

УДК 532.465

ТРАНСФОРМАЦИЯ ВНУТРЕННИХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН Понижения над донной ступенькой в трёхслойной стратифицированной жидкости

Е. ТЕРЛЕЦКАЯ¹, С. СЕМИН², Т. ТАЛИПОВА²,
Д. СМИРНОВ², И. БРОВЧЕНКО¹

¹ Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев;

² Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Россия;
e-mail: kterletska@gmail.com

Получено 21.02.2015

В работе численно исследуется задача о трансформации внутренних уединенных волн в трехслойной стратификации над подводной ступенькой. Выделены различные режимы взаимодействия в зависимости от параметра блокировки B и безразмерной амплитуды волны a_d . Выделена область значений B и a_d , где в результате взаимодействия первой моды со ступенькой формируются волны высших бароклинных мод.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: численное моделирование, внутренние волны, трехслойная стратификация

У роботі чисельно досліджується задача про трансформацію внутрішніх усамітнених хвиль у тришаровій стратифікації над підводною сходинкою. Виділено різні режими взаємодії в залежності від параметра блокування B і безрозмірної амплітуди хвилі a . Виділена область значень B і a_d , де в результаті взаємодії першої моди зі сходинкою формуються хвилі вищих бароклінічних мод.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: чисельне моделювання, внутрішні хвилі, тришарова стратифікація

Problem of internal solitary waves transformation in a three-layer stratification over an underwater step is numerically studied. Different regimes of interaction, depending on the blocking parameter B and the dimensionless wave amplitude a_d are determined. The ranges of the B and a_d are defined, where the interaction of the first mode with a step result in generation of waves of higher baroclinic modes.

KEY WORDS: numerical modeling, internal waves, three-layer stratification

ВВЕДЕНИЕ

Внутренние волны распространяются на границе раздела слоев разной плотности в стратифицированной жидкости. Наблюдения мирового океана показывают распространенность внутренних волн во многих окраинных морях и прибрежных зонах. Внутренние волны больших амплитуд, взаимодействующие с шельфом, могут приводить к турбулентному перемешиванию [1–3] и переносить питательные вещества из нижних слоев жидкости в верхние. Наиболее полно волновая динамика изучена в случае двухслойной жидкости. Данная упрощенная модель хорошо описывает стратификацию в большинстве водоемов, для которых характерно наличие приповерхностного слоя более легкой прогретой жидкости и нижнего слоя более тяжелой холодной воды. Исследование наката внутренних уединенных волн на наклонный шельф в стратифицированной двухслойной жидкости достаточно полно изучено в работах [4–7]. В статье [4] проведено теоретическое исследование наката длинных внутренних волн в стратифицированной двухслойной жидкости на наклонное дно. Показано, что при этом может возникнуть

более чем одна волна противоположной полярности при прохождении волной так называемой "точки переворота". В работе [5] проведены как теоретическое исследование, так и лабораторные эксперименты по накату волн на наклонный берег. В лабораторных экспериментах наблюдались слабый сдвиг и сильное обрушение, зависящие от амплитуды набегающей волны. В некоторых случаях генерировалась вторая мода. Обрушение волн большой амплитуды над наклонным дном изучалось в [6], где было показано, что при взаимодействии волн понижения на склоне могут возникать пути волн-повышения и болусы, распространяющиеся вверх по склону. Во всех этих работах рассматривались склоны с небольшими углами. В [7] исследование было расширено для более широкого диапазона амплитуд и углов склонов. В работах [8–10] для изучения процесса трансформации внутренних волн на шельфе и над подводным препятствием [11] применялось численное моделирование. Было показано, что отношение высоты препятствия к толщине нижнего слоя является параметром, который контролирует количество прошедшей и отраженной энергии. В работах [12–14] проведена классификация режимов взаимодействия внутренних волн с особенностями топогра-

фии в зависимости от данного параметра. В этих же статьях детально изучалось взаимодействие уединенных волн первой моды как повышения, так и понижения со ступенькой. В работе [14] показан сложный характер энергетике взаимодействия волн больших амплитуд со ступенькой на дне с появлением неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, а также обнаружена смена полярности над ступенькой уединенной волны с понижения на повышение.

