - r_1$ . Ортогонализуем их, используя метод Грамма – Шмидта

$$\begin{aligned}\Delta x_1' &= \Delta x_1, \quad \Delta x_1'' = \frac{\Delta x_1'}{\|\Delta x_1'\|}; \\ \Delta y_1' &= \Delta y_1 - (\Delta y_1, \Delta x_1'') \Delta x_1'', \quad \Delta y_1'' = \frac{\Delta y_1'}{\|\Delta y_1'\|}; \\ \Delta z_1' &= \Delta z_1 - (\Delta z_1, \Delta x_1'') \Delta x_1'' - (\Delta z_1, \Delta y_1'') \Delta y_1'', \quad \Delta z_1'' = \frac{\Delta z_1'}{\|\Delta z_1'\|}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

После такой ортогонализации полученные векторы возмущения будут ортонормированными. Перенормируем ортогонализированные векторы возмущений так, чтобы их длины были равны  $\varepsilon$ :  $\Delta x_1''' = \Delta x_1'' \cdot \varepsilon$ ;  $\Delta y_1''' = \Delta y_1'' \cdot \varepsilon$  и  $\Delta z_1''' = \Delta z_1'' \cdot \varepsilon$ .

Рассмотрим новый набор возмущённых точек  $x_1' = x_1 + \Delta x_1'''$ ;  $y_1' = y_1 + \Delta y_1'''$  и  $z_1' = z_1 + \Delta z_1'''$ . Далее процесс повторим, но уже с точками  $r_1, x_1', y_1'$  и  $z_1'$ . Повторяя процесс  $M$  раз, вычисляем суммы

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{k=1}^M \|\Delta x_k'\|, \\ S_2 &= \sum_{k=1}^M \|\Delta y_k'\|, \quad S_3 = \sum_{k=1}^M \|\Delta z_k'\|,\end{aligned}\quad (2.9)$$

откуда спектр Ляпунова  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  вычисляем по формуле

$$\lambda_i = S_i / MT \quad (i = 1, 2, 3).\quad (2.10)$$

В качестве примера рассмотрим постоянную во времени равномерно распределенная нагрузку при следующих параметрах пластин:  $K = 5000$ ,  $q = q_0 = \text{const} = 0,2$ ;  $h_k = 0,01$ ;  $\varepsilon = 0$ ;  $\omega_0 = 5,9887$  – частота собственных линейных колебаний.

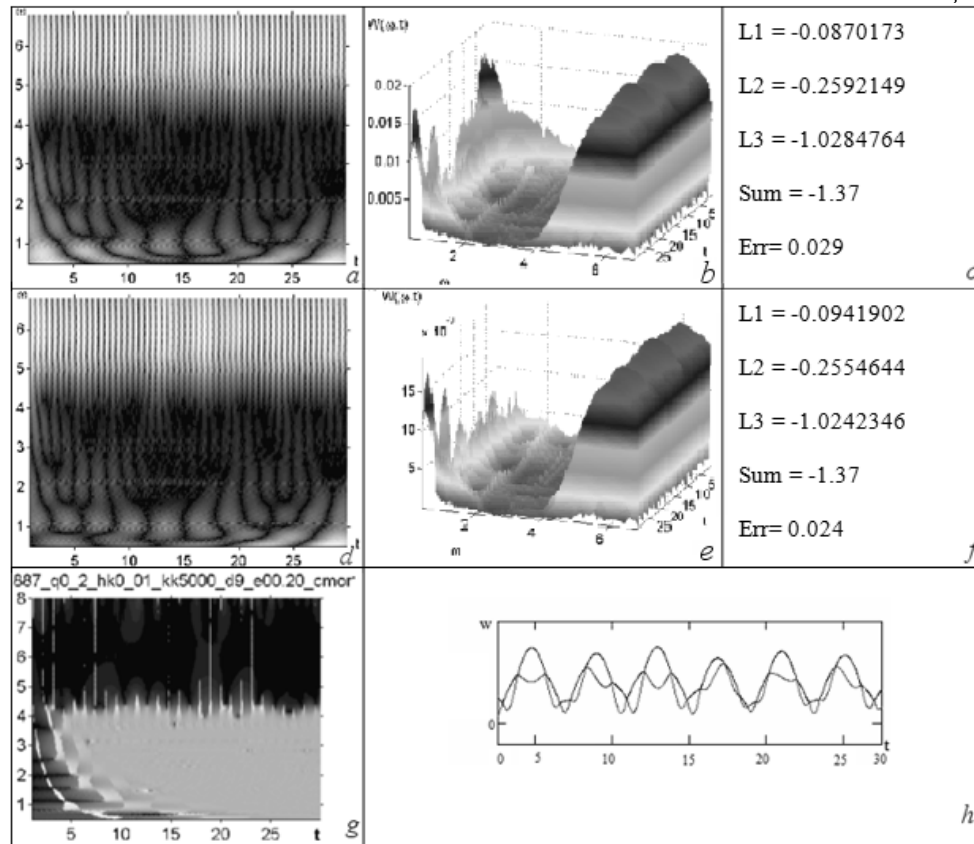
В табл. 1 приведены: графики 2D ( $a, d$ ) и 3D ( $b, e$ ) вейвлет-спектров Морле; значения показателей Ляпунова, их сумма и погрешность ( $c, f$ ) для каждой пластины; график области частот синхронизации ( $g$ ), а также график совместных колебаний в центральной точке каждой пластины ( $h$ ).

В этой задаче можем наблюдать полную синхронизацию этих двух пластинчатых систем в окрестности частот собственных колебаний пластинок  $\omega_0$ . Темным цветом на графике разности фаз ( $g$ ) показаны частоты, на которых происходит фазовая синхронизация.

Колебания совершаются на частоте  $\omega_0$ , т. е. на частоте собственных колебаний двухслойной пластинчатой структуры, о чем свидетельствуют вейвлет-спектры Морле ( $a, d$ ), содержащие энергетическую составляющую каждой из частот в конкретный момент времени.

