

УДК 532.591

РАССЕЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПОДВОДНЫМ УСТУПОМ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ, Т. Н. ЩЕРБАК, В. И. НИКИШОВ

*Институт гидромеханики НАН Украины,
вул. Желябова, 8/4, 03680, МСП, Київ-180, Україна
e-mail: vinihm@gmail.com*

Получено 12.07.2015

В работе развит метод улучшенной редукции для расчета рассеяния поверхностных гравитационных волн при резком изменении глубины потока, т.е. на уступе. Этот метод заключается в том, что учитывается особенность распределения скорости в окрестности острой грани уступа. В данном случае эта особенность имеет степенной характер. Для решения задачи используется представление решения в ряд по собственным функциям задачи. Асимптотические свойства неизвестных коэффициентов разложения находятся на основе выделения локальной особенности по скоростям в вершине уступа. Показано, что использование метода улучшенной редукции позволяет уменьшить объем расчетов и повысить качество получаемого решения. Проведено сравнение с известными данными других авторов. Рассмотрены плоско-волновое и длинноволновое приближения. Показано, что для малых длин волн необходимо учитывать нераспространяющиеся моды.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *поверхностные гравитационные волны, рассеяние, уступ, собственные функции*

У роботі розвинуто метод поліпшеної редукції для розрахунку розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль при різкій зміні глибини потоку, тобто на уступі. Цей метод полягає в тому, що враховується особливість розподілу швидкості в околиці гострої грані уступу. У даному випадку ця особливість має степеневий характер. Для вирішення задачі використовується представлення рішення в ряд по власним функціям задачі. Асимптотичні властивості невідомих коефіцієнтів розкладання знаходяться на основі виділення локальної особливості за швидкостями у вершині уступу. Показано, що використання методу поліпшеної редукції дозволяє зменшити обсяг розрахунків і підвищити якість одержуваного рішення. Проведено порівняння з відомими даними інших авторів. Розглянуто плоско-хвильове і довгохвильове наближення. Показано, що для малих довжин хвиль необхідно враховувати моди, що не поширюються.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *поверхневі гравітаційні хвилі, розсіювання, уступ, власні функції*

The paper developed a method of improved reduction for calculating the scattering of surface gravity waves on a sharp change in flow depth, i.e. on the step. This method is taken into account that the feature of the velocity distribution in the vicinity of the sharp edges of the step. In this case, this feature is a power function. To solve the problem the solution is represented as a series of eigenfunctions. The asymptotic properties of the unknown coefficients of the expansion are based on the extraction of the local features of the velocity at the top of the step. It is shown that the use of improved reduction lets us to reduce the amount of calculation and improve the quality of the solutions. A comparison with the known data of other authors is accomplished. A plane-wave and long-wave approximations is fulfilled. It is shown that non-propagating modes must be taken into account when waves with small wavelengths are considered.

KEY WORDS: *surface gravity waves, scattering, step, eigenfunctions*

ВВЕДЕНИЕ

Проблема распространения поверхностных гравитационных волн в водоемах конечной глубины при наличии различного рода топографических неоднородностей донной поверхности или погруженных в жидкость (в том числе частично) искусственных конструкций, предназначенных для защиты береговой зоны от разрушения, остается актуальной и в настоящее время, о чем свидетельствуют многочисленные публикации результатов исследований. Среди работ, посвященных данной тематике можно выделить класс задач, в которых рассматриваются волновые движения в занимаемой жидкостью области, схематически ра-

зделенной на отдельные области, имеющих вертикальные границы, а глубина в каждой из них является постоянной. К ним относятся задачи распространения и рассеяния поверхностных волн на прямоугольном препятствии, т.е. при резком изменении глубины бассейна, на плавающем препятствии, на впадине донной поверхности и др. Интересно отметить, что влияние резких изменений глубины на шельфе может также приводить к изменению типа обрушения волн. Это используется при создании специальных зон искусственных рифов, предназначенных для серфинга. Ряд таких конструкций обсуждается в работе [1].

Типичный подход к задачам рассеяния поверхностных волн на препятствиях, т.е. при наличии резкой смены глубины бассейна, заключается в

представлении решения для потенциала скорости в каждой из областей в виде разложений по системе собственных функций, характерных для конкретной области, а затем использование условий сопряжения этих решений на вертикальных границах. В результате задача сводится к бесконечной системе линейных интегральных уравнений. Далее, используя условие ортогональности собственных функций, после применения операции редукции получаем конечномерную систему алгебраических уравнений, решение которой находится с помощью метода наименьших квадратов [8], который является, по сути, интегральным методом, или путем непосредственного решения указанной системы уравнений численным методом.

Работа [5] была одной из первых, в которой был применен описанный подход к решению задачи о рассеянии поверхностных волн, падающих нормально на подводный порог и неподвижную поверхностную преграду. Этот подход был развит в работе [3], в которой изучалась дифракция волн на двумерной подводной прямоугольной впадине для случая наклонного падения. Особое внимание было сосредоточено на рассмотрении случая больших углов падения.

Развитый подход использован в ряде работ при изучении рассеяния поверхностных волн на пороге (впадине) произвольной конфигурации. В этом случае поверхность порога заменялась рядом ступенек прямоугольной формы, и в каждой области, соответствующей данной ступеньке, строилось решение на основе описанного выше подхода [4, 6]. В указанном методе решения задачи, заключающемся в разбиении области, занимаемой препятствием, на более мелкие подобласти, имеется, однако, естественное ограничение. Оно связано с требованием, чтобы области, занимаемые неоднородными волнами (нераспространяющимися модами), которые излучаются около сторон разрывов, были малыми по сравнению с расстояниями между ступеньками. Размеры этих областей можно оценить численно путем вычисления относительного вклада неоднородных волн, которые эмитируются от каждой из двух близлежащих ступенек [7].

Модификация изложенного выше подхода осуществлена в работе [9], в которой рассмотрена задача о рассеянии волн рядом донных ступенек. Решение рассматривается для горизонтальной скорости и используется представление ее в виде разложения по системе собственных функций, в результате выполнения условий сопряжения и нормированности собственных функций задача сводится к решению системы алгебраических урав-

нений.