На данный момент возрастает количество работ, посвященных трехслойной среде, в которой наблюдается существенно более сложная волновая динамика. Такая стратификация встречается в некоторых природных акваториях, например Южно-Китайском море [15, 16]. В слоистой стратификации могут распространяться внутренние волны высших бароклинных мод. Волны второй бароклинной моды в стратифицированном океане характеризуются симметричными колебаниями в слое раздела и могут представлять собой как сужения пикноклина ("вогнутые" волны второй моды), так и расширение пикноклина ("выпуклые" волны второй моды). Исследование взаимодействия волн второй моды с подводной ступенькой также изучалось в работе [17]. Представленное исследование является продолжением работ [12–14, 17]. Как показано в [17], при взаимодействии второй бароклинной моды внутренней волны, распространяющейся в трехслойной стратификации, с резко изменяющимся дном генерируется первая мода. В рамках данной работы исследуются условия, при которых в трехслойной стратификации возможен обратный механизм, когда первая мода генерирует вторую моду при взаимодействии с донным уступом.

Процесс трансформации внутренних уединенных волн над донным уступом в трёхслойной стратифицированной жидкости изучается численно с помощью негидростатических численных моделей MITgcm [18] и модели NH-ROM [19].

1. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для моделирования динамики внутренних уединенных волн в трёхслойной стратифицированной жидкости над донным уступом в настоящей работе используются гидродинамическая негидростатическая численная модель со свободной поверхностью NH-ROM [19] и MITgcm [18]. Модель NH-ROM основана на решении уравнений гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. Алгоритм представляет со-

бой расщепление трехмерных полей скорости и давления на гидростатическую и негидростатическую составляющие. Решение задачи разбивается на две: первая – определение двумерной баротропной составляющей движения, решается задача для возвышения уровня и осредненных по глубине скоростей. Вторая – решение трехмерной задачи для нахождения скорости и давления из уравнения Пуассона для негидростатической компоненты давления. Для решения уравнения Пуассона использовался метод сопряженных градиентов.

Численная модель MITgcm [18] – одна из первых негидростатических моделей. Она широко применяется для моделирования процессов различных масштабов, от глобальной циркуляции до поверхностных волн. В модели MITgcm жидкость ограничена твердой крышкой. Для вычисления значения переменных на следующем шаге по времени в ней используется проекционный метод [20] (метод Чорина или метод давления). Пространственная дискретизация задаётся методом конечных объёмов. В обеих моделях на твердых неподвижных нижней и боковых границах задавались условия непротекания. Расчётная область предполагалась двумерной в плоскости xOz (рис. 1).

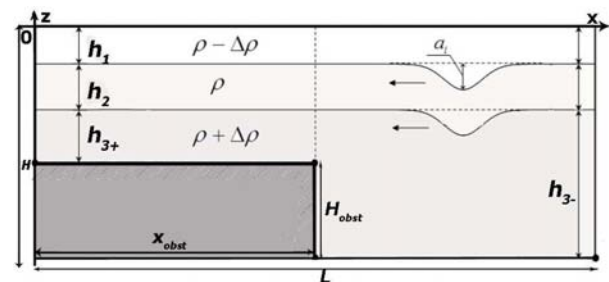


Рис. 1. Эскиз модельной области

Рассмотрим начальную задачу о трансформации внутренней уединенной волны в жидкости с трехслойной стратификацией над донным уступом. Эскиз расчётной области представлен на рис. 1. Длина численного лотка задавалась равной $L = 14000$ м, а глубина $H = 50$ м со ступенькой высоты H_{obst} . Горизонтальный размер ступеньки – x_{obst} . В рамках данной работы варьировалась стратификация (положение пикноклинов), высота ступеньки, а также начальная амплитуда солитона a_i . Профиль вертикальной плотности задавался в виде суперпозиции гиперболических тангенсов:

$$\rho(z) = \rho - \Delta\rho th\left(\frac{z - h_1}{2\Delta p}\right) -$$

Табл. 1. Характеристики вычислительного лотка и волн для серий численных экспериментов

