Я . Я . Р у щ и ц к и й

О НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ВОЛНЕ СТОУНЛИ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Abstract. The new nonlinear wave equations, describing the propagation of the surface wave along the interface of two half-spaces with differing densities and elastic properties (the Stoneley wave), are proposed. The nonlinearity is introduced by the five-constant Murnaghan potential, which includes both the geometrical and the physical nonlinearities. The solution of nonlinear equations is obtained by the method of successive approximations within the framework of two first approximations. This solution includes the second harmonics.

Key words: Stoneley wave, elastic wave, Murnaghan elastic potential, nonlinear Stoneley wave equation, method of successive approximations, the second approximation.

Введение.

Задача о поверхностной волне, распространяющейся вдоль плоскости раздела двух соединённых между собой упругих полупространств, является классической задачей динамической линейной теории упругости. Считается, что впервые решение этой задачи было дано Стоунли в публикации 1924 г. [38]. Впоследствии волны вдоль границы раздела (не только плоской, но и цилиндрической, сферической и т.д.) двух упругих тел получили название волн Стоунли. Эти волны исследуются до сих пор с привлечением различных усложняющих факторов. Особенно популярны прикладные исследования в области геофизики [7, 8, 10, 17, 18, 21, 22, 24, 25, 36, 37, 39]. Достаточно полное представление о публикациях, посвященных волнам Стоунли, можно составить по информации в основных мировых базах научных данных. Например, по ключевому слову “Stoneley wave” база данных Google дает 52800 источников.

Упругие гармонические волны составляют крупный фрагмент как линейной, так и нелинейной теории упругости [1 – 6, 11 – 16, 19, 20, 26, 27, 30, 35 и др.]. Первоначально исследовались так называемые свободные волны, распространяющиеся в бесконечном упругом пространстве и которые как-бы генерируются начально на бесконечности и уходят в бесконечность. Сюда относятся, прежде всего, плоские упругие гармонические волны. Далее изучались волны с криволинейными профилями (цилиндрические, сферические и т.д.), где уже присутствует криволинейная граница, на которой начально генерируются волны, распространяющиеся далее от границы в бесконечность. Поверхностные волны представляют собой следующую, третью, группу по сложности теоретического анализа. Необходимый здесь учет влияния границы раздела и условие быстрого затухания амплитуд волн при отходе от границы имеет следствием более сложную волновую картину.

Внутренняя логика развития теории упругости диктовала, по крайней мере, три направления последующих исследований упругих волн. *Первое направление* состоит в усложнении модели упругого деформирования (прежде всего, здесь следует отметить переход от структурной модели первого порядка, соответствующей линейной теории упругости, к структурным моделям второго порядка – микрополярным моделям, модели упругой смеси, микроморфной модели и т.п.) [4]. *Второе направление* включает учет начальных напряжений [3], что невозможно в рамках линейной теории и что имеет многочисленные приложения. *Третье направление* ассоциируется с полным учетом нелинейности процесса деформирования и состоит из различных поднаправлений, часть из которых чисто теоретическая, тогда как иная часть более прикладная. Из чисто теоретических поднаправлений можно выделить московское, таллиннское, нижегородское и киевское [33, 35]. Приведенный далее в статье анализ нелинейной волны Стоунли относится к четвертому поднаправлению. Он основан на введении в модель упругого деформирования нелинейности, которая описывается нелинейным тензором деформации Коши – Грина и упругим потенциалом Мурнагана, учитывающим как геометрическую, так и физическую нелинейности.

§1. Линейный анализ волны Стоунли.

Рассмотрим сначала основные моменты классического линейного анализа поверхностной волны Стоунли, распространяющейся вдоль поверхности раздела между двумя упругими телами. Ограничимся удобным для аналитического рассмотрения случаем, когда два упругих полупространства с различающимися плотностью и механическими свойствами разделены плоскостью и соединены согласно условию полного механического контакта. Также выберем декартовы координаты $Ox_1x_2x_3$ и предположим, что плоскость раздела является координатной плоскостью и описывается уравнением $x_3 = 0$. Приведем далее анализ случая плоской деформации изотропного материала, полагая механическое состояние не зависимым от координаты x_2 и отсутствие горизонтального поперечного перемещения u_2. Тогда задача сводится к анализу двух полуплоскостей (верхней и нижней) с прямой линией раздела. На этом геометрическая часть постановки задачи о волне Стоунли заканчивается.

Механическая часть состоит в использовании основных уравнений линейной теории упругости (уравнений Ляме) для рассматриваемого случая отсутствия горизонтальных поперечных перемещений

$$\rho\ddot{u}_1 - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} - (\lambda + \mu)u_{3,13} - \mu u_{1,33} = 0;$$
$$\rho\ddot{u}_3 - (\lambda + 2\mu)u_{3,33} - (\lambda + \mu)u_{1,13} - \mu u_{3,11} = 0. \tag{1}$$

Далее рассматривается решение уравнений (1) в виде волны (волны Стоунли), которая распространяется вдоль линии раздела в направлении оси абсцисс Ox_1 и затухает при удалении от оси аппликат Ox_3 как вверх (в положительном направлении), так и вниз (в отрицательном направлении). При этом должны выполняться геометрические (прямая линия раздела разграничивает две упругие полуплоскости с различающимися свойствами) и граничные условия (перемещения и напряжения непрерывны при переходе через линию раздела).

Как правило, уравнения (1) не решают прямо, а вводят сначала две скалярные функции-потенциалы $\varphi(x_1, x_3, t), \psi(x_1, x_3, t)$ по закону

$$u_1(x_1, x_3, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_3},\ u_3(x_1, x_3, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \tag{2}$$

Тогда взаимосвязанная система уравнений (1) относительно продольного и вертикального поперечного перемещений преобразуется в два линейных независимых волновых уравнения относительно потенциалов

$$\left[\Delta - c_L^{-2}\left(\partial^2/\partial t^2\right)\right]\varphi = 0,\quad \left[\Delta - c_T^{-2}\left(\partial^2/\partial t^2\right)\right]\psi = 0\ . \tag{3}$$

Здесь обозначения стандартные: $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – фазовая скорость продольной волны, $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ – фазовая скорость продольной волны; λ, μ – упругие постоянные Ляме; ρ – плотность.

На следующем шаге волновые уравнения (3) решаются раздельно для верхней и нижней полуплоскостей и поэтому решения ищутся в виде гармонической волны с различающимися амплитудами в областях, примыкающих к линии раздела,

$$\varphi^{B(H)}(x_1, x_3, t) = A_\varphi^{B(H)}(x_3) e^{i(k_S x_1 - \omega t)}, \psi^{B(H)}(x_1, x_3, t) = A_\psi^{B(H)}(x_3) e^{i(k_S x_1 - \omega t)}, \tag{4}$$

где для верхней полуплоскости использован индекс B (верхняя), для нижней полуплоскости – индекс H (нижняя), четыре амплитуды $A_\varphi^{B(H)}(x_3), A_\psi^{B(H)}(x_3)$ должны выполнять условия затухания с увеличением расстояния x_3 от линии раздела, а волновое число $k_S = (\omega/v_S)$ (как и амплитуды) должно быть определено из дополнительных рассуждений.