Распространение монохроматических поверхностных волн над областью с произвольной донной топографией, изменяющейся в одном направлении, рассмотрено в работе [10]. Гладкий профиль донной поверхности представлялся в виде серии уступов, отделенных вертикальными поверхностями. Приведена система в общем виде согласно вышеописанной методике. Для решения используется приближенный подход, разработанный в работе [11], в котором рассматриваются только распространяющиеся моды на каждой стороне уступа и полагается, что нераспространяющиеся моды, которые формируются на рассматриваемом уступе и имеют вблизи его максимальную амплитуду, затухают при достижении других уступов. Было показано, что использованный подход является эффективным в длинноволновом приближении, в коротковолновом приближении приемлемые результаты получаются в случае, когда высота уступа значительно меньше глубины жидкости. Получаемое решение, строго говоря, является справедливым вдали от вертикальных границ, т.е. в области, где влияние неоднородных волн мало.

В описанных выше подходах задача рассеяния поверхностных волн подводным препятствием сводится к бесконечной системе обыкновенных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения искомых величин в ряд по собственным функциям. Характерной особенностью рассмотренных задач является наличие угловых точек на препятствии. В этих точках выражение для скорости жидкости имеет особенность (корневую или степенную в зависимости от характера границы) [12]. При существовании локальных особенностей в характеристиках волновых полей, как правило, возникает неоднозначность в решении граничной задачи. При этом возможно построение нескольких решений, удовлетворяющих основным уравнениям задачи и отличающихся только скоростью стремления к бесконечности той или иной характеристики поля. Тогда для построения единственного решения необходимо определить характер особенности.

Частное решение уравнения Лапласа для потенциала скорости вблизи угловой точки A (см. рис. 1) в полярной системе координат с началом в угловой точке:

$$\Delta \Phi(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0,$$

можно представить в виде

$$\Phi_\alpha = r^\alpha (A \sin \alpha \theta + B \cos \alpha \theta), \quad (1)$$

где α – произвольное вещественное число.

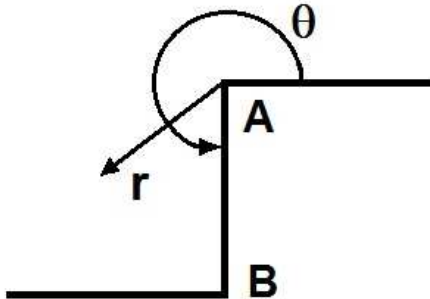


Рис. 1. Расположение системы координат относительно угловой точки

Удовлетворяя граничным условиям на стенках угла, в данном случае условиям непротекания:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_\alpha(r, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{3\pi}{2}$, находим $B = 0$ и возможные значения параметра α_n , $\alpha_n = 2n/3$. При этом постоянная A в каждом частном решении остается произвольной.

Поскольку система функций $\cos \alpha_n \theta (n = 1, 2, \dots)$ является полной в интервале $0 \leq \theta \leq 3\pi/2$, то искомое решение уравнения Лапласа можно представить в форме бесконечного ряда [13]:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\alpha_n} \cos \alpha_n \theta. \quad (3)$$

Тогда выражения для компонент скорости среды имеют вид:

$$v_r = \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n r^{\alpha_n - 1} \cos \alpha_n \theta, \quad (4)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial \theta} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n r^{\alpha_n - 1} \sin \alpha_n \theta. \quad (5)$$

Анализ показывает, что когда размер угла превышает число π (в рассматриваемом случае $3\pi/2$), в выражениях (3) и (4) появляется слагаемое,

содержащее множитель r с показателем степени меньше нуля (в данном случае $-1/3$), т.е. при подходе к острой грани скорость жидкости стремится к бесконечности. В то же время, в точке B угол составляет меньше π , и выражение для скорости не имеет особенностей.

Особенно важным становится достижение необходимой точности вычислений в задачах рассеяния волн системой вертикальных барьеров, когда рассматриваются резонансные явления, связанные с возникновением стоячей волны в промежутке между барьерами. Как было указано выше, использование свойств ортогональности системы собственных функций приводит задачу к необходимости решения бесконечной системы алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений. Традиционные подходы к решению такой системы – это метод простой редукции. Однако, как указано в работах [14, 15], для получения точности до второго знака приходится рассматривать достаточно большое количество уравнений, порядка $N = 400$. Это наглядно продемонстрировано в работе [16], в которой изучалось рассеяние волн системой вертикальных барьеров. Было показано, что для определения частоты запираания волн высокой частоты необходимо использовать более 400 уравнений.

В данной работе рассматривается задача рассеяния поверхностных гравитационных волн одиночным уступом в случае нормального падения без ограничений на высоту уступа. Выполнено выделение описанной выше особенности по скоростям в угловой точке. На основе разложения этой особенности в ряд по собственным функциям задачи находится асимптотика неизвестных коэффициентов разложения для больших значений N . Это позволило улучшить качество решения при использовании меньшего количества уравнений, в то же время, вклад высокочастотных составляющих производится асимптотически. Проведено сравнение применяемого метода улучшенной редукции по сравнению с обычной редукцией. Осуществлена проверка точности выполнения граничных условий и условий сопряжения. Показаны преимущества метода по сравнению с методом обычной редукции. Выполнено сравнение с известными результатами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим рассеяние монохроматических поверхностных гравитационных волн в канале при резком изменении уровня донной поверхности, т.е. на уступе. На уступ падает распространяющаяся

вдоль горизонтальной оси x из $x = -\infty$ волна с частотой ω_{dim} . Глубина жидкости до уступа равна H_1 и после – H_2 . Расположение уступа и системы координат с началом отсчета на свободной поверхности представлено на рис. 2. Жидкость полагается идеальной несжимаемой.

Поведение линейных поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, описывается уравнением Лапласа для потенциала скорости [17]:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

с соответствующими граничными условиями

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H, \quad (8)$$

где g – ускорение силы тяжести.