Фазовая синхронизация наблюдается на частотах  $\omega \in [4, 8]$ , имеются элементы синхронизации характера.

Таблица 1



На графике (*h*) показано колебание нижней пластины (1), верхней пластины (2). Анализ знаков показателей Ляпунова свидетельствует о том, что колебания не являются хаотическими и в процессе колебаний происходит практически полный захват амплитуд верхней и нижней пластинок.

### §3. Двухслойный пакет пластины и балки, соединенных через краевые условия.

Изучим хаотическую синхронизацию колебаний конструктивно-нелинейного двухслойного пакета пластины и балки, соединенных через краевые условия, под действием внешней поперечной нагрузки (рис. 2) Нагрузка может быть произвольной [12], но в данной задаче рассмотрим внешнюю поперечную распределенную нагрузку внезапно приложенная, т.е. нагрузка того же типа, что и в предыдущей задаче.

Верхняя пластинка описывается уравнением типа Жермен – Лагранжа, а балка – уравнением Эйлера – Бернулли

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial t} - q(t) - K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi = 0;$$

$$\frac{1}{12} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_2}{\partial t} + K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi = 0, \quad (3.1)$$

где функция  $\Psi$  определена формулой (2.1.1). Система (3.1) приведена к безразмерному виду аналогично предыдущей задаче.

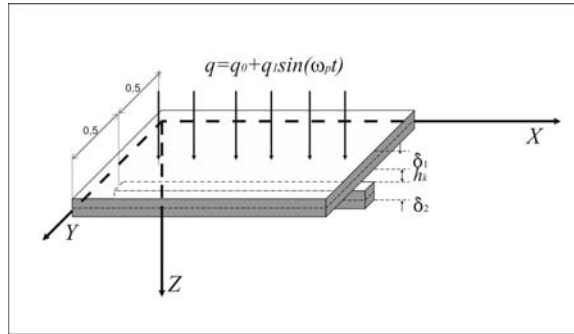


Рис. 2

Присоединим граничные условия и нулевые начальные условия:

$$w_1 = 0; \quad w_1''|_x=0; \quad \text{при } x = 0; 1; \quad w_1 = 0; \quad w_1''|_y=0$$

при  $y = 0; 1$  (шарнирное опирание по контуру пластины);  $w_2 = 0; \quad w_2''|_x=0;$

$$\text{при } x = 0; 1; \quad w_2 = 0; \quad \text{при } y = 0; 1 \text{ (шарнирно-опертая балка)} \quad (3.2)$$

$$w_1(x, y)|_{t=0} = 0, \quad w_2(x)|_{t=0} = 0, \quad \dot{w}_m|_t = 0, \quad m=1, 2. \quad (3.3)$$

Применим метод решения, описанный в §2, т.е. метод Бубнова – Галеркина в высших приближениях. В этом случае примем следующие аппроксимирующие функции:

$$w_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}^1(t) \sin(i\pi x) \sin(j\pi y); \quad w_2 = \sum_{i=1}^N A_i^2(t) \sin(i\pi x). \quad (3.4)$$

Рассмотрим характер колебаний пластины и балки под действием поперечной распределенной нагрузки  $q_0 = \text{const}$  при  $t_0 = 0$ . Примем следующие параметры задачи:

$$K = 5000; \quad q = q_0 = \text{const} = 1; \quad h_k = 0,01,$$

$$\varepsilon = 0,5; \quad \omega_0^{(1)} = 5,9887; \quad \omega_0^{(2)} = 2,84$$

– частоты собственных линейных колебаний. В табл. 2 приведены графики 2D (*a, d*) и 3D (*b, e*) вейвлет-спектров, значения показателей Ляпунова, их сумма и погрешность (*c, f*) для пластины и балки, соответственно; график области частот синхронизации (*g*), а также график совместных колебаний в центральной точке пластины и балки (*h*).

В этом случае наблюдаем затухающие колебания на частоте пакета.

В дальнейшем с уменьшением зазора между пластиной и балкой с течением времени происходит совпадение амплитуд (*h*), т.е. наблюдаем полную (фазовую и амплитудную) синхронизацию, захват системы происходит при меньших значениях нагрузки  $q_0$ . Таким образом, с уменьшением зазора синхронизация увеличивается (*g*).

Исследовано влияние коэффициента затухания  $\varepsilon$  на характер колебаний пакета. Уменьшение этого коэффициента ведет к большему усложнению колебаний, но при этом фазовая и амплитудная синхронизация увеличивается, наблюдаем полную синхронизацию двух систем.

В табл. 3 приведены результаты при следующих параметрах структуры:

$$K = 5000; \quad q = q_0 = \text{const} = 4.6; \quad h_k = 0,01;$$

$$\varepsilon = 0,25, \quad \omega_0^{(1)} = 5,9887; \quad \omega_0^{(2)} = 2,84.$$