Подстановка представлений (4) в волновые уравнения (3) приводит к четырем независимым обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами относительно амплитуд $A_\varphi^{B(H)}(x_3), A_\psi^{B(H)}(x_3)$

$$\begin{gathered}
\left(A_\varphi^B\right)'' - \left[(k_S)^2 - \left(k_L^B\right)^2\right] A_\varphi^B = 0, \ \left(A_\psi^B\right)'' - \left[(k_S)^2 - \left(k_T^B\right)^2\right] A_\psi^B = 0; \\
\left(A_\varphi^H\right)'' - \left[(k_S)^2 - \left(k_L^H\right)^2\right] A_\varphi^H = 0, \ \left(A_\psi^H\right)'' - \left[(k_S)^2 - \left(k_T^H\right)^2\right] A_\psi^H = 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

В этих уравнениях волновое число волны Стоунли k_S неизвестно. По условиям, которые характеризуют волну Стоунли, волна должна быть поверхностной, т.е. затухать при отходе от линии раздела вверх или вниз. Поэтому решения уравнений (5) должны быть затухающими функциями и поскольку это экспоненциальные функции вида

$$\begin{gathered}
A_\varphi^B(x_3) = \tilde{A}_\varphi^B e^{-\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^B\right)^2} x_3}; \ A_\psi^B(x_3) = \tilde{A}_\psi^{B(H)} e^{-\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_T^B\right)^2} x_3}; \\
A_\varphi^H(x_3) = \tilde{A}_\varphi^H e^{+\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^H\right)^2} x_3}; \ A_\psi^H(x_3) = \tilde{A}_\psi^H e^{+\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_T^H\right)^2} x_3}
\end{gathered} \tag{6}$$

с неизвестными постоянными множителями $\tilde{A}_\varphi^{B(H)}, \tilde{A}_\psi^{B(H)}$, то коэффициенты в уравнениях (5) должны удовлетворять условиям затухания

$$(k_S)^2 - \left(k_L^{B(H)}\right)^2 > 0, \ (k_S)^2 - \left(k_T^{B(H)}\right)^2 > 0 \tag{7}$$

или

$$\beta_L^{B(H)} \equiv \sqrt{1 - \left[(v_S)^2 \middle/ \left(v_L^{B(H)}\right)^2\right]} > 0; \ \beta_T^{B(H)} \equiv \sqrt{1 - \left[(v_S)^2 \middle/ \left(v_T^{B(H)}\right)^2\right]} > 0. \tag{8}$$

Теперь можно записать представление волны Стоунли через потенциалы, объединив формулы (4), (6) и (8),

$$\varphi^B(x_1, x_3, t) = \tilde{A}_\varphi^B e^{-\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^B\right)^2} x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)} \equiv \tilde{A}_\varphi^B e^{-\beta_L^B x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)};$$

$$\psi^B(x_1, x_3, t) = \tilde{A}_\psi^B e^{-\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_T^B\right)^2} x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)} \equiv \tilde{A}_\psi^B e^{-\beta_T^B x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)};$$

$$\varphi^H(x_1,x_3,t)=\tilde{A}_\varphi^H e^{+\sqrt{(k_S)^2-\left(k_L^H\right)^2}\,x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)} \equiv \tilde{A}_\varphi^H e^{+\beta_L^H x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)};$$

$$\psi^H(x_1,x_3,t)=\tilde{A}_\psi^H e^{+\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^H\right)^2}\,x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)} \equiv \tilde{A}_\psi^H e^{+\beta_T^H x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)}. \quad (9)$$

Далее для удобства запишем еще представление волны Стоунли через перемещения, использовав для этого формулы (2)

$$u_1^B(x_1,x_3,t)=\tilde{A}_\varphi^B ik_S e^{-\beta_L^B x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)} - \tilde{A}_\psi^B \beta_T^B e^{-\beta_T^B x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)}; \quad (10)$$

$$u_3^B(x_1,x_3,t)=-\tilde{A}_\varphi^B \beta_L^B e^{-\beta_L^B x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)} - ik_S \tilde{A}_\psi^B e^{-\beta_T^B x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)}; \quad (11)$$

$$u_1^H(x_1,x_3,t)=\tilde{A}_\varphi^H ik_S e^{\beta_L^H x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)} + \tilde{A}_\psi^H \beta_T^H e^{\beta_T^H x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)}; \quad (12)$$

$$u_3^H(x_1,x_3,t)=\beta_L^H \tilde{A}_\varphi^H e^{+\beta_L^H x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)} - ik_S \tilde{A}_\psi^H e^{+\beta_T^H x_3} e^{i(k_S x_1-\omega t)}. \quad (13)$$

Заметим, что выражения (10) – (13) включают пять неизвестных величин – четыре амплитудные множители $\tilde{A}_\varphi^{B(H)}$, $\tilde{A}_\psi^{B(H)}$ и волновое число k_S. Для их определения используются четыре граничные условия

$$\begin{aligned} &u_1^B(x_1,0,t)=u_1^H(x_1,0,t); \quad u_3^B(x_1,0,t)=u_3^H(x_1,0,t); \\ &\sigma_{33}^B(x_1,0,t)=\sigma_{33}^H(x_1,0,t); \quad \sigma_{31}^B(x_1,0,t)=\sigma_{31}^H(x_1,0,t). \end{aligned} \quad (14)$$

Для вычисления напряжений через перемещения используются линейные соотношения Коши

$$\varepsilon_{ik}^{B(H)}=(1/2)\left(u_{i,k}^{B(H)}+u_{k,i}^{B(H)}\right) \quad (15)$$

и линейный закон Гука

$$\sigma_{ik}^{B(H)}=\lambda\varepsilon_{ii}^{B(H)}\delta_{ik}+2\mu\varepsilon_{ik}^{B(H)}. \quad (16)$$

В итоге напряжения представляются в виде

$$\sigma_{33}^B=\left\{\begin{array}{l} (\lambda_B+2\mu_B)\left[\begin{array}{l}\left[(k_S)^2-\left(k_L^B\right)^2\right]\tilde{A}_\varphi^B e^{-\sqrt{(k_S)^2-\left(k_L^B\right)^2}\,x_3}+ \\ +ik_S\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^B\right)^2}\,\tilde{A}_\psi^B e^{-\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^B\right)^2}\,x_3}\end{array}\right]- \\ -\lambda_B\left[\tilde{A}_\varphi^B (k_S)^2 e^{-\sqrt{(k_S)^2-\left(k_L^B\right)^2}\,x_3}+\tilde{A}_\psi^B ik_S\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^B\right)^2}\,e^{-\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^B\right)^2}\,x_3}\right]\end{array}\right\} e^{i(k_S x_1-\omega t)}; \quad (17)$$

$$\sigma_{33}^H=\left\{\begin{array}{l} (\lambda_H+2\mu_H)\left[\begin{array}{l}\left[(k_S)^2-\left(k_L^H\right)^2\right]\tilde{A}_\varphi^H e^{+\sqrt{(k_S)^2-\left(k_L^H\right)^2}\,x_3}+ \\ +ik_S\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^H\right)^2}\,\tilde{A}_\psi^B e^{+\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^H\right)^2}\,x_3}\end{array}\right]- \\ -\lambda_H\left[\tilde{A}_\varphi^H (k_S)^2 e^{+\sqrt{(k_S)^2-\left(k_L^H\right)^2}\,x_3}+\tilde{A}_\psi^H ik_S\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^H\right)^2}\,e^{-\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^H\right)^2}\,x_3}\right]\end{array}\right\} e^{i(k_S x_1-\omega t)}; \quad (18)$$

$$\sigma_{31}^{B} = \mu_{B} \left\{ \begin{array}{l} -2\tilde{A}_{\varphi}^{B} i k_S \sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^B\right)^2}\, e^{-\sqrt{(k_S)^2-\left(k_L^B\right)^2} x_3} + \\ \tilde{A}_{\psi}^{B} \left[2(k_S)^2 - \left(k_T^B\right)^2 \right] e^{-\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^B\right)^2} x_3} \end{array} \right\} e^{i(k_S x_1 - \omega t)}; \qquad (19)$$

$$\sigma_{31}^{H} = \mu_{H} \left\{ \begin{array}{l} 2\tilde{A}_{\varphi}^{H} i k_S \sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^H\right)^2}\, e^{+\sqrt{(k_S)^2-\left(k_L^H\right)^2} x_3} + \\ \tilde{A}_{\psi}^{H} \left[2(k_S)^2 - \left(k_T^H\right)^2 \right] e^{+\sqrt{(k_S)^2-\left(k_T^H\right)^2} x_3} \end{array} \right\} e^{i(k_S x_1 - \omega t)}. \qquad (20)$$