Полагаем, что переменные изменяются во времени по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$. Разделяя переменные в уравнении (6) и удовлетворяя граничным условиям (7) и (8), получаем выражение для волны, распространяющейся в положительном направлении вдоль оси x :

$$\Phi = -\frac{ia g}{\omega} \frac{\text{ch } k(z+H)}{\text{ch } kh} \times e^{i(kx - \omega t)}, \quad (9)$$

где a – амплитуда падающей волны; здесь также учтен сдвиг по фазе между отклонением свободной поверхности от положения равновесия и потенциалом. Волновое число падающей волны k является действительным положительным корнем дисперсионного уравнения

$$\omega_{dim}^2 = kg \text{th } kH. \quad (10)$$

Приведем все величины к безразмерному виду, введя характерные масштабы длины $L_{ch} = H_1$ и времени $T_{ch} = \sqrt{H_1/g}$, где H_1 – глубина канала до уступа. Тогда в безразмерном виде выражения для потенциала (9) в области 1, т.е. при $x < 0$, и дисперсионного уравнения (10) можно представить следующим образом (гармонический сомножитель по времени опущен):

$$\Phi_1^{pr} = \varphi_1(z) e^{i k_1 x} = \frac{a}{\omega} \varphi_1(z) e^{i k_1 x}, \quad (11)$$

$$\varphi_1(z) = \frac{\text{ch } k_1(z+H_1)}{\text{ch } k_1 H_1}, \quad (12)$$

$$\omega^2 = k_1 H_1 \text{th } k_1 H_1.$$

Для удобства величина H_1 оставлена в прежнем виде, однако ее значение равно единице.

Величина k_1 является действительным положительным корнем дисперсионного уравнения (12). Это уравнение имеет также бесконечное множество чисто мнимых корней κ_n , которые находятся как решение следующего уравнения:

$$\omega^2 = -\kappa_n H_1 \text{tg } \kappa_n H_1. \quad (13)$$

Корни уравнения (13) характеризуют неоднородные (нераспространяющиеся) волны, которые возбуждаются по обе стороны барьера. Указанным корням дисперсионного уравнения ($ik_1, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N, \dots$) соответствует ортогональная система функций

$$\begin{aligned} &\cos k_1(z+H_1), \cos \kappa_1(z+H_1), \dots, \\ &\cos \kappa_N(z+H_1), \dots \end{aligned}$$

Энергия, связанная с падающей волной, которая сталкивается с волновым барьером, частично переносится за барьер и частично отражается. Результирующее волновое движение в области 1 (рис. 2) состоит из падающей и отраженной волн, в то время как в области 2 формируется прошедшая волна. Приводя выражение для потенциала в области 2 к безразмерному виду, используя те же, что и ранее характерные параметры, нормированное по отношению к потенциалу падающей волны, значение потенциала, отвечающее распространяющейся во второй области моде, можно представить следующим образом:

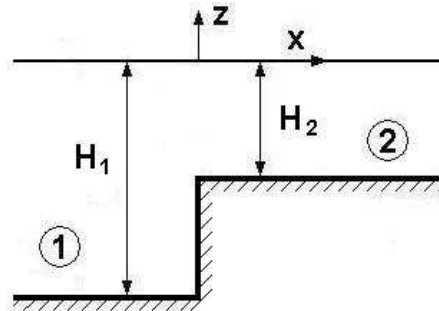


Рис. 2. Расположение системы координат относительно угловой точки

$$\Phi_2^{pr} = T \varphi_2(z) e^{i k_2 x}, \quad (14)$$

где

$$\varphi_2(z) = \frac{\text{ch } k_2(z+H_2)}{\text{ch } k_2 H_2},$$

T – коэффициент прохождения волны.

Действительное волновое число, отвечающее распространяющейся моде, в данном случае определяется следующим дисперсионным уравнением:

$$\omega^2 = k_2 H_2 \operatorname{th} k_2 H_2. \quad (15)$$

Дисперсионное уравнение (15), как и уравнение (12), имеет множество чисто мнимых корней α_n ,

$$\omega^2 = -\alpha_n H_2 \operatorname{tg} \beta_n H_2. \quad (16)$$

Данным корням дисперсионного уравнения ($ik_2, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \dots$) соответствует следующая система ортогональных собственных функций:

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch} k_2(z + H_2), \operatorname{cos} \alpha_1(z + H_2), \dots, \\ & \operatorname{cos} \alpha_N(z + H_2), \dots \end{aligned}$$

Суммируя итоги, с учетом существования нераспространяющихся мод запишем решения в области 1 ($x < 0$):

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & (e^{i k_1 x} + R e^{-i k_1 x}) \varphi_1(z) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\kappa_n x} B_n f_n(z), \end{aligned} \quad (17)$$

и в области 2 ($x > 0$):

$$\Phi_2 = T e^{i k_1 x} \varphi_2(z) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n x} C_n \psi_n(z). \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{\operatorname{cos} \kappa_n(z + H_1)}{\operatorname{cos} \kappa_n H_1}, \\ \psi_n(z) &= \frac{\operatorname{cos} \alpha_n(z + H_2)}{\operatorname{cos} \alpha_n H_2}, \end{aligned}$$

R – коэффициент отражения волны соответственно; коэффициенты B_n и C_n определяются из условий сопряжения решений (равенство скоростей и давлений) в плоскости $x = 0$, которые имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, & -H_2 < z < 0, \\ 0, & -H_1 < z < -H_2. \end{cases} \quad (19)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad -H_2 < z < 0. \quad (20)$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Традиционный путь решений данной задачи с помощью их разложения в ряд по собственным функциям заключается в подстановке решений,

описывающих волновое движение в каждой из областей 1 и 2, т.е. выражений (17) и (18), в условия сопряжения (19) и (20). Получаемая система функциональных уравнений приводится к алгебраическому виду на основе использования условий ортогональности собственных функций. В результате получаем бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов B_n и C_n , которые решаются, как правило, методом редукции. Однако, при наличии особенностей по скорости в угловой точке, сходимость решения плохая и приходится рассматривать систему уравнений высокого порядка, о чем шла речь выше.

В отличие от обычного метода редукции, в работе предлагается применить метод улучшенной редукции, который заключается в использовании асимптотических представлений для коэффициентов разложения B_n и C_n для больших значений n . Эти асимптотические представления находятся на основе рассмотрения конкретного вида сингулярности, возникающего в задаче. Для рассматриваемого типа задач характерно существование локальных особенностей по скоростям. Стремление к бесконечности скорости частицы жидкости в окрестности вершины барьера в рамках модели идеальной жидкости с малыми амплитудами ставит вопрос о достоверности полученного решения. В связи с этим отметим, что возникновение локальных особенностей следует рассматривать как “расплату” за слишком грубое моделирование реального процесса. При этом имеется в виду не только моделирование свойств среды (идеальная жидкость), но и постановка граничной задачи в целом, т.е. речь идет о моделировании характера границы, которая представляет собой также существенную идеализацию [18].