N	H_{obst} (м)	$ a_i $ (м)	h_1 (м)	B	x_{obst} (м)	resolution $X \times Y \times Z$
1 _a	20	1.8 – 3.5	20	1.9 – 3.7	5000 – 7000	3000 × 4 × 300
1	20	1.2 – 3.3	20	2. – 5.5	5000 – 7000	3000 × 4 × 300
2	16.65	1.2 – 3.3	20	3. – 8.3	8000	3000 × 4 × 300
3	6.65	1.2 – 3.3	20	6 – 16.6	8000	3000 × 4 × 300
4	5 – 40	5	10	–0.5 – 4.5	4000	3000 × 4 × 300
5	5 – 40	7	10	–0.7 – 6.2	4000	3000 × 4 × 300

$$-\Delta\rho th \left(\frac{z + (h_1 + h_2)}{2\Delta\rho} \right), \quad (1)$$

где $\rho = 1020 \text{ кг/м}^3$ – средняя плотность; $\Delta\rho = 2 \text{ кг/м}^3$ – скачок плотности на пикноклине; $\Delta p = 0.4 \text{ м}$ – характерная толщина пикноклина; $h_2 = 3.35 \text{ м}$ – толщина слоя раздела, одинаковая для всех численных экспериментов. Разность плотностей на данном этапе предполагается одинаковой для верхнего и нижнего слоёв и соответствует приближению Буссинеска.

Начальное возмущение в численных расчетах волны задавалось по-разному. Исходная волны в модели MITgcm задавалось на основе слабо нелинейной теории в виде солитонного решения уравнения Гарднера. Для этого решалась задача Штурма-Лиувилля с нулевыми граничными условиями относительно вертикальной структуры моды. На основе полученного решения определялись коэффициенты уравнения Гарднера ($c, \alpha, \alpha_1, \beta$), которые использовались для вычисления поля скорости и смещения пикноклинов. Солитонное решение уравнения Гарднера имеет вид [21]:

$$\eta(x, t) = \frac{A}{1 + B \text{ch}(\gamma(x - Vt))}, \quad (2)$$

$$A = a \left(2 + a \frac{\alpha_1}{\alpha} \right), \quad (3)$$

$$B = 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha}, \quad (4)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\alpha a}{6\beta}} \left(2 + a \frac{\alpha_1}{\alpha} \right), \quad (5)$$

$$V = \beta\gamma^2. \quad (6)$$

При этом начальное поле горизонтальной скорости задавалось по следующей формуле:

$$u(x, z) = c\eta(x) \frac{d\Phi(z)}{dz}. \quad (7)$$

Генерация волн первой моды в модели NH-POM производилась методом коллапса в форме половинны уединенной волны. Данный тип генерации дает возможность генерировать сильнонелинейные уединенные волны. Было проведено шесть серий экспериментов. Серии расчетов 1_a и 1 проводились для сравнения результатов расчетов моделями MITgcm и NH-POM и имеют одинаковую геометрию. В сериях 1_a и 1 – 3 параметры расчётной области имеют одинаковую геометрию и стратификацию $h_1 = 20 \text{ м}$, $h_2 = 3.35 \text{ м}$, $h_{3-} = 26.65 \text{ м}$ и в рамках каждой серии фиксируется глубина ступеньки: серия 1 – $H_{obst} = 20 \text{ м}$, серия 2 – $H_{obst} = 16.65 \text{ м}$, серия 3 – $H_{obst} = 6.65 \text{ м}$, и варьируется амплитуда набегающей волны a_i . В сериях 4–5 стратификация имеет вид $h_1 = 10 \text{ м}$, $h_2 = 3.35 \text{ м}$, $h_{3-} = 36.65 \text{ м}$, и в рамках каждой серии фиксируется амплитуда набегающей волны: для серии 4 $a_i/h_1 = 5$, а для серии 5 $a_i/h_1 = 7$, а высота ступеньки H_{obst} варьируется от 5 до 40 м. Волны, рассматриваемые в сериях 1_a, 1 – 3, являются слабнонелинейными, $0.05 < a_d < 0.14$, а в сериях 4–5 – сильно нелинейными, $0.5 < a_d < 0.7$. Значения H_{obst} , x_{obst} , a_i , h_1 для разных серий численных экспериментов приведены в таблице 1.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С ПОДВОДНОЙ СТУПЕНЬКОЙ