Представления (10) – (13) и (17) – (20) позволяют записать граничные условия (14) в виде

$$\begin{gathered} \tilde{A}_{\varphi}^{B} i k_S - \tilde{A}_{\psi}^{B} \sqrt{(k_S)^2 - \left(k_T^B\right)^2} - \tilde{A}_{\varphi}^{H} i k_S e + \tilde{A}_{\psi}^{H} \sqrt{(k_S)^2 - \left(k_T^H\right)^2} = 0; \\ -\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^B\right)^2}\, \tilde{A}_{\varphi}^{B} - i k_S \tilde{A}_{\psi}^{B} + \sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^H\right)^2}\, \tilde{A}_{\varphi}^{H} + i k_S \tilde{A}_{\psi}^{H} = 0; \\ -\tilde{A}_{\varphi}^{B} 2i\mu_B k_S \sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^B\right)^2} + \tilde{A}_{\psi}^{B} \mu_B \left[2(k_S)^2 - \left(k_T^B\right)^2 \right] + \\ +\tilde{A}_{\varphi}^{H} 2i\mu_H k_S \sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^H\right)^2} - \tilde{A}_{\psi}^{H} \mu_H \left[2(k_S)^2 - \left(k_T^H\right)^2 \right] = 0; \\ \tilde{A}_{\varphi}^{B} \mu_B \left[2 - \frac{(v_S)^2}{\left(v_T^B\right)^2} \right] + 2\tilde{A}_{\psi}^{B} i \mu_B \sqrt{1 - \frac{(v_S)^2}{\left(v_T^B\right)^2}} - \tilde{A}_{\varphi}^{H} \mu_H \left[2 - \frac{(v_S)^2}{\left(v_T^H\right)^2} \right] - 2\tilde{A}_{\psi}^{H} i \mu_H \sqrt{1 - \frac{(v_S)^2}{\left(v_T^H\right)^2}} = 0. \end{gathered} \qquad (21)$$

Однородная система четырех линейных алгебраических уравнений (19) имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равен нулю. Для компактности записи детерминанта лучше перейти к фазовым скоростям $v = (\omega/k)$

$$\begin{vmatrix} i & -\sqrt{1-\frac{(v_S)^2}{\left(v_T^B\right)^2}} & -i & \sqrt{1-\frac{(v_S)^2}{\left(v_T^H\right)^2}} \\ -\sqrt{1-\frac{(v_S)^2}{\left(v_L^B\right)^2}} & -i & \sqrt{1-\frac{(v_S)^2}{\left(v_L^H\right)^2}} & i \\ \frac{\rho_B}{\left(v_T^B\right)^{-2}}\left[2-\frac{(v_S)^2}{\left(v_T^B\right)^2}\right] & \frac{2i\rho_B}{\left(v_T^B\right)^{-2}}\sqrt{1-\frac{(v_S)^2}{\left(v_T^B\right)^2}} & \frac{-\rho_H}{\left(v_T^H\right)^{-2}}\left[2-\frac{(v_S)^2}{\left(v_T^H\right)^2}\right] & \frac{-2i\rho_H}{\left(v_T^H\right)^{-2}}\sqrt{1-\frac{(v_S)^2}{\left(v_T^H\right)^2}} \\ \frac{-2i\rho_B}{\left(v_T^B\right)^{-2}}\sqrt{1-\frac{(v_S)^2}{\left(v_L^B\right)^2}} & \frac{\rho_B}{\left(v_T^B\right)^{-2}}\left[2-\frac{(v_S)^2}{\left(v_T^B\right)^2}\right] & \frac{2i\rho_H}{\left(v_T^H\right)^{-2}}\sqrt{1-\frac{(v_S)^2}{\left(v_L^H\right)^2}} & \frac{-\rho_H}{\left(v_T^H\right)^{-2}}\left[2-\frac{(v_S)^2}{\left(v_T^H\right)^2}\right] \end{vmatrix} = 0.$$

(22)

Здесь уместно вспомнить, что задача о волне Стоунли в определенном смысле является обобщением задачи о волне Рэлея (волна Стоунли – поверхностная волна вдоль границы между двумя полупространствами, волна Рэлея – вдоль свободной границы одного полупространства). Поэтому полезно иногда их сравнивать. Сравнение полученного из граничных условий уравнения для определения фазовой скорости волны Рэлея (оно имеет название уравнения Рэлея) с уравнением (22) показывает, что волна Стоунли, как и волна Рэлея, является недисперсионной волной, поскольку ее скорость не зависит от волнового числа, а зависит лишь от исходных параметров задачи (фазовых скоростей плоских волн в полупространствах) и при заданных параметрах является постоянной величиной.

Уравнение Стоунли (22), как и уравнение Рэлея, является уравнением относительно квадрата фазовой скорости и включает корни (иррациональности)

$$K_{L(T)}^{B(H)} = \sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2 \Big/ \left(v_{L(T)}^{B(H)}\right)^2\right]}. \qquad (23)$$

В обозначениях (23) классическое представление Стоунли уравнения (22) имеет вид

$$\begin{vmatrix} i & -K_T^B & -i & K_T^H \\ -K_L^B & -i & K_L^H & i \\ \rho_B\left[2\left(v_T^B\right)^2-\left(v_S\right)^2\right] & 2i\rho_B\left(v_T^B\right)^2 K_T^B & -\rho_H\left[2\left(v_T^H\right)^2-\left(v_S\right)^2\right] & -2i\rho_H\left(v_T^H\right)^2 K_T^H \\ -2i\rho_B\left(v_T^B\right)^2 K_L^B & \rho_B\left[2\left(v_T^B\right)^2-\left(v_S\right)^2\right] & 2i\rho_H\left(v_T^H\right)^2 K_L^H & \rho_H\left[-2\left(v_T^H\right)^2+\left(v_S\right)^2\right] \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} &\left(v_S\right)^4\left[\left(\rho_B-\rho_H\right)^2-\left(\rho_H K_L^B+\rho_B K_L^H\right)\left(\rho_H K_T^B+\rho_B K_T^H\right)\right]- \\ &-4\left(v_S\right)^2\left[+\rho_B\left(v_T^B\right)^2-\rho_H\left(v_T^H\right)^2\right]\left(\rho_H-\rho_B+\rho_H K_L^B K_T^B-\rho_B K_L^H K_T^H\right)+ \qquad (24) \\ &+4\left(\rho_H\left(v_T^H\right)^2-\rho_B\left(v_T^B\right)^2\right)^2\left(1-K_L^H K_T^H\right)\left(1-K_L^B K_T^B\right)=0 \end{aligned}$$

или

$$\left(v_S\right)^4\left[\begin{aligned}&\left(\rho_B-\rho_H\right)^2-\left(\rho_H\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_L^B\right)^2\right]}+\rho_B\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_L^H\right)^2\right]}\right)\times\\ &\left(\rho_H\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_T^B\right)^2\right]}+\rho_B\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_T^H\right)^2\right]}\right)\end{aligned}\right]+$$

$$+4\left(v_S\right)^2\left[\rho_B\left(v_T^B\right)^2-\rho_H\left(v_T^H\right)^2\right]\left(\begin{aligned}&\rho_H-\rho_B-\rho_H\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_L^B\right)^2\right]}\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_T^B\right)^2\right]}\\ &+\rho_B\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_L^H\right)^2\right]}\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_T^H\right)^2\right]}\end{aligned}\right)+$$

$$+4\left(\rho_H\left(v_T^H\right)^2-\rho_B\left(v_T^B\right)^2\right)^2\left(\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_L^H\right)^2\right]}\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_T^H\right)^2\right]}-1\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_L^B\right)^2\right]}\sqrt{1-\left[\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_T^B\right)^2\right]}-1\right)=0. \qquad (25)$$

Полагается понятным, что существование как волны Рэлея, так и волны Стоунли эквивалентно существованию действительного корня уравнения Рэлея и уравнения Стоунли (22). Напомним, что уравнение Рэлея следует из уравнения Стоунли при предположении, что $\rho_H = 0$

$$R\left(\left(v_S\right)^2\right)=\left(v_S\right)^4-4\left(v_S\right)^2\left(v_T^B\right)^2+4\left(v_T^B\right)^4\left(1-K_L^B K_T^B\right)=0 .$$

Уравнение Стоунли (22) классифицируется как имеющее действительный корень лишь при определенных ограничениях на свойства упругих полуплоскостей. К примеру, Стоунли и его последователи исследуют случай ограничения, которое называют условиями Вайхерта для поверхности разрыва земной коры – условиями равенства продольных и поперечных плоских волн в упругих полуплоскостях

$$v_L^B = v_L^H = v_L ,\ v_T^B = v_T^H = v_T . \qquad (26)$$

Из условий (26) следует, что

$$K_L^B = K_L^H = K_L ,\ K_T^B = K_T^H = K_T . \qquad (27)$$

При этих ограничениях и в новых обозначениях

$$V^2=\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_T\right)^2>0,\ 0<\kappa=\left(v_T\right)^2\Big/\left(v_L\right)^2<1$$

уравнение Стоунли (22) принимает вид

$$\begin{gathered}S\left(V^2\right)=V^4\left[\left(\rho_B-\rho_H\right)^2-\left(\rho_H+\rho_B\right)^2 K_L K_T\right]+\\ +4\left(\rho_B-\rho_H\right)^2\left[\left(1-V^2\right)-\left(2-V^2\right)K_L K_T+\left(K_L K_T\right)^2\right]=0.\end{gathered} \qquad (28)$$

Классический способ доказательства существования действительного корня уравнения (28) состоит в определении интервала, на котором функция $S\left(V^2\right)$ изменяет знак.