При существовании локальных особенностей в характеристиках волновых полей, как правило, возникает неоднозначность в решении граничной задачи. При этом возможно построение нескольких решений, удовлетворяющих основным уравнениям задачи и отличающихся только скоростью стремления к бесконечности той или иной характеристики поля. Тогда для построения единственного решения необходимо определить характер особенности. Как показано выше, выражение для скорости в окрестности вершины барьера пропорционально $r^{-1/3}$ (здесь r – радиальная координата локальной полярной системы координат с началом в вершине барьера).

В плоскости сопряжения $x = 0$ выражение для горизонтальной компоненты скорости в области 1, как следует из (17), имеет вид

$$U_1|_{x=0} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = ik_1(1-R) \times \varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n B_n f_n(z). \quad (21)$$

В выражениях для скорости (4) и (5) имеются слагаемые, которые характеризуются множителем $r^{-1/3}$, в частности, распределение скорости в окрестности вершины барьера в плоскости $x = 0$ имеет вид

$$U_1(z)|_{x=0} = \frac{V_1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} \quad \text{при } z \rightarrow -H_2 + 0, \quad (22)$$

где V_1 – некоторая константа, подлежащая определению.

Кроме того,

$$U_1(z)|_{x=0} = 0 \quad \text{при } z \rightarrow -H_2 - 0. \quad (23)$$

Запишем выражение (21) в виде

$$U_1|_{x=0} = ik_1(1-R) \varphi_1(z) + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n B_n f_n(z) - \frac{V_1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} \right] + \frac{V_1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}}.$$

Представим функцию $1/(H_2^2 - z^2)^{1/3}$ в виде ряда по описанной выше системе ортогональных функций задачи Штурма-Лиувилля:

$$\frac{1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} = E_0 \varphi_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n f_n(z). \quad (24)$$

После ряда преобразований получаем

$$U_1|_{x=0} = ik_1(1-R) \varphi_1(z) + \sum_{n=1}^N \kappa_n B_n f_n(z) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n f_n(z). \quad (25)$$

Здесь сделано предположение, что при больших значениях n (больших некоторого N) характер постоянных разложения B_n определяется поведением скорости вблизи ребра. При достаточно большом N можно записать

$$\kappa_n B_n \cong V_1 E_n \quad \text{при } n \geq N. \quad (26)$$

Для нахождения коэффициентов E_n умножаем выражение (24) на собственную функцию $\cos \kappa_m(z + H_1)$ и интегрируем от $-H_1$ до 0.

С учетом свойств ортогональности собственных функций получаем

$$\int_{-H_1}^0 \frac{\cos \kappa_m(z + H_1)}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} dz = \frac{E_m}{M_m \cos \kappa_m H_1}, \quad (27)$$

где

$$M_m = \frac{4 \kappa_m}{\text{sh } 2 \kappa_m H_1 + 2 \kappa_m H_1}.$$

В то же время, используя табличные интегралы [19]

$$\int_0^a (a^2 - t^2)^{\beta-1} \begin{Bmatrix} \sin bt \\ \cos bt \end{Bmatrix} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2a}{b}\right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \begin{Bmatrix} H_{\beta-1/2}(ab) \\ J_{\beta-1/2}(ab) \end{Bmatrix},$$

где $\Gamma(\beta)$ – гамма-функция, $H_{\beta-1/2}(ab)$ – модифицированная функция Струве, $J_{\beta-1/2}(ab)$ – функция Бесселя первого рода, находим

$$E_m = \sqrt{M_m} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2H_2}{k_1}\right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \times [\cos \kappa_m H_1 \times J_{1/6}(\kappa_m H_2) + \sin \kappa_m H_1 \times H_{1/6}(\kappa_m H_2)].$$

Используя асимптотики для функций Струве и Бесселя для больших значений κ_m , которые пропорциональны m [15] (Linton, 2001), получаем следующее выражение для коэффициентов E_m

$$E_m = I_1 \cdot M_m \cos \kappa_m H_1,$$

где

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2H_2}{k_n}\right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \times [S_1 \cos \kappa_n H_1 + (S_2 + S_3) \sin \kappa_n H_1],$$

$$S_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa_n H_2}} \left(\cos \tilde{\kappa}_n - \frac{1}{9} \frac{1}{\kappa_n H_2} \sin \tilde{\kappa}_n \right),$$

$$S_2 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa_n H_2}} \left(\sin \tilde{\kappa}_n + \frac{1}{9} \frac{1}{\kappa_n H_2} \cos \tilde{\kappa}_n \right),$$

$$S_3 \approx \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{2}{\kappa_n H_2}\right)^{5/6},$$

$$\tilde{\kappa}_n = \kappa_n H_2 - \frac{\pi}{3},$$

Аналогичным образом постушаем и с выражением для горизонтальной компоненты скорости в области 2. Распределение скорости в окрестности вершины барьера в плоскости $x = 0$ описывается следующим выражением:

$$U_2(z)|_{x=0} = \frac{V_2}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} \text{ при } z \rightarrow -H_2 + 0, \quad (28)$$

где V_2 – некоторая константа, подлежащая определению.

Раскладываем функцию $1/(H_2^2 - z^2)^{1/3}$ в ряд по собственным функциям, соответствующим области 2, после ряда преобразований, как и ранее, находим

$$U_2|_{x=0} = ik_2 T \varphi_2(z) - \sum_{n=1}^N \alpha_n C_n \psi_n(z) - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} G_n \psi_n(z). \quad (29)$$

Здесь сделано предположение, что при достаточно больших значениях n (больших некоторого N) характер постоянных разложения C_n определяется поведением скорости вблизи ребра. При достаточно большом N можно записать

$$\alpha_n C_n \cong V_2 G_n \text{ при } n \geq N. \quad (30)$$

Для нахождения коэффициентов G_n умножаем выражение (28) на собственную функцию, соответствующую области 2, и интегрируем от $-H_2$ до 0. В то же время, представив выражение (28) в виде ряда по собственным функциям, после интегрирования по аналогии с предыдущим находим асимптотическое выражение, описывающее G_n для больших значений n .