Таблица 2

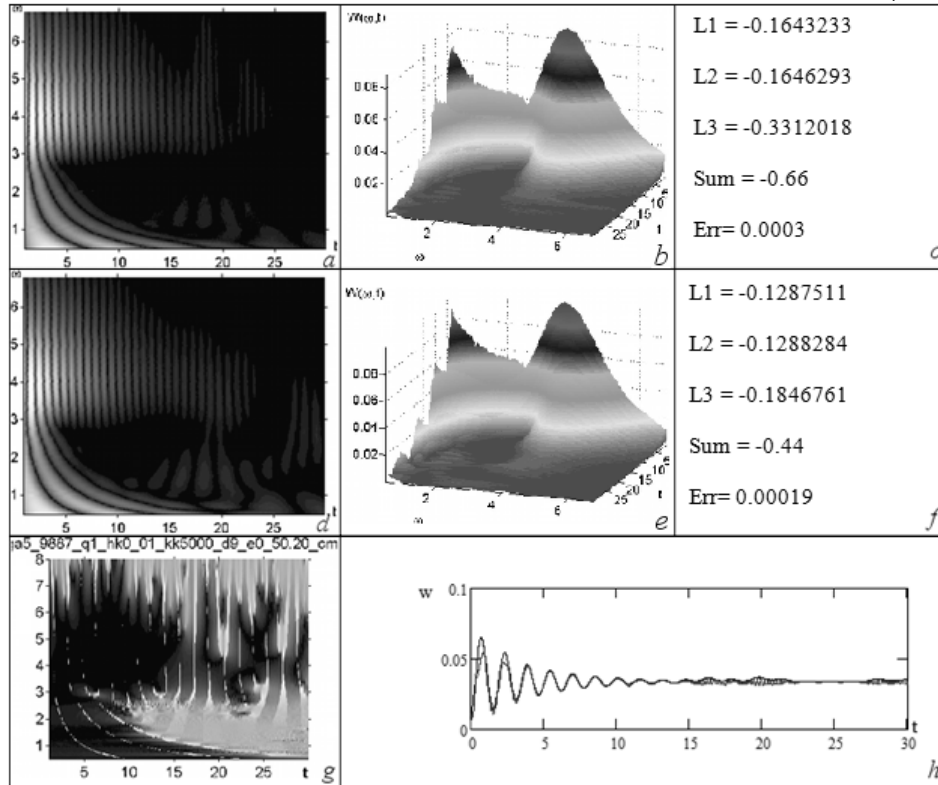
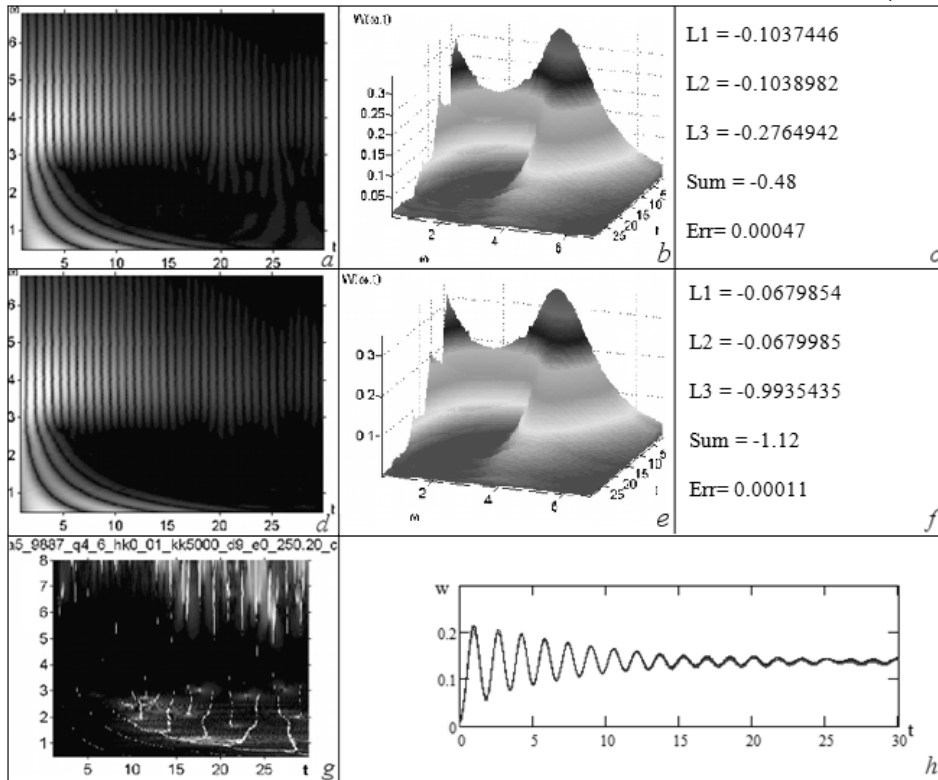


Таблица 3



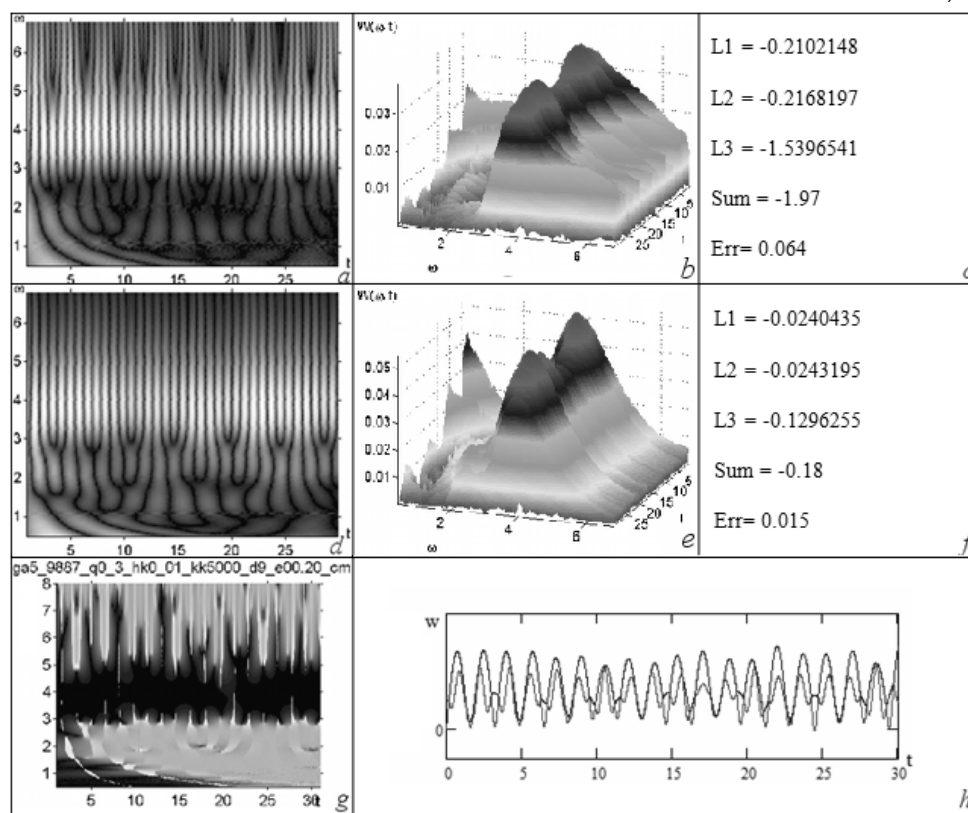


Далее ликвидируем элементы диссипации системы, т.е. рассмотрим консервативную систему, когда  $\varepsilon = 0$ . Наблюдаем зоны включения/выключения синхронизации. Знаки показателей Ляпунова показывают, что характер колебаний не является хаотическим, присутствуют шумовые составляющие. Обнаружена полная синхронизация двух структур.