Оказывается, что таким интервалом может быть интервал $\left[0;1\right]$ – $S\left(1\right)=\left(\rho_B-\rho_H\right)^2>0$ и $S\left(0\right)=\left(1-K_B K_H\right)^2<0$.

Таким образом, при условиях Вайхерта действительный корень уравнения Стоунли существует и фазовая скорость волны Стоунли меньше фазовой скорости поперечной волны $1>V^2=\left(v_S\right)^2\Big/\left(v_T\right)^2>0$.

§2. Нелинейный анализ волны Стоунли.

Настоящий подход основывается на введении нелинейности деформирования обеих полуплоскостей посредством нелинейного тензора деформации Коши – Грина

$$\varepsilon_{nm}^{B(H)}=\frac{1}{2}\left(u_{n,m}^{B(H)}+u_{m,n}^{B(H)}+u_{n,i}^{B(H)}u_{i,m}^{B(H)}\right);\ \varepsilon_{11}^{B(H)}=u_{1,1}^{B(H)}+\frac{1}{2}\left(u_{1,1}^{B(H)}u_{1,1}^{B(H)}+u_{1,3}^{B(H)}u_{3,1}^{B(H)}\right);$$

$$\varepsilon_{33}^{B(H)}=u_{3,3}^{B(H)}+\frac{1}{2}\left(u_{3,1}^{B(H)}u_{1,3}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}u_{3,3}^{B(H)}\right); \qquad (29)$$

$$\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\left(u_{1,3}+u_{3,1}+u_{1,1}u_{1,3}+u_{1,3}u_{3,3}\right)=\frac{1}{2}\left[u_{1,3}+u_{3,1}+u_{1,3}\left(u_{1,1}+u_{3,3}\right)\right];$$

$$\varepsilon_{31}=\frac{1}{2}\left(u_{3,1}+u_{1,3}+u_{3,1}u_{1,1}+u_{3,3}u_{3,1}\right)=\frac{1}{2}\left[u_{1,3}+u_{3,1}+u_{3,1}\left(u_{1,1}+u_{3,3}\right)\right]$$

и потенциала Мурнагана [23, 35]

$$W^{B(H)}=(1/2)\lambda_{B(H)}\left[\left(\varepsilon_{11}^{B(H)}\right)^2+2\varepsilon_{11}^{B(H)}\varepsilon_{33}^{B(H)}+\left(\varepsilon_{33}^{B(H)}\right)^2\right]+$$

$$\mu_{B(H)}\left[\left(\varepsilon_{11}^{B(H)}\right)^2+\left(\varepsilon_{33}^{B(H)}\right)^2+\left(\varepsilon_{13}^{B(H)}\right)^2+\left(\varepsilon_{31}^{B(H)}\right)^2\right]+(1/3)A_{B(H)}\times \tag{30}$$

$$\times\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}^{B(H)}\varepsilon_{11}^{B(H)}\varepsilon_{11}^{B(H)}+\varepsilon_{11}^{B(H)}\varepsilon_{13}^{B(H)}\varepsilon_{13}^{B(H)}+\varepsilon_{13}^{B(H)}\varepsilon_{11}^{B(H)}\varepsilon_{31}^{B(H)}+\varepsilon_{13}^{B(H)}\varepsilon_{13}^{B(H)}\varepsilon_{33}^{B(H)}\\+\varepsilon_{13}^{B(H)}\varepsilon_{31}^{B(H)}\varepsilon_{11}^{B(H)}+\varepsilon_{13}^{B(H)}\varepsilon_{33}^{B(H)}\varepsilon_{13}^{B(H)}+\varepsilon_{33}^{B(H)}\varepsilon_{31}^{B(H)}\varepsilon_{31}^{B(H)}+\varepsilon_{33}^{B(H)}\varepsilon_{33}^{B(H)}\varepsilon_{33}^{B(H)}\end{pmatrix}+$$

$$+B\left(\varepsilon_{11}^{B(H)}+\varepsilon_{33}^{B(H)}\right)\left[\left(\varepsilon_{11}^{B(H)}\right)^2+\left(\varepsilon_{33}^{B(H)}\right)^2+\left(\varepsilon_{13}^{B(H)}\right)^2+\left(\varepsilon_{31}^{B(H)}\right)^2\right]+(1/3)C\left(\varepsilon_{11}^{B(H)}+\varepsilon_{33}^{B(H)}\right)^3,$$

где $\lambda_{B(H)},\mu_{B(H)}$ – упругие постоянные второго порядка (постоянные Ляме), $A_{B(H)},B_{B(H)},\ C_{B(H)}$ – упругие постоянные третьего порядка (постоянные Мурнагана).

Далее дополнительно принято, что запись потенциала Мурнагана включает только квадратично нелинейные составляющие градиентов деформации [33, 35]

$$W^{B(H)}=\frac{1}{2}\lambda_{B(H)}\left(u_{1,1}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}\right)^2+\mu_{B(H)}\left\{\left(u_{1,1}^{B(H)}\right)^2+\left(u_{3,3}^{B(H)}\right)^2+\frac{1}{2}\left(u_{1,3}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}\right)^2\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_{B(H)}\left\{\left(u_{1,1}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}\right)\left[\left(u_{1,1}^{B(H)}\right)^2+\left(u_{3,3}^{B(H)}\right)^2\right]+2\left(u_{1,1}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}\right)u_{1,3}^{B(H)}u_{3,1}^{B(H)}\right\}+\mu_{B(H)}\times$$

$$\times\left\{\left(u_{1,1}^{B(H)}\right)^3+\left(u_{3,3}^{B(H)}\right)^3+2\left(u_{1,1}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}\right)u_{1,3}^{B(H)}u_{3,1}^{B(H)}+\frac{1}{2}\left(u_{1,1}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(u_{1,3}^{B(H)}\right)^2+\left(u_{3,1}^{B(H)}\right)^2\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{3}A_{B(H)}\left[\left(u_{1,1}^{B(H)}\right)^3+\left(u_{3,3}^{B(H)}\right)^3+\frac{3}{4}\left(u_{1,3}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}\right)\left(u_{1,1}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}\right)\right]+ \tag{31}$$

$$+B_{B(H)}\left(u_{1,1}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}\right)\left[\left(u_{1,1}^{B(H)}\right)^2+\left(u_{3,3}^{B(H)}\right)^2+\left(u_{1,3}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3}C_{B(H)}\left(u_{1,1}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}\right)^3.$$

Уравнения движения записываются через несимметричный тензор напряжений Кирхгоффа $t_{nm}^{B(H)}$

$$t_{11,1}^{B(H)}+t_{31,3}^{B(H)}=\rho_{B(H)}\ddot{u}_1^{B(H)};\ t_{13,1}^{B(H)}+t_{33,3}^{B(H)}=\rho_{B(H)}\ddot{u}_3^{B(H)}. \tag{32}$$