Серия экспериментов 1_a была проведена с помощью модели MITgcm, а серия 1 – с помощью модели NH-POM. Численные эксперименты проводились для волн понижения и их можно охарактеризовать двумя параметрами:

1 – параметр блокировки

$$B = h_{3+}/|a_i|, \quad (8)$$

равным отношению глубины нижнего слоя над

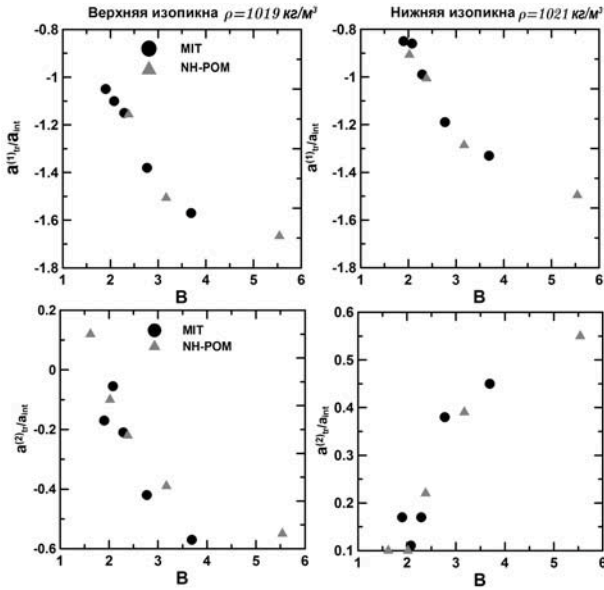


Рис. 2. Зависимости амплитуд первой и второй моды, прошедших на ступеньку как в верхнем, так и в нижнем пикноклине, от параметра блокировки B для серий экспериментов 1_a и 1

уступом к амплитуде набегающей волны [14];

2 – безразмерной амплитудой волны, характеризующей нелинейность

$$a_d = |a_i|/h_1, \quad (9)$$

равной отношению амплитуды падающего возмущения к глубине верхнего слоя.

На рис. 2 представлены результаты моделирования: амплитуда волны первой моды, прошедшей на ступеньку a_{1t}/a_i , амплитуда прошедшей волны второй моды на ступеньку a_{2t}/a_i как в верхнем ($\rho_1 = 1019 \text{ кг/м}^3$), так и в нижнем пикноклине ($\rho_2 = 1021 \text{ кг/м}^3$) в зависимости от параметра блокировки B для серий экспериментов 1_a и 1 . Как видно из рис. 2, обе модели дают близкие значения амплитуд волн.

Рассмотрим детально три численных эксперимента, отличающиеся характерами взаимодействия падающей волны со ступенькой. Результаты моделирования для нескольких численных экспериментов показаны на рис. 3. На графиках представлена эволюция изопикн верхней со значением плотности ρ_1 и нижней при ρ_2 .

Численный эксперимент А. Трансформация волны с амплитудой $a_i = -1$ м (см. таблицу 1, серия 1) представлена на рис. 3, *a–г*. Параметр блокировки при этом $B = 6.6$. Как видно из рис. 3, *б*, волна, сгенерированная коллапсом из начального распределения плотности, по-

казанного на рис. 3, *a*, хорошо описывается аналитическим решением уравнения Гарднера (2) (пунктир на рис. 3, *б*). На рисунке 3, *в* показано, что за ступенькой генерируется первая мода и, так как ($h_1 > h_{3+}$), волна меняет полярность и генерируется цуг волн-повышения. Как видно из рисунка, в процессе трансформации обрушение волны не происходит и волны высших мод не формируются при таком типе взаимодействия. Как видно, от уступа отражается волна первой моды.