В табл. 4 приведены результаты при следующих параметрах структуры:  $q = q_0 = \text{const} = 0,3$ ;  $h_k = 0,01$ ;  $\varepsilon = 0$ ;  $\omega_0^{(1)} = 5,9887$ ;  $\omega_0^{(2)} = 2,84$ . С увеличением нагрузки на структуру синхронизация увеличивается ( $g$ ). Колебания происходят на собственной частоте пакета и бифуркации Хопфа.

Происходит частичный захват не только частот, но и амплитуд в некоторые моменты времени. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к полной синхронизации как по частоте, так и по амплитуде ( $h$ ).

Таблица 4



#### §4. Двухслойный пакет балок, соединенных через краевые условия.

Ниже исследована синхронизация колебаний балок. Каждая из балок подчиняется кинематической модели Эйлера – Бернулли. Геометрическая нелинейность учитывается по модели Теодора фон Кармана. Физическая нелинейность учитывается с помощью теории малых упруго-пластических деформаций без учета разгрузки и вторичных пластических деформаций, и с помощью метода переменных параметров упругости Биргера [1]. Учет контактного взаимодействия между балками осуществляется по модели Винклера.

Запишем исходные уравнения двухслойного пакета для геометрически, физически и конструктивно нелинейных балок [11, 18]

$$b_m h_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ E_{0m} \left( u'_m + \frac{1}{2} (w'_m)^2 \right) - E_{1m} w''_m \right];$$

$$b_m h_m \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + \varepsilon_m \frac{\partial w_m}{\partial t} = q_m^* + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E_{1m} \left( u_m' + \frac{1}{2} (w_m')^2 \right) - E_{2m} w_m'' \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ w_m' \left[ E_{0m} \left( u_m' + \frac{1}{2} (w_m')^2 \right) - E_{1m} w_m'' \right] \right\} \quad (m=1,2) \quad (4.1)$$

$$\left( E_{im} = b \int_{a_i}^{\beta_i} E_m z^i dz, \quad q_m^* = q_m + q_{mk} \quad (i=0,1,2); \right. \quad (4.2)$$

$$q_{km} = (1)^m k \frac{E_m}{h_m} \left( w_1 - h_k - w_2 \frac{h_{02}}{h_{01}} \right) \psi \quad (m=1,2). \quad (4.3)$$

Функция  $\Psi$  определена формулой (2.1.1). Система (4.1) приведена к безразмерному виду, как и раньше.

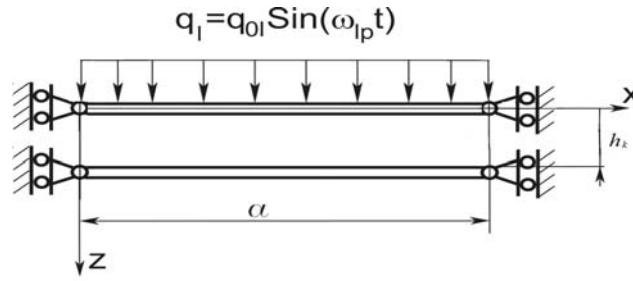


Рис. 3

Следует отметить, что уравнения (4.2) учитывают слоистость каждой из балок исследуемого пакета. К системе уравнений (4.2) следует присоединить граничные и начальные условия. Для получения численных результатов был разработан метод решения, основанный на методе конечных разностей по пространственной и временной переменным. На каждом временном слое осуществляется процедура метода переменных параметров упругости Биргера. В данной работе рассматривается балка, изготовленная из материала, диаграмма деформирования для которого имеет вид

$$\sigma_{mi} = \sigma_{ms} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{e_{mi}}{e_{ms}} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Для получения достоверных результатов был создан альтернативный алгоритм решения системы уравнений (4.1), основанный на методе конечных элементов по пространственной координате и методе Рунге – Кутты четвертого порядка точности по времени.

В качестве примера приведем результаты, полученные для двухслойного пакета балок, шарнирно-опертых с обоих концов

$$\left( \frac{\partial^2 w_m(0,t)}{\partial x^2} = w_m(0,t) = \frac{\partial^2 w_m(l,t)}{\partial x^2} = w_m(l,t) = 0, \quad u_m(0) = u_m(l) = 0 \right). \text{ Начальные условия – нулевые } \left( w \Big|_{t=0} = \frac{\partial w_m}{\partial t} \Big|_{t=0} = u \Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \right).$$

После применения метода конечных разностей по пространственной и временной переменным к (4.1) получили следующие уравнения:

$$w_{mi,j+1} = \frac{1}{(1 + \varepsilon_m h_m / 2b_m h_m)} \left[ 2w_{mi,j} + \left( \frac{\varepsilon_m h_m}{2h_m} - 1 \right) w_{mi,j-1} + \frac{h_m^2}{b_m h_m} A_{mi,j} \right];$$