Компоненты тензора Кирхгоффа определяются по формуле $t_{nm}^{B(H)}=\dfrac{\partial W^{B(H)}}{\partial u_{m,n}^{B(H)}}$

$$t_{11}^{B(H)} = \partial W^{B(H)} \Big/ \partial u_{1,1}^{B(H)} = \lambda_{B(H)} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right) + 2\mu_{B(H)} u_{1,1}^{B(H)} +$$

$$+\lambda_{B(H)} \left[\left(u_{1,1}^{B(H)} \right)^2 + u_{1,3}^{B(H)} u_{3,1}^{B(H)} + \frac{1}{2} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right)^2 \right] +$$

$$+\mu_{B(H)} \left[3 \left(u_{1,1}^{B(H)} \right)^2 + u_{1,3}^{B(H)} u_{3,1}^{B(H)} + \frac{1}{2} \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right)^2 \right] +$$

$$+A_{B(H)} \left[\left(u_{1,1}^{B(H)} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right)^2 \right] +$$

$$+B_{B(H)} \left[3 \left(u_{1,1}^{B(H)} \right)^2 + 2u_{1,1}^{B(H)} u_{3,3}^{B(H)} + \left(u_{3,3}^{B(H)} \right)^2 + \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right)^2 \right] +$$

$$+C_{B(H)} \left[\left(u_{1,1}^{B(H)} \right)^2 + \left(u_{3,3}^{B(H)} \right)^2 + 2u_{1,1}^{B(H)} u_{3,3}^{B(H)} \right];$$

$$t_{33}^{B(H)} = \partial W^{B(H)} \Big/ \partial u_{3,3}^{B(H)} = \lambda_{B(H)} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right) + 2\mu_{B(H)} u_{3,3}^{B(H)} +$$

$$+\lambda_{B(H)} \left[\left(u_{3,3}^{B(H)} \right)^2 + u_{1,3}^{B(H)} u_{3,1}^{B(H)} + \frac{1}{2} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right)^2 \right] + \mu_{B(H)} \times \tag{33}$$

$$\times \left[3 \left(u_{3,3}^{B(H)} \right)^2 + u_{1,3}^{B(H)} u_{3,1}^{B(H)} + \frac{1}{2} \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right)^2 \right] + A_{B(H)} \left[\left(u_{3,3}^{B(H)} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right)^2 \right] +$$

$$+B_{B(H)} \left[\left(u_{1,1}^{B(H)} \right)^2 + 2u_{1,1}^{B(H)} u_{3,3}^{B(H)} + 3 \left(u_{3,3}^{B(H)} \right)^2 + \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right)^2 \right] +$$

$$+C_{B(H)} \left[\left(u_{1,1}^{B(H)} \right)^2 + \left(u_{3,3}^{B(H)} \right)^2 + 2u_{1,1}^{B(H)} u_{3,3}^{B(H)} \right];$$

$$t_{13}^{B(H)} = \mu_{B(H)} \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right) + \lambda_{B(H)} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right) u_{3,1}^{B(H)} +$$

$$+\mu_{B(H)} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right) \left(u_{1,3}^{B(H)} + 2u_{3,1}^{B(H)} \right) +$$

$$+\frac{1}{4} A_{B(H)} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right) \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right) + 2B_{B(H)} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right) \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right);$$

$$t_{31}^{B(H)} = \mu_{B(H)} \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right) + \lambda_{B(H)} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right) u_{1,3}^{B(H)} +$$

$$+\mu_{B(H)} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right) \left(2u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right) +$$

$$+\frac{1}{4} A_{B(H)} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right) \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right) + 2B_{B(H)} \left(u_{1,1}^{B(H)} + u_{3,3}^{B(H)} \right) \left(u_{1,3}^{B(H)} + u_{3,1}^{B(H)} \right).$$

Подстановка соотношений (33) в уравнения (32) дает два нелинейные уравнения движения в перемещениях

$$\rho_{B(H)} \ddot{u}_1 - \left(\lambda_{B(H)} + 2\mu_{B(H)} \right) u_{1,11} - \left(\lambda_{B(H)} + \mu_{B(H)} \right) u_{3,13} - \mu_{B(H)} u_{1,33} =$$

$$=\left[3\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)+2\left(A_{B(H)}+3B_{B(H)}+C_{B(H)}\right)\right]u_{1,1}^{B(H)}u_{1,11}^{B(H)}+$$

$$+\left(\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)}+\frac{3}{4}A_{B(H)}+4B_{B(H)}\right)\left(u_{1,3}^{B(H)}u_{1,13}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}u_{1,13}^{B(H)}\right)+$$

$$+\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}+\frac{1}{2}A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right)u_{1,3}^{B(H)}u_{3,11}^{B(H)}+\left(\mu_{B(H)}+\frac{1}{2}A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right)u_{3,1}^{B(H)}u_{3,11}^{B(H)}+$$

(34)

$$+\left(\lambda_{B(H)}+\mu_{B(H)}+\frac{1}{4}A_{B(H)}+4B_{B(H)}+2C_{B(H)}\right)\left(u_{3,3}^{B(H)}u_{3,13}^{B(H)}+u_{1,1}^{B(H)}u_{3,13}^{B(H)}\right)+$$

$$+\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}+\frac{1}{4}A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right)\left(u_{1,1}^{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}+u_{1,3}^{B(H)}u_{3,33}^{B(H)}\right)+$$

$$+\left(\mu_{B(H)}+\frac{1}{4}A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right)u_{3,1}^{B(H)}u_{3,33}^{B(H)}+\left(\lambda_{B(H)}+2B_{B(H)}+2C_{B(H)}\right)u_{3,3}^{B(H)}u_{1,11}^{B(H)};$$

$$\rho_{B(H)}\ddot{u}_3-\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)u_{3,33}-\left(\lambda_{B(H)}+\mu_{B(H)}\right)u_{1,31}-\mu_{B(H)}u_{3,11}=$$

$$=\left[3\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)+2\left(A_{B(H)}+3B_{B(H)}+C_{B(H)}\right)\right]u_{3,3}^{B(H)}u_{3,33}^{B(H)}+$$

$$+\left(\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)}+\frac{3}{4}A_{B(H)}+4B_{B(H)}\right)\left(u_{1,3}^{B(H)}u_{3,31}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}u_{3,31}^{B(H)}\right)+$$

$$+\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}+\frac{1}{2}A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right)u_{3,1}^{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}+\left(\mu_{B(H)}+\frac{1}{2}A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right)u_{1,3}^{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}+$$

$$+\left(\lambda_{B(H)}+\mu_{B(H)}+\frac{1}{4}A_{B(H)}+4B_{B(H)}+2C_{B(H)}\right)\left(u_{1,1}^{B(H)}u_{1,31}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}u_{1,31}^{B(H)}\right)+\quad(35)$$

$$+\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}+\frac{1}{4}A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right)\left(u_{3,3}^{B(H)}u_{3,11}^{B(H)}+u_{1,1}^{B(H)}u_{3,11}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}u_{1,11}^{B(H)}\right)+$$

$$+\left(\mu_{B(H)}+\frac{1}{4}A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right)u_{1,3}^{B(H)}u_{1,11}^{B(H)}+\left(\lambda_{B(H)}+2B_{B(H)}+2C_{B(H)}\right)u_{1,1}^{B(H)}u_{3,33}^{B(H)}.$$

Уравнения (34), (35) получены с учетом геометрической (посредством нелинейных представлений зависимости деформаций от перемещений (29), допускающих не только обязательные для линейной теории бесконечно малые деформации) и физической (посредством кубической нелинейности упругого потенциала Мурнагана (30), соответствующей квадратичной нелинейности в определяющих уравнениях) нелинейностей. Однако существуют ситуации, когда деформирование материала можно считать только геометрически нелинейным процессом (деформации не бесконечно малые и определяющие соотношения линейные) или только физически нелинейным процессом (деформации бесконечно малые и определяющие соотношения нелинейные).

Для этих случаев уравнения (34), (35), реализующие общий нелинейный подход (далее *подход 1*), могут быть упрощены.