Численный эксперимент Б. Эволюция волны первой моды в жидкости с трехслойной стратифицированной жидкостью над ступенькой для случая, когда амплитуда падающей волны $a_i = 7$ м (серия 5), представлена на рис. 3, *д–з*. Параметр блокировки при этом $B = 3.6$. Как видно из рис. 3, *е*, волна, сгенерированная коллапсом из начального распределения плотности, показанного на рис. 3, *д*, хорошо описывается решением уравнения Гарднера (2), представленным на рис. 3, *е* пунктиром. В данном случае происходит сравнительно сильное взаимодействие со ступенькой, в результате которого за ступенькой формируется непосредственно прошедшая волна солибор и "выпуклая" волна второй моды. Генерация уединенной волны второй моды в результате взаимодействия волны первой моды с особенностями топографии была детально изучена и описана в работах [5, 9]. В работе [22] представлены результаты лабораторных экспериментов, обрушающихся на склоне волн первой моды, для широкого диапазона значений углов наклона дна и на основе которых были выделены режимы генерации второй моды.

Численный эксперимент В. Эволюция волны первой моды в жидкости с трёхслойной стратификацией над ступенькой для случая, когда амплитуда набегающей волны $a_i = -2.1$ (м) (таблица 1, серия 1), представлена на рис. 3, *и–м*. Параметр блокировки при этом принимает значение $B = 3.2$. Как видно из рисунка 3, *к*, волна, сгенерированная коллапсом из начального распределения плотности, показанного на рис. 3, *и*, хорошо описывается решением Гарднера (2). При данном взаимодействии уединенной волны-понижения с резким изменением дна возникают несколько типов волн. В связи с изменением знака квадратичной нелинейности уравнения Гарднера прошедшая на уступ волна первой моды меняет полярность, поэтому на уступе генерируется цуг волн повышения. Также в области над уступом формируется выпуклая волна второй моды. Помимо отражённой от ступеньки волны первой моды, в области до уступа происходит генерация цуга выпуклых волн второй моды, а также структура вогнутых