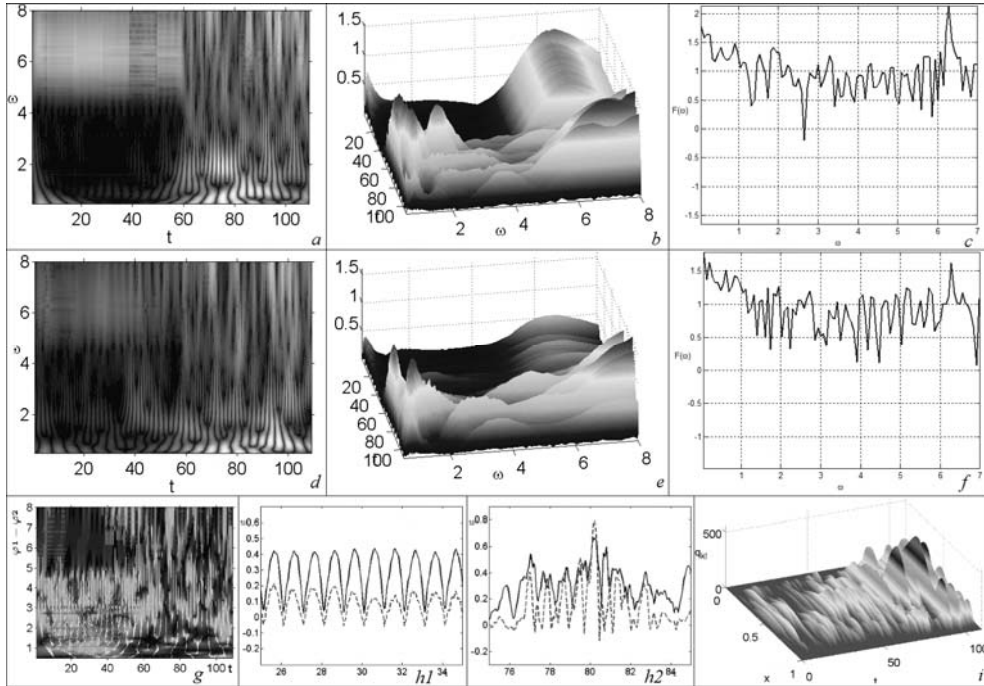
$$u_{mi,j+1} = \frac{h_m^2}{bh} \left[ \Lambda(E_{0m}) \left( \Lambda(u_m) + \frac{1}{2} (\Lambda(w_m))^2 \right) + E_{0m} (\Lambda 2(u_m) + \Lambda(w_m) \Lambda 2(w_m) - \Lambda(E_{2m}) \Lambda(w_m) - E_{1m} \Lambda 2(w_m)) \right]_{ij} + 2u_{ij} - u_{ij-1}; \quad (4.5)$$

$$A_{mi,j} = \Lambda 2 \left[ E_{0m} \left( \Lambda(u_m) + \frac{1}{2} (\Lambda(w_m))^2 \right) - E_{2m} \Lambda 2(w_m) \right] - \Lambda \left[ \Lambda(w_m) E_{0m} \left( \Lambda(u_m) + \frac{1}{2} (\Lambda(w_m))^2 \right) - E_{2m} \Lambda 2(w_m) \right];$$

$\Lambda, \Lambda 2$  – разностные операторы. (4.6)

Исследовано влияние зазора между балками на характер совместных колебаний двухслойного пакета. Были рассмотрены зазоры  $h_k = 0,025; 0,1$ . На верхнюю балку действует внешняя знакопеременная поперечная нагрузка  $q = q_0 \sin(\omega_p t)$ . Изменение зазора  $h_k$  не влечет за собой значительных изменений колебаний балок при их касании.

Таблица 5. Двухслойный пакет с зазором 0,025



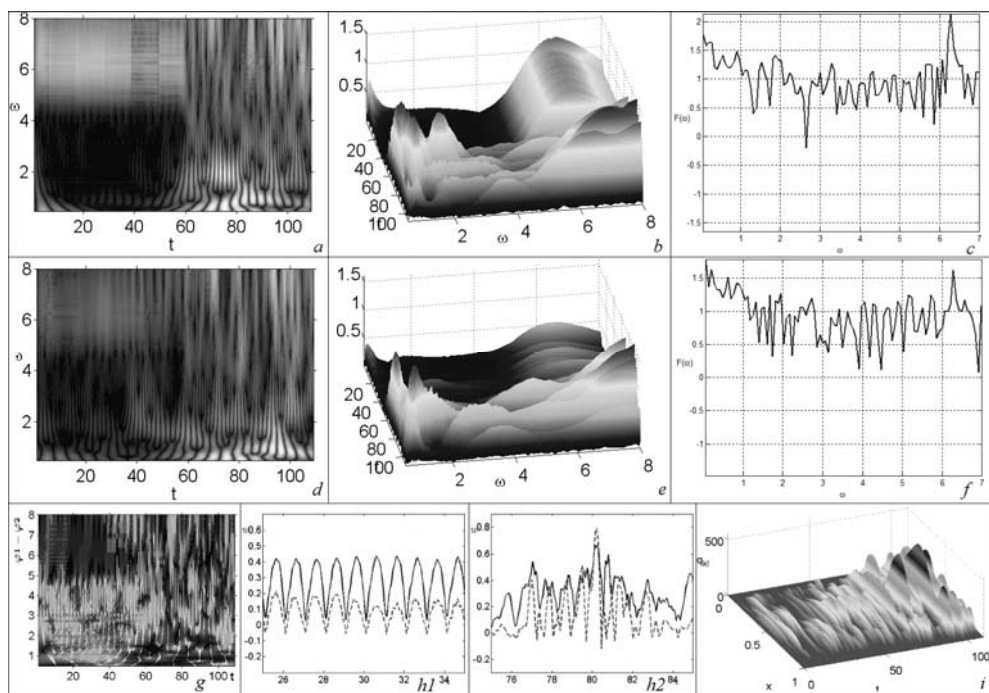
Численные результаты приведены в табл. 5, 6, где 2D (a, d), 3D (b, e) – вейвлет-спектры; график разности фаз (g), а также график совместных колебаний в центральной точке каждой балки на интервале [25; 35] (h1); график совместных колебаний в центральной точке каждой балки на интервале [75; 85] (h2); контактное давление (i); спектры мощности Фурье (c, f) для каждой балки на всем рассматриваемом интервале времени, которые показывают на хаотические колебания всей системы, в то время как вейвлет-анализ этот же временной интервал делит на две части: гармоническую и хаотическую составляющую. На это указывают и показатели Ляпунова. Это свидетельствует о том, что для сложных колебаний рассматривать Фурье-анализ на всем диапазоне времени невозможно.