Находим асимптотическое выражение для G_n для больших значений n :

$$G_n = I_2 \cdot W_n \cos \alpha_n H_2,$$

где

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2H_2}{\alpha_n} \right)^{1/6} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \times [Q_1 \cos \alpha_n H_2 + Q_2 + Q_3] \sin \alpha_n H_2, \\ Q_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_n H_2}} \left(\cos \tilde{\alpha}_n - \frac{1}{9} \frac{1}{\alpha_n H_2} \sin \tilde{\alpha}_n \right),$$

$$Q_2 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_n H_2}} \left(\sin \tilde{\alpha}_n + \frac{1}{9} \frac{1}{\alpha_n H_2} \cos \tilde{\alpha}_n \right),$$

$$Q_3 \approx \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \left(\frac{2}{\alpha_n H_2} \right)^{5/6},$$

$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_n H_2 - \frac{\pi}{3},$$

$$W_n = \frac{4 \alpha_n}{\sin 2 \alpha_n H_2 + 2 \alpha_n H_2}.$$

Таким образом, задача свелась к определению коэффициентов B_n и C_n , причем для больших значений n найдены их асимптотические представления. Искомые коэффициенты вычисляются путем удовлетворения условиям сопряжения (19) и (20). Подставляем в них выражения для потенциала скорости и горизонтальной компоненты скорости и с учетом асимптотических представлений коэффициентов получаем

$$ik_1(1-R)\varphi_1(z) + \sum_{n=1}^N \kappa_n B_n f_n(z) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n f_n(z) = \begin{cases} ik_2 T \varphi_2(z) - \sum_{n=1}^N \alpha_n C_n \psi_n(z) - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} G_n \psi_n(z) \\ \text{при } -H_2 < z < 0, \\ 0 \text{ при } -H_1 < z < -H_2, \end{cases} \quad (31)$$

$$(1+R)\varphi_1(z) + \sum_{n=1}^N B_n f_n(z) + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n} f_n(z) = T \varphi_2(z) + \sum_{n=1}^N C_n \psi_n(z) + V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{G_n}{\alpha_n} \psi_n(z) \text{ при } -H_2 < z < 0. \quad (32)$$

Дальнейшая процедура расчетов проводится следующим образом. Умножаем выражение (31) последовательно на собственные функции $\text{ch } k_1(z + H_1)$ и $\cos \kappa_m(z + H_1)$ ($m = 1, 2, \dots, N$), а затем интегрируем по промежутку от $-H_1$ до 0. В результате получаем

$$\frac{ik_1(1-R)}{N_1 \text{ch } k_1 H_1} = \frac{ik_2 T}{\text{ch } k_2 H_2} \cdot P_1 - \sum_{n=1}^N C_n \frac{\alpha_n}{\text{ch } \alpha_n H_2} \cdot P_n^{(2)} - V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{G_n}{\text{ch } \alpha_n H_2} \cdot P_n^{(2)}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_m B_m}{M_m \cos \kappa_m H_1} &= \frac{ik_2 T P_m^{(3)}}{\operatorname{ch} k_2 H_2} - \\ &- \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\cos \alpha_n H_2} C_n \cdot P_m^{(4)} - \\ &- V_2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{G_n}{\cos \alpha_n H_2} \cdot P_m^{(4)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогичным образом умножаем уравнение (32) последовательно на собственные функции $\operatorname{ch} k_2(z + H_2)$ и $\cos \alpha_m(z + H_2)$ и интегрируем от $-H_2$ до 0. Находим

$$\begin{aligned} \frac{(1+R)P_1}{\operatorname{ch} k_1 H_1} + \sum_{n=1}^N \frac{B_n P_n^{(3)}}{\cos \kappa_n H_1} + \\ + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n \cos \kappa_n H_1} \cdot P_n^{(3)} = \\ = \frac{T}{N_2 \operatorname{ch} k_2 H_2}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{(1+R)P_m^{(2)}}{\operatorname{ch} \kappa_1 H_1} + \sum_{n=1}^N \frac{B_n P_n^{(4)}}{\cos \kappa_n H_1} + \\ + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{E_n}{\kappa_n \cos \kappa_n H_1} \cdot P_n^{(4)} = \\ = \frac{C_m}{W_n \cos \kappa_n H_1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\operatorname{sh}(k_1 H_1 + k_2 H_2)}{2(k_1 + k_2)} + \\ &+ \frac{\operatorname{sh}(k_1 H_1 - k_2 H_2)}{2(k_1 - k_2)} - \\ &- \frac{k_1}{k_1^2 - k_2^2} \operatorname{sh}(k_1 H_1 - k_1 H_2), \\ P_n^{(2)} &= \frac{k_1}{k_1^2 + \alpha_n^2} \operatorname{sh} k_1 H_1 \cos \alpha_n H_2 + \\ &+ \frac{\alpha_n}{k_1^2 + \alpha_n^2} \operatorname{ch} k_1 H_1 \sin \alpha_n H_2 - \\ &- \frac{k_1}{k_1^2 + \alpha_n^2} \operatorname{sh}(k_1 H_1 - k_1 H_2), \\ P_n^{(3)} &= \frac{k_2}{k_2^2 + \kappa_n^2} \operatorname{sh} k_2 H_2 \cos \kappa_n H_1 + \\ &+ \frac{\kappa_n}{k_2^2 + \kappa_n^2} \operatorname{ch} k_2 H_2 \sin \kappa_n H_1 - \\ &- \frac{\kappa_n}{k_2^2 + \kappa_n^2} \sin(\kappa_n H_1 - \kappa_n H_2), \\ P_n^{(4)} &= \frac{\sin(\kappa_n H_1 - \alpha_m H_2)}{2(\kappa_n - \alpha_m)} + \\ &+ \frac{\sin(\kappa_n H_1 + \alpha_m H_2)}{2(\kappa_n + \alpha_m)} - \\ &- \frac{\kappa_n}{\kappa_n^2 - \alpha_m^2} \sin(\kappa_n H_1 - \kappa_n H_2). \end{aligned}$$