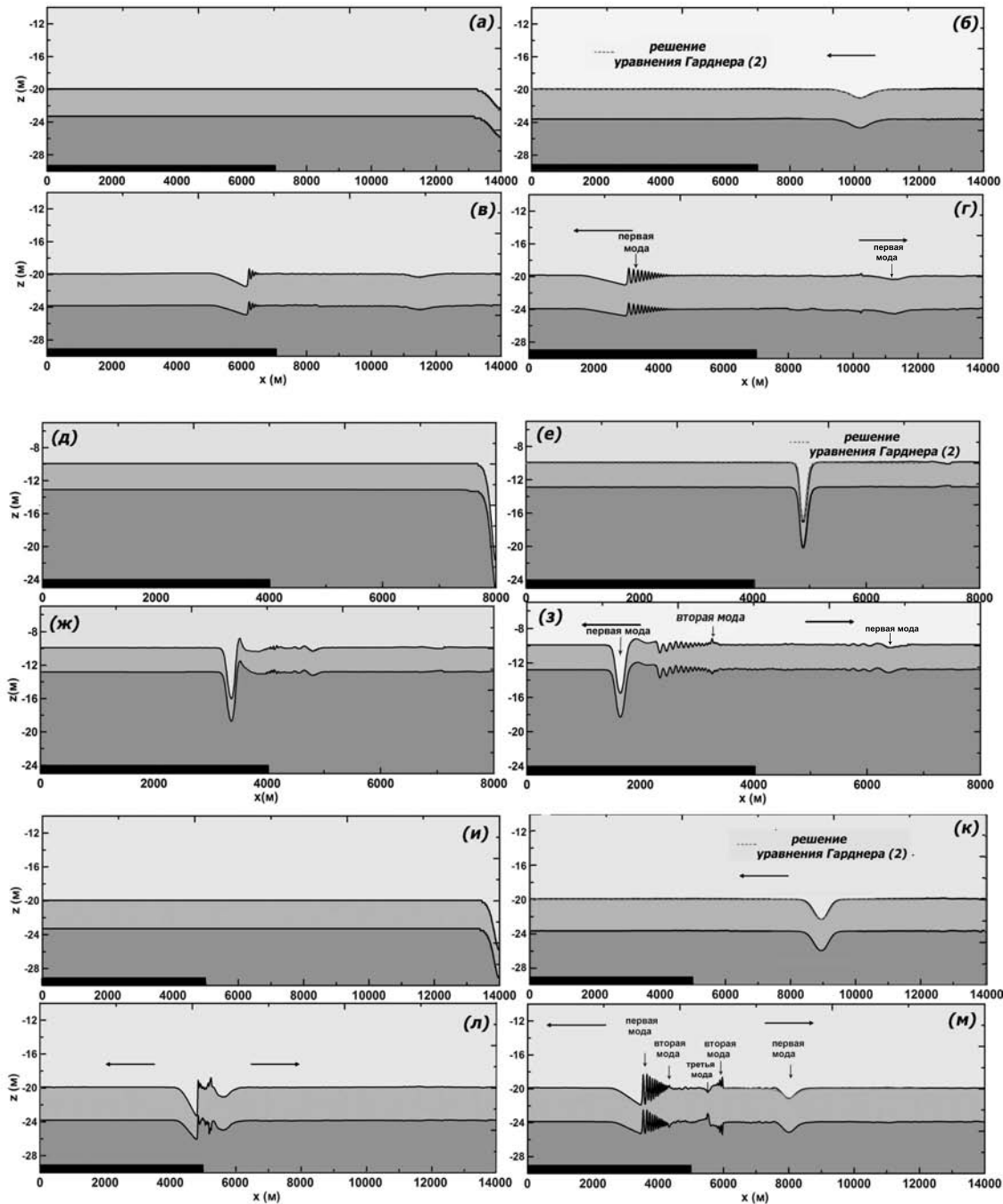


Рис. 3. Эволюция поля солёности:
a-d – эксп. А (серия 1, $a_i = -0.8(\text{м})$ и $B = 8.3$); *д-з* – эксп. Б (серия 4, $a_i = -7(\text{м})$ и $B = 3.6$);
и-м – эксп. В (серия 1 $a_i = -2.1(\text{м})$ и $B = 3.2$)

волн (рис. 3, *м*).

Рассмотрим более детально дальнейший процесс формирования в результате такого взаимодействия (эксперимент В) волн высших мод.

На рис. 4 показана эволюция изопоки $\rho =$

1018.5, 1019.5, 1020.5, 1021.5 кг/м^3 , поле завихренности, а также профили горизонтальной и вертикальной скорости в обозначенных на рисунке сечениях. На рис. 4, *a* изображено формирование прошедшей волны повышения первой моды

за ступенькой и отраженной волны первой моды волны-понижения от ступеньки, а также вторых бароклинных мод отраженной и прошедшей волн. Справа на рисунке показаны профили горизонтальной и вертикальной скорости волны первой моды в сечении максимального смещения отраженной волны. Вслед за первой модой в отраженной волне формируется вторая мода. Цуг волн второй моды показан на рис. 4, б. Профили горизонтальной и вертикальной скорости в сечении волны с максимальной амплитудой показаны на рис. 4, б справа. Далее, как видно из графика на рис. 4, в, за второй модой формируются устойчивые структуры, которые распространяются с постоянной скоростью. Трехвихревая структура, распространяющаяся в толстом слое раздела, устойчива и следует за второй модой. Изопикны $\rho = 1019$ и 1021 кг/м^3 направлены внутрь слоя. Структура горизонтальных и вертикальных скоростей в центральном срезе этой структуры дает основания заключить, что эта волна является внутренней волной третьей бароклинной моды. За ней следует также устойчивая структура, состоящая из четырех вихрей, и профили скоростей (горизонтальные и вертикальные) характеризуют ее как четвертую бароклинную моду. Возникновение высших бароклинных мод при взаимодействии внутренних волн с резким изменением топографии объясняется сильным перемешиванием промежуточного слоя раздела, в момент прохождения волны на ступеньку. Размытие промежуточного слоя объясняет наличие третьей и четвертой мод, следующих за первой и второй. Наличие высших бароклинных мод при непрерывной стратификации при взаимодействии бароклинных приливов с резкими изменениями топографии было показано в [25] для случая линейных волн. Для этого эксперимента был проведен численный расчет на более детальной сетке 4000×400 в отличие от данных в таблице 1. В результате расчетов на более детальной сетке волновая картина за ступенькой не отличается от представленной на рис. 4.