В табл. 5 и 6 приведены результаты для амплитуды нагрузки  $q_0=3$ . На рассматриваемом интервале времени  $[0; 100]$  наблюдается потеря устойчивости (при поперечном нагружении наблюдается бурный рост прогибов в определенный момент времени), что оказывает значительное влияние на фазовую синхронизацию, т.е. на разных временных интервалах характер колебаний различен (гармонический или хаотический).

В табл. 5 ( $h_k = 0,025$ ) до потери устойчивости фазовая синхронизация происходит в основном на интервале частот  $[5; 8]$ , но присутствуют области синхронизации и на других частотах; после потери устойчивости фазовая синхронизация наблюдается на всем диапазоне частот  $[0; 8]$ . Обнаружен пространственно-временной хаос, о чем свидетельствуют знаки показателей Ляпунова.

На интервале времени  $[20,60]$  для верхней балки показатели Ляпунова  $\lambda_2 = -0,3280905$ ;  $\lambda_1 = -0,0936091$ ;  $\lambda_3 = -0,8373338$ , а их сумма равна  $-1,26$ , а на интервале  $[60,100]$  –  $\lambda_1 = 0,1006490$ ;  $\lambda_2 = -0,3725858$ ;  $\lambda_3 = -1,1698219$ ; их сумма равна  $-1,44$ . Показатели Ляпунова для нижней балки равны: на интервале времени  $[20,60]$   $\lambda_1 = -0,2691738$ ;  $\lambda_2 = -0,5868795$ ;  $\lambda_3 = -0,8579193$ ; их сумма равна  $-1,71$ , на  $[60,100]$  –  $\lambda_1 = 0,2418005$ ;  $\lambda_2 = -0,3210985$ ;  $\lambda_3 = -1,2758009$ , сумма  $= -1,36$ .

Таблица 6. Двухслойный пакет с зазором 0,1



В табл. 6 ( $h_k = 0,1$ ) наблюдаются вышеописанные явления, но имеются временные интервалы, на которых наблюдаются отдельные области фазовой синхронизации в диапазоне частот  $[1,5; 5]$ . Практически на всем рассматриваемом интервале происходит захват первой балки второй. Колебания имеют хаотический характер. Для верхней балки показатели Ляпунова равны: на интервале времени  $[20, 60]$   $\lambda_1 = -0,2801284$ ;  $\lambda_2 = -0,4151580$ ;  $\lambda_3 = -0,5815159$ , их сумма равна  $-1,28$ , на  $[60,100]$  –  $\lambda_1 = 0,4882161$ ;  $\lambda_2 = -0,3424714$ ;  $\lambda_3 = -1,4604015$ , сумма  $= -1,31$ . Для нижней бал-

ки показатели Ляпунова равны: на интервале времени [20,60]  $\lambda_1 = -0,5173143$ ;  $\lambda_2 = -0,7893902$ ;  $\lambda_3 = -1,5137999$ , их сумма равна  $-2,82$ , на [60,100] –  $\lambda_1 = 0,4320238$ ;  $\lambda_2 = -0,1205150$ ;  $\lambda_3 = -0,8219637$ ; сумма =  $0,028$ . Таким образом, наблюдаем пространственно-временной хаос.

### §5. Двухслойный пакет оболочек, соединенных через краевые условия.

В рамках нелинейной классической теории рассмотрим двухслойную сферическую гибкую оболочку на прямоугольном плане с постоянной жесткостью и плотностью при действии статического нагружения (табл. 7, I), равномерно распределенного по первой оболочке. В прямоугольной системе координат трехмерная область запишется в виде:  $\Omega = \{x, y, z \mid (x, y) \in [0; a] \times [0; b], x_3 \in [-h; h]\}$ ,  $0 \leq t < \infty$  [2, 4].

Исходными являются уравнения теории пологих оболочек, записанные в безразмерном виде

$$\nabla^4 w_m + L(w_m; F_m) + \nabla^2 F_m + 4q \pm K(w_1 - h_k - w_2)\Psi = \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w_m}{\partial t};$$

$$\nabla^4 F_m = -\frac{1}{2}L(w_m; w_m) - \nabla^2 w_m, \quad (5.1)$$

где  $L(w_m, F_m) = \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_m}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F_m}{\partial x \partial y}$  – известный нелинейный оператор,  $\Psi$  из (2.1.1);  $w_m$  и  $F_m$  – функция прогиба и усилия, где  $m = 1, 2$ ,  $K = 10000$ .

Система (5.1) приведена к безразмерному виду, как и раньше, но введены новые параметры:  $k_x = a^2 / R_x h$ ,  $k_y = b^2 / R_y h$  – геометрические параметры кривизны оболочки по  $x$  и по  $y$  соответственно;  $F = E(2h)^3 \bar{F}$  – функция усилий (черточка над безразмерными параметрами для простоты опущена). Также введены следующие обозначения:  $a, b$  – размеры оболочки в плане по  $x$  и по  $y$ , соответственно.