В случае *подхода 2*, когда учитывается геометрическая нелинейность и не учитывается физическая, уравнения (34), (35) имеют вид (далее вторые уравнения не приводятся, поскольку они, как и второе уравнение (35), получаются из первых заменой индексов $1 \rightleftarrows 3$

$$\rho_{B(H)}\ddot{u}_1^{B(H)}\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)u_{1,11}^{B(H)}-\left(\lambda_{B(H)}+\mu_{B(H)}\right)u_{3,13}^{B(H)}-\mu_{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}=$$

$$=\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)\left(3u_{1,1}^{B(H)}u_{1,11}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}u_{3,11}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}u_{3,33}^{B(H)}\right)+ \qquad (36)$$

$$+\mu_{B(H)}\left(u_{1,1}^{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}+u_{1,3}^{B(H)}u_{3,11}^{B(H)}+u_{1,3}^{B(H)}u_{3,33}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}\right)+$$

$$+2\left(\lambda_{B(H)}+\mu_{B(H)}\right)\left(u_{1,1}^{B(H)}u_{3,13}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}u_{3,13}^{B(H)}\right)+$$

$$+\left(\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)}\right)\left(u_{1,3}^{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}u_{1,13}^{B(H)}\right)+\lambda_{B(H)}u_{3,3}^{B(H)}u_{1,11}^{B(H)}.$$

В случае *подхода 3*, когда учитывается физическая нелинейность и не учитывается геометрическая, первое уравнение имеет вид

$$\rho_{B(H)}\ddot{u}_1^{B(H)}\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)u_{1,11}^{B(H)}-\left(\lambda_{B(H)}+\mu_{B(H)}\right)u_{3,13}^{B(H)}-\mu_{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}= \qquad (37)$$

$$=2\left(A_{B(H)}+3B_{B(H)}+C_{B(H)}\right)u_{1,1}^{B(H)}u_{1,11}^{B(H)}+\left[(1/2)A_{B(H)}+B_{B(H)}\right]\left(u_{1,1}^{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}+\right.$$

$$\left.+u_{1,3}^{B(H)}u_{3,33}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}+2u_{1,3}^{B(H)}u_{1,33}^{B(H)}+2u_{3,1}^{B(H)}u_{1,13}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}u_{3,11}^{B(H)}+u_{3,1}^{B(H)}u_{3,33}^{B(H)}\right)+$$

$$+\left[(1/2)A_{B(H)}+3B_{B(H)}+2C_{B(H)}\right]\left(u_{1,1}^{B(H)}u_{3,13}^{B(H)}+u_{3,3}^{B(H)}u_{3,13}^{B(H)}\right)+$$

$$+2\left(B_{B(H)}+C_{B(H)}\right)u_{3,3}^{B(H)}u_{1,11}^{B(H)}.$$

Пожалуй, самые важные новые качества полученных нелинейных уравнений состоят в их нелинейности и взаимосвязанности (линейные уравнения (1) невзаимосвязаны).

В уравнениях (34) – (37) линейные составляющие записаны в левых частях уравнений, тогда как правые части включают лишь квадратично нелинейные составляющие одинаковой структуры – произведения первой производной на вторую производную. Каждое уравнение содержит 12 нелинейных составляющих. Такие составляющие в первом и втором уравнениях не совпадают, поэтому их общее число составляет 24 (четыре варианта первых производных, умноженные на шесть вариантов вторых производных).

Напомним, что в случае зависимости компонентов перемещений от одной переменной (случай, характерный для плоских волн) три уравнения движения в перемещениях включают только три различающиеся нелинейные составляющие) [4, 9, 32, 35].

Следует также отметить, что значительное увеличение количества нелинейных составляющих было ранее зафиксировано при исследовании цилиндрических волн разных типов [28, 29, 35].

Введем потенциалы (2)

$$\begin{aligned} u_1^{B(H)}\left(x_1,x_3,t\right)&=\left[\varphi^{B(H)}\left(x_1,x_3,t\right)\right]_{,1}+\left[\psi^{B(H)}\left(x_1,x_3,t\right)\right]_{,3};\\ u_3^{B(H)}\left(x_1,x_3,t\right)&=\left[\varphi^{B(H)}\left(x_1,x_3,t\right)\right]_{,3}-\left[\psi^{B(H)}\left(x_1,x_3,t\right)\right]_{,1}. \end{aligned} \qquad (38)$$

Подставим представление (38) в уравнения (34),(35) и получим систему двух нелинейных уравнений относительно потенциалов (показано только первое уравнение, поскольку здесь сохраняется указанная ранее особенность перехода ко второму уравнению путем замены индексов)

$$\left[\rho_{B(H)}\ddot{\varphi}^{B(H)}-\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)\Delta\varphi^{B(H)}\right]_{,1}+\left[\rho_{B(H)}\ddot{\psi}^{B(H)}-\mu_{B(H)}\Delta\psi^{B(H)}\right]_{,3}= \tag{39}$$

$$=\left[3\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)+2\left(A_{B(H)}+3B_{B(H)}+C_{B(H)}\right)\right]\varphi_{,11}^{B(H)}\varphi_{,111}^{B(H)}+$$

$$+\left[\left(2\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)}\right)+\left(A_{B(H)}+4B_{B(H)}+2C_{B(H)}\right)\right]\left(\varphi_{,11}^{B(H)}\varphi_{,133}^{B(H)}+\varphi_{,33}^{B(H)}\varphi_{,133}^{B(H)}\right)+$$

$$+\left\{\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)}+\left[A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right]\right\}\left(3\varphi_{,13}^{B(H)}\varphi_{,113}^{B(H)}+\varphi_{,13}^{B(H)}\varphi_{,333}^{B(H)}\right)+$$

$$+\left[\lambda_{B(H)}+2\left(B_{B(H)}+C_{B(H)}\right)\right]\varphi_{,33}^{B(H)}\varphi_{,111}^{B(H)}+$$

$$+\left[\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}+\left((1/2)A_{B(H)}+B_{B(H)}\right)\right]\left(\psi_{,11}^{B(H)}\psi_{,111}^{B(H)}+\psi_{,33}^{B(H)}\psi_{,133}^{B(H)}\right)-$$

$$-\left[\mu_{B(H)}+\left((1/2)A_{B(H)}+B_{B(H)}\right)\right]\left(\psi_{,11}^{B(H)}\psi_{,133}^{B(H)}+\psi_{,33}^{B(H)}\psi_{,111}^{B(H)}\right)+$$

$$+2\left[\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)}+\left(A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right)\right]\psi_{,13}^{B(H)}\psi_{,113}^{B(H)}+$$

$$+\left[2\lambda_{B(H)}+5\mu_{B(H)}+3\left((1/2)A_{B(H)}+B_{B(H)}\right)\right]\left(\varphi_{,11}^{B(H)}\psi_{,113}^{B(H)}+\psi_{,33}^{B(H)}\varphi_{,113}^{B(H)}\right)+$$

$$+\left[\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}+\left((1/2)A_{B(H)}+B_{B(H)}\right)\right]\left(\varphi_{,11}\psi_{,333}+\varphi_{,33}\psi_{,333}+\psi_{,33}\varphi_{,333}\right)+$$

$$+\left[\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)}+\left(A_{B(H)}+2B_{B(H)}\right)\right]\left(-\varphi_{,13}\psi_{,111}+\varphi_{,13}\psi_{,133}+2\psi_{,13}\varphi_{,111}\right)-$$

$$-\left[\mu_{B(H)}+\left((1/2)A_{B(H)}+B_{B(H)}\right)\right]\left(\varphi_{,33}^{B(H)}\psi_{,113}^{B(H)}+\psi_{,11}^{B(H)}\varphi_{,333}^{B(H)}\right)-$$

$$-\left[\lambda_{B(H)}+4\mu_{B(H)}+3\left((1/2)A_{B(H)}+B_{B(H)}\right)\right]\psi_{,11}^{B(H)}\varphi_{,113}^{B(H)}.$$

Далее выбран подход 2 как более простой в записи

$$\left[\rho_{B(H)}\ddot{\varphi}^{B(H)}-\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)\Delta\varphi^{B(H)}\right]_{,1}+\left[\rho_{B(H)}\ddot{\psi}^{B(H)}-\mu_{B(H)}\Delta\psi^{B(H)}\right]_{,3}=$$

$$=(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)})\left(3\varphi_{,11}^{B(H)}\varphi_{,111}^{B(H)}-\psi_{,11}^{B(H)}\psi_{,133}^{B(H)}-\psi_{,33}^{B(H)}\psi_{,111}^{B(H)}\right)+$$

$$(2\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)})\left(\varphi_{,11}\varphi_{,133}+\varphi_{,33}\varphi_{,133}\right)+$$

$$(\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)})\left(3\varphi_{,13}\varphi_{,113}+2\psi_{,13}\psi_{,113}+\varphi_{,13}\varphi_{,333}\right)+$$

$$+\lambda_{B(H)}\varphi_{,33}^{B(H)}\varphi_{,111}^{B(H)}+\mu_{B(H)}\left(\psi_{,11}\psi_{,111}+\psi_{,33}\psi_{,133}\right);$$

$$\left[\rho_{B(H)}\ddot{\varphi}^{B(H)}-\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)\Delta\varphi^{B(H)}\right]_{,3}-\left[\rho_{B(H)}\ddot{\psi}^{B(H)}-\mu_{B(H)}\Delta\psi^{B(H)}\right]_{,1}= \tag{40}$$

$$= \left(2\lambda_{B(H)} + 3\mu_{B(H)}\right)\left(\varphi_{,11}\varphi_{,113} + \varphi_{,33}\varphi_{,113}\right) +$$

$$+(\lambda_{B(H)} + 3\mu_{B(H)})\left(3\varphi_{,13}\varphi_{,133} + 2\psi_{,13}\psi_{,133} + \varphi_{,13}\varphi_{,111}\right) +$$

$$+(\lambda_{B(H)} + 2\mu_{B(H)})\left(3\varphi_{,33}\varphi_{,333} - \psi_{,11}\psi_{,333} - \psi_{,33}\psi_{,113}\right) -$$

$$+\lambda_{B(H)}\varphi_{,11}\varphi_{,333} + \mu_{B(H)}\left(\psi_{,33}\psi_{,333} + \psi_{,11}\psi_{,113}\right).$$