3. СХЕМА ТИПОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН ПЕРВОЙ МОДЫ СО СТУПЕНЬКОЙ В ТРЕХСЛОЙНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

При взаимодействии внутренних волны с резкими изменениями дна возможны два следующие сценария: первый – обрушение волны, приводящее к интенсивному перемешиванию и диссипации; второй – смена полярности волны-понижения на волну повышения. Зависимость параметра блокировки B от параметра $a_d = |a_i|/h_1$, при которых прои-

сходит обрушение падающей волны над подводной ступенькой, получена по результатам численных экспериментов. Анализ результатов моделирования показал тенденцию уменьшения значения параметра блокировки B , при которой происходит обрушение при увеличении параметра нелинейности a_d . Данная эмпирическая кривая согласуется с критериями, полученными с помощью численного моделирования в работах [9, 23]. При этом смена полярности волны над ступенькой происходит в случае, когда $(h_1 > h_{3+})$. Тогда условие смены полярности в переменных B и a_d будет иметь вид

$$B < \frac{1}{a_d}. \quad (10)$$

В плоскости (a_d, B) можно выделить несколько типов взаимодействия волн со ступенькой в трехслойной стратификации (рис. 5).

Зона 1. Значения параметра блокировки B и a_d лежат в области, где $B < \frac{1}{a_d}$, но выше кривой обрушения. В этом случае волна понижения меняет полярность и за ступенькой трансформируется в волну повышения и при этом не обрушается и в результате взаимодействия не генерируются волны высших мод. К данному типу взаимодействия относится эксперимент А.

Зона 2. Значения параметра блокировки B и a_d лежат в области, где $B > \frac{1}{a_d}$ и выше кривой обрушения. В данном случае падающая волна не меняет полярность, а в результате взаимодействия волны высших мод не генерируются.

Зона 3. Значения параметра блокировки B и a_d лежат в области, где $B > \frac{1}{a_d}$ и ниже кривой обрушения. Волна обрушается, смены полярности не происходит. В результате генерируется волна второй моды, и возможно формирование волн высших мод. К данному типу взаимодействия относится эксперимент Б.

Зона 4. Значения параметра блокировки B и a_d лежат в области, где $B < \frac{1}{a_d}$ и ниже кривой обрушения. Падающая волна обрушается, при этом меняет полярность. В результате этого генерируются волны второй моды и волны высших мод. К данному типу взаимодействия относится эксперимент В.

Зона 5. При $B < 0$, что реализуется, когда изолика ρ_2 упирается в ступеньку, при этом происходит отражение волн, а за ступеньку проходит небольшая часть энергии волны в виде болусов.

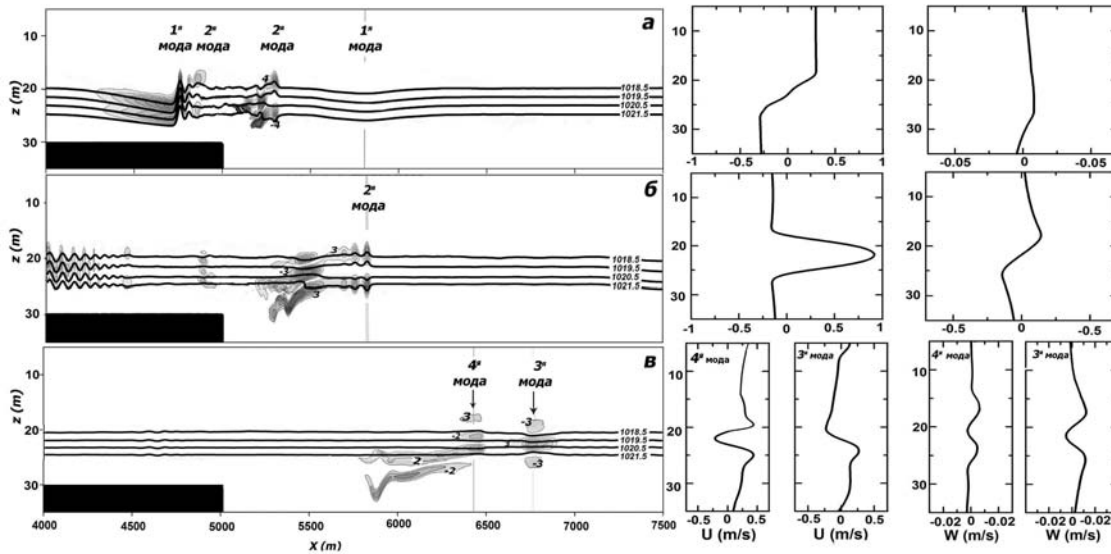


Рис. 4. Взаимодействие волны первой моды со ступенькой для эксперимента В (серия 1 $a_i = -2.1$ м и $B = 3.2$). Эволюция поля плотности и завихренности, профили горизонтальной и вертикальной скорости для трех последовательных моментов времени: а – $t = 5$ часов, б – $t = 7$ часов, в – $t = 10$ часов