К уравнениям (5.1) присоединим граничные условия: защемление с учетом гибких несжимаемых (нерастяжимых) ребер:

$$w_m = 0; \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} = 0; F_m = 0; \frac{\partial^2 F_m}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0; 1;$$

$$w_m = 0; \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} = 0; F_m = 0; \frac{\partial^2 F_m}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0; 1. \quad (5.2)$$

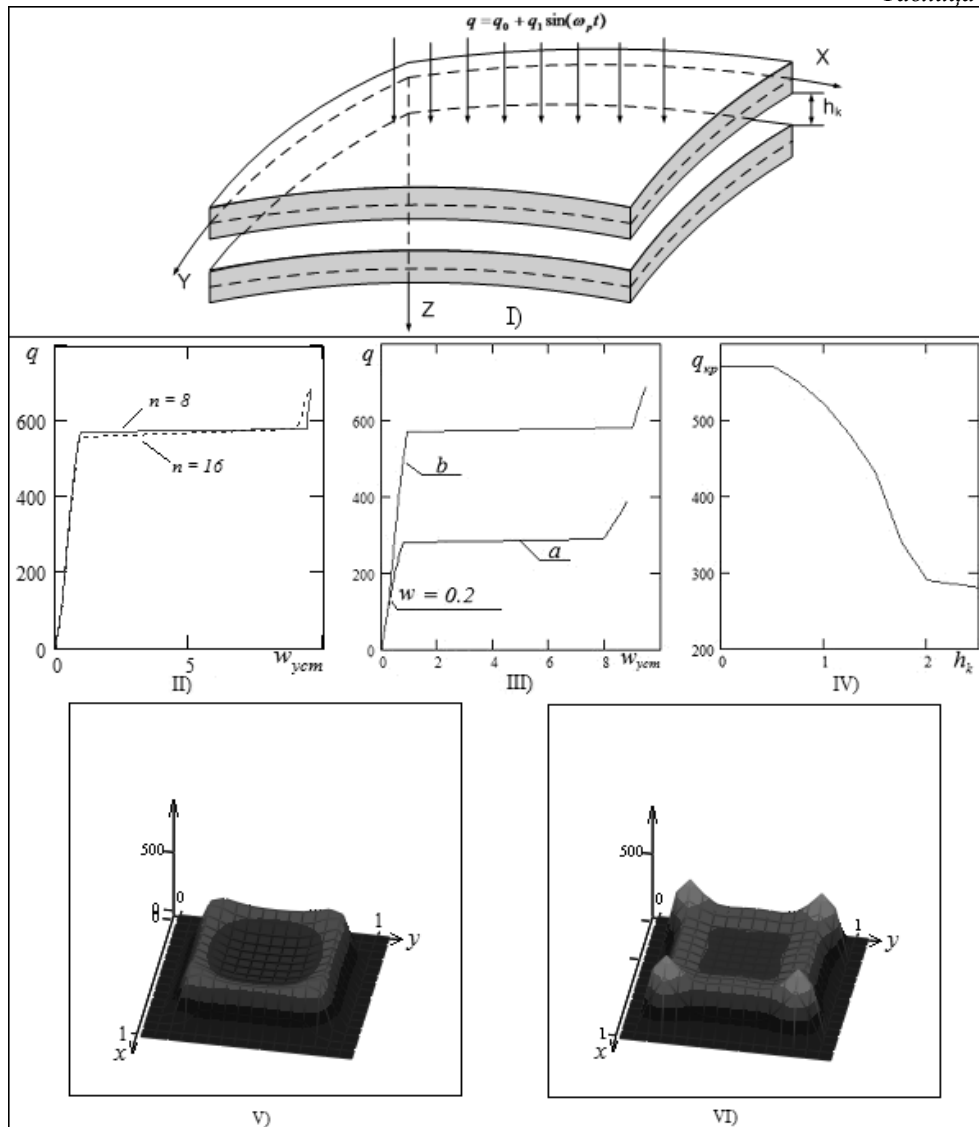
Начальные условия примем в таком виде:

$$w_m(x, y)|_{t=0} = \varphi_1(x, y), \quad \frac{\partial w_m}{\partial t} = \varphi_2(x, y). \quad (5.3)$$

Для сведения распределенной системы (5.1) – (5.3) к системе с сосредоточенными параметрами воспользуемся методом конечных разностей второго порядка точности по пространственным переменным  $x$  и  $y$ .

Задачу Коши решаем методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности. На каждом шаге по времени решается второе уравнение системы относительно функции усилия методом обратной матрицы. Шаг по времени выбирается по правилу Рунге. Для решения задач статики используем метод установления.

Таблица 7



Разработанный алгоритм и комплекс программ на ПЭВМ позволяет решать задачи статики и динамики. Предварительно рассмотрен вопрос о достоверности получаемых результатов в методе конечных разностей с аппроксимацией  $O(h^2)$ . В табл. 7 (II) приведены зависимости  $q(w_{ycm})$  для прямоугольных в плане гибких оболочек с геометрическим параметром кривизны  $k_x = k_y = 24$ ;  $\varepsilon = 10$  и граничными условиями: опирание на гибкие несжимаемые (нерастяжимые) ребра и нулевыми начальными условиями по предлагаемому алгоритму. Графики, построенные для  $n = 8$  (сплошная линия, табл. 7 (II)) и  $n = 16$  (пунктирная линия, табл. 7 (II)) – числа участков деления отрезков  $[0; 1]$  и  $[0; 1]$  для двухслойной прямоугольной в плане полой сферической оболочки полностью совпали до критической нагрузки  $q_{кр} = 570$ . Расхождение значение происходит лишь в закритической области при  $q_{кр} = 580$ .

На графике в табл. 7 (III) представлены графики зависимости  $q(w_{уст})$ :  $a$  – для однослойной прямоугольной в плане оболочки;  $b$  – для двухслойной прямоугольной в плане оболочки с зазором  $h_k = 0,2$ . Нагрузка равномерно распределена по верхней оболочке. Следует отметить, что при прогибе  $w = h_k = 0,2$  происходит соприкосновение первой оболочки со второй и система становится жестче, поэтому критическая нагрузка двухслойного пакета больше критической нагрузки однослойной оболочки.

В табл. 7 (IV) представлен график зависимости  $q_{кр}(h_k)$ . Значение зазора изменялось  $0 \leq h_k \leq 2,5$ . При увеличении зазора между оболочками наблюдается уменьшение значения критической нагрузки, при которой происходит «хлопок». При  $h_k = 2,5$  критическая нагрузка, при которой наблюдается явление «хлопка», наступила раньше, чем произошло соприкосновение верхней оболочки с нижней.