В итоге мы получили систему $2N + 2$ уравнений с $2N + 2$ неизвестными, но также с пока неопределенными постоянными V_1 и V_2 . Последние выбирались из условия, что при достаточно большом N

выполняются соотношения (25) и (30). Тогда можно записать

$$V_1 = \kappa_N B_N / E_N \text{ и } V_2 = \alpha_N C_N / G_N.$$

Характерной особенностью полученной системы уравнений является то, что это система второго рода, т.е. хорошо обусловленной. Граничные задачи, которые сводятся к системе второго рода, как правило, дают устойчивые и приемлемые результаты при простой редукции системы. Это проявляется в том, что начиная с некоторого N величины коэффициента отражения R и прохождения T практически не изменяются. В рассматриваемой задаче, начиная с 50 членов ряда (рассматривалось также 100 и 150 членов ряда), значения для коэффициента отражения R и прохождения T совпадают до 5 значащих цифр независимо от того, учитывается или не учитывается особенность по скоростям. Однако для выполнения условий сопряжения простая редукция в большинстве случаев требует учета большого количество членов ряда N в разложениях (17), (18) для потенциала и (21), (29) для скорости. Выбор величины N определяется точностью выполнения условий сопряжения.

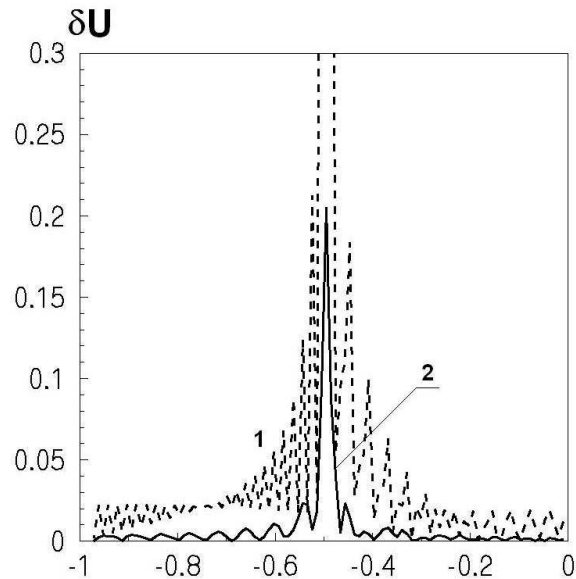


Рис. 3. Погрешности выполнения условий сопряжения

На рис. 3 приведена погрешность выполнения условий сопряжения по скоростям для случая $k_1 H_1 = 2$, $H_2 = 0.5$. Здесь по вертикальной оси отложен модуль разности скоростей $\delta U(z) = |U_1(z)|_{x \rightarrow -0} - U_2(z)|_{x \rightarrow +0}|$ для области $-H_2 < z < 0$ и $\delta U(z) = |U_1(z)|_{x \rightarrow -0}|$ для области $-H_1 < z < -H_2$.

Штриховая кривая 1 соответствует погрешности при простой редукции системы, т.е. без учета особенности по скоростям, а сплошная кривая 2 – с учетом особенности. В обоих случаях рассматривалось 50 членов ряда, но априорное знание асимптотического поведения неизвестных коэффициентов разложения при использовании метода улучшенной редукции позволяет существенно увеличить количество учитываемых мод, в данном случае число мод достигало 600. Как видно из рисунка, учет особенности по скоростям позволяет значительно увеличить точность выполнения условий сопряжения и уменьшить область вблизи особой точки, в которой условия сопряжения выполняются плохо.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В предыдущем разделе был рассмотрен метод решения граничной задачи. Целью дальнейшего изложения является анализ особенностей численной реализации и оценка точности выполнения граничных условий. В рамках используемого метода определялись, через известный характер особенности по скоростям, асимптотические свойства неизвестных. Это позволило учитывать большое количество членов ряда в представлении для поля $(\Phi_{(1,2)})$ и его производной $(U_{(1,2)})$, в то же время бесконечные системы алгебраических уравнений заменялись конечными. При этом возникают погрешности, обусловленные как редукцией системы, так и выбором величины N , начиная с которого переходим к асимптотическим значениям неизвестных. В этой ситуации главным критерием качества полученного решения является контроль точности выполнения условий сопряжения (19), (20). Отметим, что в рассматриваемом классе задач, как правило, точность выполнения граничных условий на поверхностях $z = 0, z = -H_1, z = -H_2$ не проверяется, так как эти условия выполняются со значительно большей точностью, чем условия сопряжения. В качестве дополнительных критериев правильности полученного решения можно рассматривать сходимость полученного решения при увеличении порядка конечной системы уравнений.

На основе системы уравнений (33)-(38) были рассчитаны величины модулей коэффициентов отражения и прохождения в зависимости от величины $k_1 H_1$, т.е. параметров падающей волны для различных значений глубины области за уступом H_2 . На рис. 4 и 5 представлены указанные зависимости в случае, когда $N = 100$, а во вторых сум-

мах в правых частях выражений (36)-(38) вместо бесконечности учитывали 600 членов ряда.

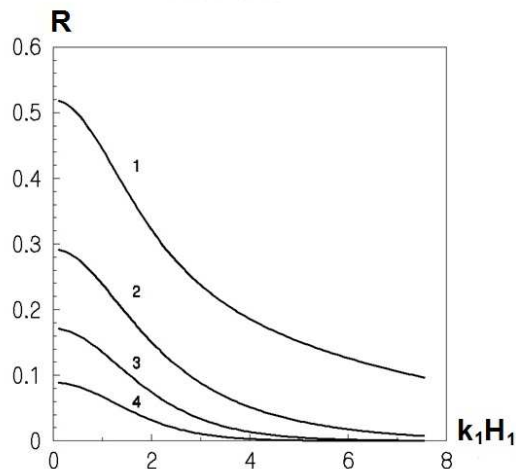


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения от параметров падающей волны. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют следующим значениям глубины H_2 : 0.1, 0.3, 0.5, 0.7

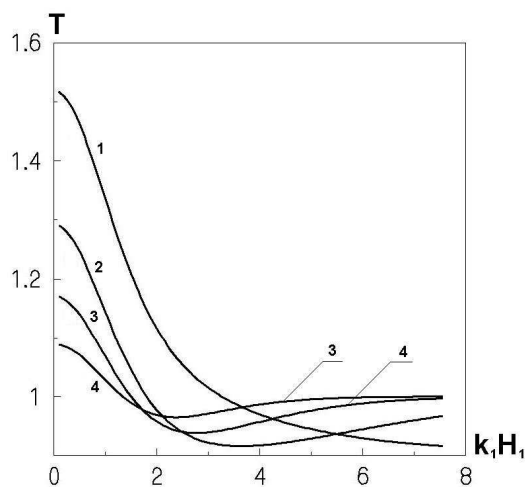


Рис. 5. Зависимость коэффициента прохождения от параметров падающей волны. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют следующим значениям глубины: 0.1, 0.3, 0.5, 0.7

С уменьшением величины уступа, т.е. уменьшением глубины области над уступом отражение волны сильно уменьшается, что видно на рис. 6.