Применим к анализу уравнений (39), (40) метод последовательных приближений (т.е. используем опыт анализа плоских нелинейных волн [5, 6, 9, 20, 32]). Решение для первого (линейного) приближения выберем в виде классического представления волны Стоунли (9)

$$\varphi^{(1)B}(x_1, x_3, t) = \tilde{A}_\varphi^B e^{-\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^B\right)^2}x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)} \equiv \tilde{A}_\varphi^B e^{-\beta_L^B x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)};$$

$$\psi^{(1)B}(x_1, x_3, t) = \tilde{A}_\psi^B e^{-\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_T^B\right)^2}x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)} \equiv \tilde{A}_\psi^B e^{-\beta_T^B x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)}; \qquad (41)$$

$$\varphi^{(1)H}(x_1, x_3, t) = \tilde{A}_\varphi^H e^{+\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_L^H\right)^2}x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)} \equiv \tilde{A}_\varphi^H e^{+\beta_L^H x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)};$$

$$\psi^{(1)H}(x_1, x_3, t) = \tilde{A}_\psi^H e^{+\sqrt{(k_S)^2 - \left(k_T^H\right)^2}x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)} \equiv \tilde{A}_\psi^H e^{+\beta_T^H x_3} e^{i(k_S x_1 - \omega t)}.$$

Итак, в первом приближении потенциалы имеют вид, соответствующий гармонической волне с частотой ω и волновым числом k, затухающей по экспоненциальному закону при удалении от плоскости $x_1 = 0$ (разному для верхней и нижней полуплоскости).

Уравнения второго приближения можно записать в виде

$$\Delta\left[\ddot{\varphi}^{B(H)(2)} - \left(\omega / k_L^{B(H)}\right)^2 \Delta\varphi^{B(H)(2)}\right] = \left(A_\varphi^{B(H)(1)}\right)^2 e^{2i\left(k_{lin}^{B(H)}x_1 - \omega t\right)} \times$$

$$\times\left[M_\varphi^{B(H)L} e^{-2\sqrt{\left(k_{lin}^{B(H)}\right)^2 - k_L{}^2}x_3} + M_\varphi^{B(H)T} e^{-2\sqrt{\left(k_{lin}^{B(H)}\right)^2 - k_T{}^2}x_3} + \right.$$

$$\left. + M_{\varphi\psi}^{B(H)LT} e^{-\left(\sqrt{\left(k_{lin}^{B(H)}\right)^2 - k_L{}^2} + \sqrt{k_{lin}{}^2 - k_T{}^2}\right)x_3}\right];$$

$$\Delta\left[\ddot{\psi}^{B(H)(2)} - \left(\omega / k_T^{B(H)}\right)^2 \Delta\psi^{B(H)(2)}\right] = -i\left(A_\psi^{B(H)(1)}\right)^2 e^{2i\left(k_{lin}^{B(H)}x_1 - \omega t\right)} \times \qquad (42)$$

$$\times\left[M_\psi^{B(H)L} e^{-2\sqrt{\left(k_{lin}^{B(H)}\right)^2 - k_L{}^2}x_3} + M_\psi^{B(H)T} e^{-2\sqrt{\left(k_{lin}^{B(H)}\right)^2 - k_T{}^2}x_3} + \right.$$

$$\left. + M_{\psi\varphi}^{B(H)TL} e^{-\left(\sqrt{\left(k_{lin}^{B(H)}\right)^2 - k_L{}^2} + \sqrt{\left(k_{lin}^{B(H)}\right)^2 - k_T{}^2}\right)x_3}\right].$$

$$M_{\varphi}^{B(H)L} = -\frac{2}{\rho_{B(H)}}\times$$

$$\times\left\{3\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)\left(k^6+\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^6-3k^2\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^4\right)+\left(5\lambda_{B(H)}+12\mu_{B(H)}\right)k^4\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^2\right\};$$

$$M_{\varphi}^{B(H)T} = -\frac{2}{\rho_{B(H)}}\times$$

$$\times\left\{\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)\left(k^6-k^2\left(k_{\psi}^{B(H)}\right)^4+\left(k_{\psi}^{B(H)}\right)^6\right)+\left(3\lambda_{B(H)}+8\mu_{B(H)}\right)k^4\left(k_{\psi}^{B(H)}\right)^2\right\};$$

$$M_{\varphi\psi}^{B(H)LT} = \frac{2i}{\rho_{B(H)}}\left\{\left(2\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)}\right)k^5k_{\varphi}^{B(H)}-\mu_{B(H)}\left(k^5k_{\psi}^{B(H)}-k\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^3\left(k_{\psi}^{B(H)}\right)^2\right)+\right.$$

$$+\left(\lambda_{B(H)}+4\mu_{B(H)}\right)\left(k^3\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^3+k^3\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^2k_{\psi}^{B(H)}\right)-\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)k^3\left(k_{\psi}^{B(H)}\right)^3-$$

$$\left.-\left(3\lambda_{B(H)}+8\mu_{B(H)}\right)k^3k_{\varphi}k_{\psi}^2-4\left(\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)}\right)kk_{\varphi}^4k_{\psi}+\left(2\lambda_{B(H)}+5\mu_{B(H)}\right)kk_{\varphi}^2k_{\psi}^3\right\};$$

$$M_{\psi}^{B(H)L} = \frac{4i}{\rho_{B(H)}}\left\{-\left(2\lambda_{B(H)}+3\mu_{B(H)}\right)k^2\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^4+\lambda_{B(H)}k^4\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^2\right\}; \tag{43}$$

$$M_{\psi}^{B(H)T} = -\frac{2i}{\rho_{B(H)}}\left\{\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)k^5k_{\psi}^{B(H)}+\mu_{B(H)}k^3\left(k_{\psi}^{B(H)}\right)^3\right\};$$

$$M_{\psi\varphi}^{B(H)TL} = -\frac{2}{\rho_{B(H)}}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}\right)\right]\left(2k^6+k^4\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^2+k^4k_{\varphi}^{B(H)}k_{\psi}^{B(H)}+k_{\varphi}^4\left(k_{\psi}^{B(H)}\right)^2+k_{\varphi}^3\left(k_{\psi}^{B(H)}\right)^3\right)+\right.$$

$$+\mu_{B(H)}\left(k^2\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^4+k^2k_{\varphi}^{B(H)}\left(k_{\psi}^{B(H)}\right)^3\right)-$$

$$\left.-\left(2\lambda_{B(H)}+5\mu_{B(H)}\right)k^2\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^3k_{\psi}^{B(H)}-\left(4\lambda_{B(H)}+9\mu_{B(H)}\right)k^2\left(k_{\varphi}^{B(H)}\right)^2\left(k_{\psi}^{B(H)}\right)^2\right\}.$$