Для двухслойных прямоугольных в плане гибких оболочек с геометрическим параметром кривизны  $k_x = k_y = 24$ ;  $\varepsilon = 10$  построены графики контактного давления для критической нагрузки  $q_{кр} = 570$  (табл. 7 (V)) и за критической нагрузки  $q_{кр} = 580$  (табл. 7 (VI)). Следует отметить, что при резком увеличении прогиба форма контактного давления меняется: максимальное значение контактного давления достигается в углах оболочки, а минимальное – в центре.

#### **Заключение.**

Исследована хаотическая синхронизация колебаний о контактом взаимодействии многослойных балочно-пластинчато-оболочечных структур, соединенных через краевые условия, под действием внешней нагрузки. Эти системы имеют зазоры между слоями. Такие системы будем называть конструктивно нелинейными. Они находят широкое применение в медицине, авиастроении и космонавтике. Элементы конструкций испытывают действие внешнего давления различной природы, поэтому необходимо комплексно исследовать поведение таких систем и установить параметры воздействия, которые будут характеризовать безопасный и опасный режимы. Разработан подход, позволяющий идентифицировать влияние внешней поперечной нагрузки, которая может вызвать простые и сложные колебания, включая хаотические:

двухслойный пакет пластин (каждое из уравнений линейное, но при контактом взаимодействии имеем конструктивную нелинейность);

пластина, подкрепленная ребром жесткости в виде балки;

двухслойный пакет балок (каждый элемент является как физически, так и геометрически нелинейным, а их контактное взаимодействие приводит к конструктивной нелинейности);

двухслойный пакет оболочек (каждый из элементов геометрически нелинейный, а их контактное взаимодействие приводит к конструктивной нелинейности).

**Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №12-01-31204).**

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено хаотичну синхронізацію коливань при контактній взаємодії багатошарових балочно-оболонкових систем, з'єднаних через крайові умови, під дією зовнішнього навантаження. Ці системи мають зазори між шарами. Такі системи називаємо конструктивно нелінійними. Комплексно досліджено поведінку таких систем і встановлено параметри впливу, які характеризують безпечний і небезпечний режими. Розроблено метод вивчення фазової хаотичної синхронізації різної природи. Досліджено синхронізацію коливань для таких систем: 1) двошаровий пакет пластин (кожен з шарів лінійне, але при контактній взаємодії маємо конструктивну нелінійність); 2) пластина, підкріплена ребром жорсткості у вигляді балки; 3) двошаровий пакет балок (кожен елемент є як фізично, так і геометрично нелінійний, а їх контактна взаємодія призводить до конструктивної нелінійності); 4) двошаровий пакет оболонок (кожен з елементів геометрично нелінійний, а їх контактна взаємодія призводить до конструктивної нелінійності).

1. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикл. математика и механика. – 1951. – **15**, № 6. – С. 765 – 770.
2. Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. – К.: Наук. думка, 1990. – 136 с.
3. Крысько В.А., Жигалов М.В., Салтыкова О.А., Десятова А.С. Диссипативная динамика геометрически нелинейных балок Бернулли – Эйлера // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2008. – №6. – С. 128 – 136.
4. Крысько В. А., Жигалов М.В., Салтыкова О. А., Крысько А.В. Об учете влияния поперечных сдвигов на сложные нелинейные колебания упругих балок // Прикл. матем. и техн. физика. – 2011. – №5. – С. 186 – 193.
5. Крысько В.А., Кравцова И.В. Управление хаотическими колебаниями гибких сферических оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 1. – С. 161 – 172.
6. Папкова И.В., Крысько В.А., Солдатов В.В. Анализ нелинейных хаотических колебаний пологих оболочек вращения с помощью вейвлет-преобразования // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – N 1. – С. 107 – 117
7. Altukhov A. V., Fomenko M. V. Elastic Vibrations of Sandwich Plates with Diaphragms at the Edges // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 179 – 186.
8. Antonyuk E. Ya., Zabuga A. T. Dynamics of a Two-Link Vehicle in an L-Shaped Corridor Revisited // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 222 – 230.
9. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Chaos in Structural Mechanics. – Berlin, London: Springer, 2008. – 424p.
10. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Introduction to Asymptotic Methods. – London; New York: Chapman&Hall /CRC, 2006. – 251 p.
11. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. Thermodynamics of plates and shells. – Berlin, London: Springer, 2007. – 777 p.
12. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Yakovleva T.V., Zelenchuk D.S., Krysko V.A. Chaotic synchronization of vibrations of a coupled mechanical system consisting of a plate and beams // Latin Amer. J. Solids and Struct. – 2013. – **10**. – P. 161 – 172.
13. Bosakov S. V. Contact Problems for a Plate as an Inclusion in an Elastic Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 187 – 195.
14. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 105 – 127.
15. Gutschmidt S., Gottlieb O. Bifurcations and loss of orbital stability in nonlinear viscoelastic beam arrays subject to parametric actuation // J. Sound and Vibr. – 2010. – April. – P. 3835 – 3855.
16. Khoroshun L. P., Levchuk O. I. Stress Distribution Around Cracks in Linear Hardening Materials Subject to Tension: Plane Problem // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 128 – 140.
17. Khoroshun L. P., Shikula E. N. Deformation and Long-Term Damage of Physically Nonlinear Fibrous Materials // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 58 – 67.
18. Krysko A. V., Koch M. I., Yakovleva T. V., Nackenhorst U., Krysko V. A. Chaotic nonlinear dynamics of cantilever beams under the action of signs-variables loads // PAMM, Special Issue: 82nd Annual Meeting of the Int. Association of Appl. Math. and Mech. (GAMM). – (Graz). – 2011. – **11**, N1. – P. 327 – 328.
19. Legeza V. P., Legeza D. V. Vibration of a String with Moving End // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 87 – 91.
20. Manevich A. I., Kolakowski Z. Revisiting the Theory of Transverse Vibrations of Plates with Shear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P 196 – 205.

Поступила 01. 08.2012

Утверждена в печать 03.12.2013