Следует отметить, что рассчитанные зависимости коэффициентов отражения и прохождения с графической точностью совпадают с результатами работ (O'Hare, 1992, Tsai, 2011).

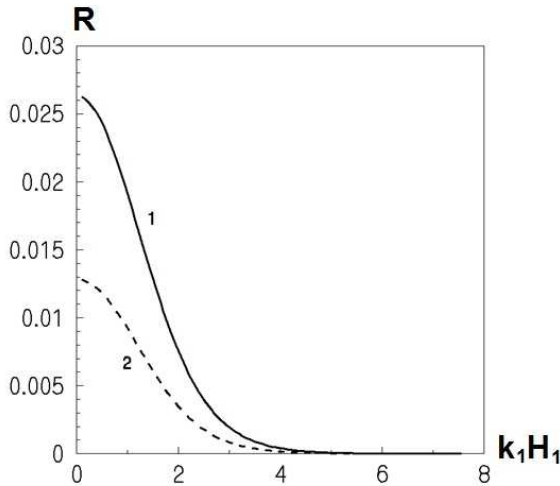


Рис. 6. Зависимость коэффициента отражения параметров падающей волны. Кривые 1, 2 соответствуют следующим значениям глубины: 0.9; 0.95

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН

Рассмотрим сначала так называемую плоско волновую аппроксимацию (“plane wave approximation”) [20, 21], в которой решения в каждой из рассмотренных выше областей не содержат нераспространяющихся мод.

В этом случае волновое поле описывается следующими выражениями для потенциала:

в области 1 ($x < 0$)

$$\Phi_1 = (e^{i k_1 x} + R e^{-i k_1 x}) \varphi_1(z), \quad (37)$$

в области 2 ($x > 0$)

$$\Phi_2 = T e^{i k_1 x} \varphi_2(z). \quad (38)$$

Для нахождения коэффициентов отражения и прохождения удовлетворяем условиям сопряжения (19) и (20). В результате получаем следующие функциональные уравнения:

$$i k_1 (1 - R) \varphi_1(z) = \begin{cases} i k_2 T \varphi_2(z) & \text{при } -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{при } -H_1 < z < -H_2, \end{cases} \quad (39)$$

$$(1 + R) \varphi_1(z) = T \varphi_2(z) \text{ при } -H_2 < z < 0. \quad (40)$$

Далее осуществляем алгебраизацию уравнения (39) путем умножения на собственную функцию $\text{ch } k_1(z + H_1)$ и интегрирования от $-H_1$ до 0.

Аналогичным образом поступаем с уравнением (40), которое умножаем на собственную функцию $\text{ch } k_2(z + H_2)$ и интегрируем от $-H_2$ до 0. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} k_1 (1 - R) \frac{1}{N_1 \text{ch } k_1 H_1} &= \\ &= k_2 T \frac{1}{\text{ch } k_2 H_2} \cdot P_1, \\ (1 + R) \frac{1}{\text{ch } k_1 H_1} \cdot P_1 &= \\ &= T \frac{1}{N_2 \text{ch } k_2 H_2}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$R = \frac{k_1 - k_2 N_1 N_2 P_1^2}{k_1 + k_2 N_1 N_2 P_1^2}, \quad (41)$$

$$T = \frac{2 k_1 N_2 P_1 \text{ch } k_2 H_2}{k_1 + k_2 N_1 N_2 P_1^2 \text{ch } k_1 H_1}. \quad (42)$$

Полагая, что волны являются длинными, из (43) и (42) находим следующие выражения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$R = \frac{k_1 H_1 - k_2 H_2}{k_1 H_1 + k_2 H_2}, \quad (43)$$

$$T = \frac{2 k_1 H_1}{k_1 H_1 - k_2 H_2}. \quad (44)$$

Используя дисперсионные соотношения (12) и (15), эти выражения могут быть приведены (см. [22]) к традиционному виду [17].