Подстановка формул (41) в уравнения (42) и последующее решение дают достаточно простые представления потенциалов во втором приближении

$$\varphi^{B(H)(2)}\left(x_1,x_3,t\right)=\frac{1}{4}x_1x_3\left(A_{\varphi}^{B(H)(1)}\right)^2E^2\frac{\rho_{B(H)}}{\lambda_{B(H)}+2\mu_{B(H)}}\times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{4\left(k_L^{B(H)}\right)^2}\frac{k_{\varphi}^{B(H)}x_1+ik_{lin}^{B(H)}x_3}{\left(k_{\varphi}^{B(H)}x_1\right)^2+\left(k_{lin}^{B(H)}x_3\right)^2}M_{\varphi}^{B(H)L}\left(E_L^{B(H)}\right)^2-\right.$$

$$-\frac{1}{4\left(k_T^{B(H)}\right)^2}\frac{k_\psi x_1+ik_{lin}x_3}{\left(k_\psi^{B(H)}x_1\right)^2+\left(k_{lin}^{B(H)}x_3\right)^2}M_\varphi^{B(H)T}\left(E_T^{B(H)}\right)^2+ \tag{44}$$

$$\left.+\frac{1}{k_\varphi^{B(H)}k_\psi^{B(H)}-\left(k_{lin}^{B(H)}\right)^2}\frac{2x_1\left(k_\varphi+k_\psi\right)+4ik_{lin}x_3}{\left[2x_1\left(k_\varphi^{B(H)}+k_\psi^{B(H)}\right)\right]^2+16\left(k_{lin}^{B(H)}x_3\right)^2}M_{\varphi\psi}^{B(H)LT}E_L^{B(H)}E_T^{B(H)}\right\};$$

$$\psi^{(2)}\left(x_1,x_3,t\right)=\frac{1}{4}x_1x_3\left(A_\psi^{(1)}\right)^2E^2\frac{\rho}{\mu}\left\{-\frac{1}{4k_L^2}\frac{k_\varphi x_1+ik_{lin}x_3}{\left(k_\varphi x_1\right)^2+\left(k_{lin}x_3\right)^2}M_\psi^L E_L^2-\right.$$

$$-\frac{1}{4k_T^2}\frac{k_\psi x_1+ik_{lin}x_3}{\left(k_\psi x_1\right)^2+\left(k_{lin}x_3\right)^2}M_\psi^T E_T^2+ \tag{45}$$

$$\left.+\frac{1}{k_\varphi k_\psi-k_{lin}^2}\frac{2x_1\left(k_\varphi+k_\psi\right)+4ik_{lin}x_3}{\left[2x_1\left(k_\varphi+k_\psi\right)\right]^2+16\left(k_{lin}x_3\right)^2}M_{\psi\varphi}^{TL}E_LE_T\right\}.$$

Таким образом, решение в рамках двух первых приближений имеет вид (41), (44), (45). Характерной нелинейной особенностью является зависимость второго приближения от квадрата амплитуды и координат, а также присутствие второй гармоники.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано нові нелінійні рівняння, які описують поширення плоских хвиль вздовж площини розділу двох півпросторів з відмінними густинами та пружними властивостями (поверхневих хвиль Стоунлі). Нелінійність введено через п'ятиконстантний потенціал Мурнагана, що включає як геометричну, так і фізичну нелінійності. Методом послідовних наближень в рамках перших двох наближень отримано розв'язок нелінійних хвильових рівнянь, що включає другі гармоніки.

1. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966. – 168 с. (*Viktorov I.A.* Rayleigh and Lamb waves. – New York: Plenum Press, 1967. – 154 p.)
2. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672с.
4. *Рущицький Я.Я., Цурпал С.І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Ін-т механіки ім. С.П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
5. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. – Amsterdam: North Holland, 1973. – 436 p.
6. *Bedford A., Drumheller D.S.* Introduction to Elastic Wave Propagation. – Chichester: John Wiley, 1994. – 297 p.
7. *Biot M.A.* The interaction of Rayleigh and Stoneley waves in the ocean bottom // Bulletin of the Seismolog. Society of America. – 1952. – **42**, N1. – P. 81 – 93.
8. *Cagniard L.* Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. – New York: McGraw-Hill Book Co., 1962. – 452 p.
9. *Cattani C., Rushchitsky J.J.* Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro or Nanostructure. – Singapore-London: World Scientific, 2007. – 466 p.
10. *Chapman C.H.* Fundamentals of seismic wave propagation. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 608 p.

11. *Drumheller D.S.* Introduction to Wave Propagation in Nonlinear Fluids and Solids. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 513 p.
12. *Fedorov F.I.* Theory of Elastic Waves in Crystals. – New York: Plenum Press, 1968. – 388 p.
13. *Graff K.F.* Wave Motion in Elastic Solids. – Dover: London, 1991. – 300 p.
14. *Holzapfel G.A.* Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2006. – 303 p.
15. *Harris J.G.* Linear Elastic Waves. Cambridge Texts in Applied Mathematics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2001. – 165 p.
16. *Hudson J.A.* The Excitation and Propagation of Elastic Waves. – Cambridge: Cambridge University Press, 1980. – 236 p.
17. *Jian-Fei L., Dong-Sheng J.* Dynamic response of an offshore pile to pseudo-Stoneley waves along the interface between a poroelastic seebad and seewater // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2010. – **30**, N4. – P.184-201.
18. *Kiselev A.P., Parker D.F.* Omnidirectional Rayleigh, Stoneley and Scholte waves with general time dependence // Proc. Royal Soc. A. – 2010. – **466**. – P. 2241 – 2258.
19. *Lempriere B.M.* Ultrasound and Elastic Waves: Frequently Asked Questions. – New York: Academic Press, 2002. – 350 p.
20. *Maugin G.* Nonlinear Waves in Elastic Crystals. – Oxford: Oxford University Press, 2000. – 314 p.
21. *Mendez E.F., Carbajal-Romero M., Flores-Guzman N., Sanchez-Martinez R., Rodriguez-Castella nos A.* Rayleigh's, Stoneley's, and Scholte's interface waves in elastic models using a boundary element method // J. Appl. Math. – 2012. – P. 1 – 15. doi:10.1155/2012/313207
22. *Moiseyenko R.P., Liu J., Benchabane S., Declercq N.F., Laude V.* Scholte-Stoneley waves on corrugated surfaces and on phononic crystal gratings // Proc. Acoustic 2012 Conference (23 – 27 April, 2012, Nantes, France). – P.3677 – 3681.
23. *Murnaghan F.D.* Finite deformation in elastic solid. – New York: John Wiley, 1951. – 140 p.
24. *Norris A.N.* Stoneley wave attenuation and dispersion in permeable formations // Geophysics. – 1989. – **54**, N3. – P. 330 – 341.
25. *Ranjith K.* Destabilization of long-wavelength Love and Stoneley waves in slow sliding // Int. J. Solids Struct. – 2009. – **45**. – P. 3086 – 3092.
26. *Royer D., Dieulesaint E.* Elastic Waves in Solids (I,II). Advanced Texts in Physics. – Berlin: Springer, 2000. – 390 p., 446 p.
27. *Rushchitsky J.J.* Interaction of waves in solid mixtures // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, N 2. – P. 35 – 74.
28. *Rushchitsky J.J.* Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves: Derivation of wave equations for plane-strain state // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N5. – P. 496 – 505.
29. *Rushchitsky J.J.* Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Derivation of Wave Equations for Axisymmetric and Other States // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N6. – P. 646 – 656.
30. *Rushchitsky J.J.* Theory of Waves in Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS. – 2011. – 280p.
31. *Rushchitsky J.J., Khotenko E.A.* On the Role of Boundary Conditions in a Nonlinear Analysis of Rayleigh Wave // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N1. – P. 305 – 318.
32. *Rushchitsky J.J., Khotenko I.N., Sinchilo S.V.* Generation of the Second, Fourth, and Eighth Harmonics by a Hyperelastic Longitudinal Plane Wave: Numerical Simulation // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N2. – P.195 – 204.
33. *Rushchitsky J.J.* Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects // Int. J. Appl. Math. and Mech. – 2013. – **9**, N6. – P.1 – 48.
34. *Rushchitsky J.J.* On Nonlinear Description of the Love Elastic Wave // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N6. – P. 629 – 640.
35. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 453 p.
36. *Schölte F.G.* The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves // Geophys. J. Int. – 1947. – **5**, Supplement 5. – P. 120 – 126.
37. *Stevens J.L., Day S.M.* Shear velocity logging in slow formations using the Stoneley wave // Geophysics. – 1986. – **51**, N2. – P.137 – 147.
38. *Stoneley R.* Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids // Proc. Royal Soc. A. – 1924. – 106. – P. 416 – 428.
39. *Zhao X.M., Toksoz M.N., Cheng C.H.* Stoneley wave propagation across borehole permeability he terogeneities // M.I.T. Borehole Acoustic and Logging Consortium. – 1994. – P. 227 – 270.

Поступила 27.12.2012 Утверждена к печати 29.05.2014