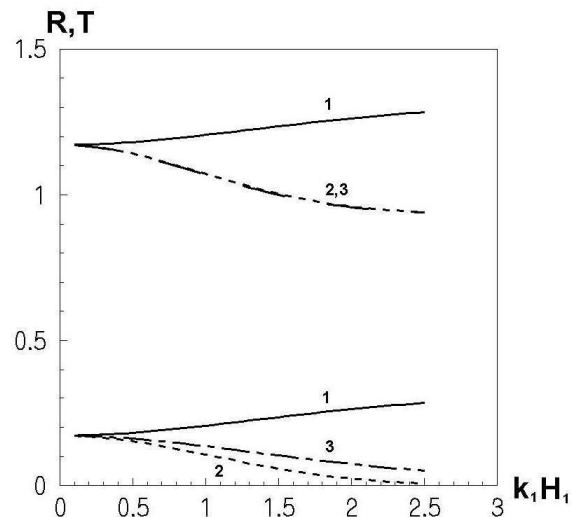


Рис. 7. Коэффициенты отражения и прохождения для длинноволнового приближения

На рис. 7 представленны результаты расчетов коэффициентов отражения и прохождения волны для случая $H_2 = 0.5$. Кривые 1 рассчитаны по формулам (43) и (44), т.е. для случая длинных волн; кривые 3 – на основе формул плоско-волнового приближения, когда не учитываются нераспространяющиеся моды. Расчеты проводились при учете нераспространяющихся мод (число членов ряда равнялось 100, и учет особенности по скоростям проводился путем учета дополнительных 500 нераспространяющихся мод). Как и следовало ожидать, результаты расчетов для длинноволнового приближения справедливы только для небольших значений $k_1 H_1$, при увеличении этого параметра наблюдается существенное отличие от других подходов. Расчеты коэффициента прохождения, соответствующие плоско-волновому приближению, практически совпадают с точным решением, но коэффициент отражения заметно отличается от точного решения и разница растет с ростом $k_1 H_1$. Сравнение результатов для больших значений $k_1 H_1$ не производилось, поскольку с уменьшением длины волны роль нераспространяющихся мод возрастает и используемые приближения становятся некорректными. Следует отметить, что изменение глубины H_2 , не приводит к заметному изменению результатов сравнения. Это связано с тем, что в выражениях (43)-(44) величина глубины входит в виде произведения $k_2 H_2$, и уменьшение величины H_2 отчасти компенсируется увеличением волнового числа k_2 согласно дисперсионным соотношениям, и наоборот. Подобного эффекта не должно наблюдаться при распространении акустических волн, которые являются недисперсионными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача рассеяния поверхностных гравитационных волн на одиночном резком поднятии донной поверхности (уступом). Рассмотрен случай нормального падения. Известно, что одним из эффективных методов решения такого рода задач является разложение решений в ряд по собственным функциям задачи [15]. Известно, что распределение скорости потока имеет степенную особенность вблизи вершины барьера. В итоге решение задачи сводится к выполнению условий сопряжения над уступом и равенства нулю нормальных к вертикальной границе компонент скорости. Использование свойств ортогональности системы собственных функций приводит задачу к необходимости решения бесконечной системы алгебраических уравнений относительно неизвестных ко-

эффициентов разложений. Традиционные подходы к решению такой системы – это метод простой редукции. Однако, как указано в работах [14,15], для получения точности до второго знака приходится рассматривать достаточно большое количество уравнений, порядка $N = 400$.

Особенно важным становится достижение необходимой точности вычислений в задачах рассеяния волн системой препятствий, когда рассматриваются резонансные явления, связанные с возникновением стоячей волны в промежутке между препятствиями. Необходимость существенно увеличивать размер системы уравнений для точного определения частоты запираения при рассмотрении волн высокой частоты связано с наличием особенности распределения скорости вблизи вершины угловых точек

В данной работе для рассмотрения класса задач рассеяния поверхностных гравитационных волн уступом предлагается применять метод выделения особенностей и последующее использование асимптотических зависимостей, которые определяются видом указанных особенностей, для неизвестных коэффициентов разложения для больших значений N . Это дает возможность уменьшить не только размер системы алгебраических уравнений, но и существенно расширить область в окрестности точки смены типа граничных условий, в которой улучшается точность полученного решения. Проведенное сравнение результатов, полученных на основе применяемого метода и метода простой редукцией, показало, что предложенный подход улучшенной редукции является более эффективным для расчета задач рассеяния поверхностных гравитационных волн барьерами.

1. *Blenkinsopp Ch.* Proceedings of the 3rd International Surfing Reef Symposium, Raglan, New Zealand, 2003.–June 22-25,– P. 139-155.
2. *Evans D.V., Linton C.V.* On step approximations for water-wave problems // J. Fluid Mech.– 1994.– vol. 278.– P. 229-249.
3. *Kirby J.T., Dalrymple R.A.* Propagation of obliquely incident water waves over a trench // J. Fluid Me.– 1983.– vol. 133.– P. 47-63.
4. *Rey V., Belzons M., Guazzelli E. J.* Propagation of surface gravity waves over a rectangular submerged bar // J. Fluid Mech.– 1992.– vol. 236.– P. 463-479.
5. *Takano K.* Effets d'un obstacle parallélépipédique sur la propagation de la houle // La Houille Blanche.– 1960.– vol. 15, No.3.– P. 247-267.
6. *Bender Ch.J., Dean R.G.* Wave transformation by two-dimensional bathymetric anomalies with sloped transitions // Coastal Engineering.– 2003.– vol. 50.– P. 61–84.

7. Guazzelly E., Rey V., Belzons M. Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds // J. Fluid Mech.– 1992.– vol. 245.– P. 301-317.
8. Dalrymple R.A., Martin P.A. Wave diffraction through offshore breakwaters // J. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering.– 1990.– vol. 116, No.6.– P. 727-741.
9. Tsai Ch.-Ch., Hsu T.-W., Lin Y.-T. On Step Approximation for Roseau's Analytical Solution of Water Waves // Mathematical Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation.– 2011.– vol. 2011, Article ID 607196.– P. 1-20.
10. O'Hare T.J., Davies A.G. A new model for surface wave propagation over undulating topography // Coastal Engineering.– 1992.– vol. 18, No. 3-4.– P. 251-266.
11. Miles J.W. Surface-wave scattering matrix for a shelf // J. Fluid Mechanics.– 1967.– vol. 28.– P. 755-767.
12. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методы и физ.-мех. поля.– P.– 1998.– С. V. 41, №1.12-34
13. Гринченко В.Т., Вовк И.В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– Киев: Наук, думка, 1986.– 240 с.
14. Porter R., Evans D.V. Complementary approximations to wave scattering by vertical barriers // J. Fluid Mech.– 1995.– vol. 294.– P. 155-180.
15. Linton C.M., P. McIver P. Handbook of Mathematical Techniques for Wave // Structure Interactions.– Chapman & Hull/CRC.–2001.–298p.
16. McIver P. Scattering of water waves by two surface-piercing vertical barriers // IMA J. of Applied Mathematics.– 1985.– vol. 35.– P. 339-355.
17. Lamb H. Hydrodynamics.– Cambridge: University Press, 1975.– 752 p.
18. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– Киев: Наук. думка, 1981.– 284 с.
19. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.– М.: Наука, 1981.– 798 с.
20. Abul-Azm A.G. Diffraction through wide submerged breakwaters under oblique waves // Ocean Engng.– 1994.– vol. 21, No.7.– P. 683-706.
21. Losada I.G., Dalrymple R.A., Losada M.J. Water waves on crown breakwaters // J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering.– 1993.– vol. 119, No. 4.– P. 365-380.
22. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D. K.-P. Theory and applications of ocean surface waves// World Scientific Publishing, –2005,– 1135 p.