ВЫВОДЫ

В работе исследуется взаимодействие внутренних уединенных волн-понижения первой моды в трёхслойной стратифицированной жидкости с подводной ступенькой. Исследование проводилось с помощью двух численных моделей MITgcm и NH-ROM. Анализ результатов моделирования показал, что обе модели дают близкие значения амплитуд волн, а также их количество.

В работе предложена новая схема режимов взаимодействия внутренних уединенных волн-понижения первой моды в трёхслойной стратифицированной жидкости с подводной ступенькой в зависимости от параметров нелинейности a_d и блокировки B . Выделена область значений B и a_d , где в результате взаимодействия первой бароклинной моды со ступенькой формируются волны высших бароклиных мод. Показано, что при взаимодействии слабо нелинейных волн ($a_d < 0.15$) со ступенькой при значениях параметра блокировки $3.5 < B < 6$ происходит генерация прошедших и отраженных волн второй моды, а при $0 < B < 3.5$ формируются волны высших мод. В случае сильно нелинейных волн $a_d > 0.4$ высшие моды формируются при $0 < B < 2$.

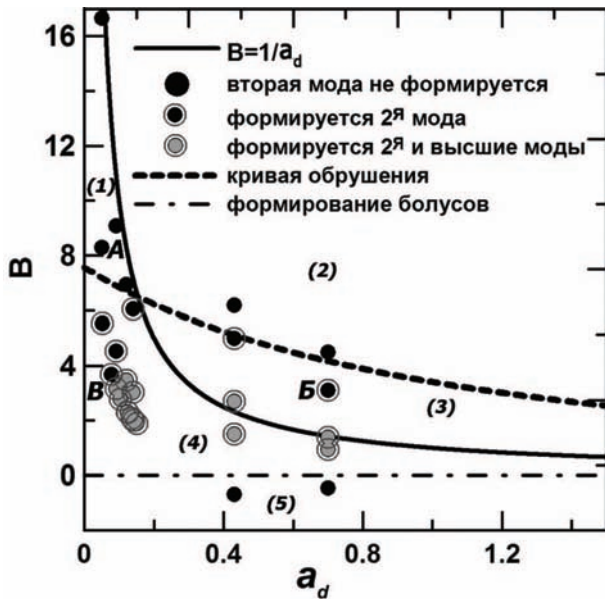


Рис. 5. Схема изменения режимов взаимодействия внутренних уединенных волн-понижения первой моды в трехслойной стратификации с подводной ступенькой в зависимости от параметра нелинейности a_d и параметра блокировки B

1. Bourgault D. and Kelley D. E. Wave-induced boundary mixing in a partially mixed estuary // Journal of Marine Research.– 2010.– 61 (5).– P. 553-576.

2. *Klymak J. M. and Moum J.N.* Internal solitary waves of elevation advancing on a sloping shelf // *Geophys. Res. Lett.*– 2003.– **2045**.– P. 20. doi:10.1029/2003GL017706
3. *Moum J.N., Farmer D.M., Smyth W.D., Armi L. and Vagle S.* Vagle Structure and generation of turbulence at interfaces strained by internal solitary waves propagating shoreward over the continental shelf // *J. Phys. Oceanogr.*– 2003.– **33**.– P. 2093-2112.
4. *Karl R. Helfrich and Melville W. K. and Miles W.* On interfacial solitary waves over slope-shelf topography // *J. Fluid Mech.*– 1984.– **149**.– P. 305-317.
5. *Karl R. Helfrich and W. K. Melville* On long nonlinear internal waves over slope-shelf topography // *J. Fluid Mech.*– 1986.– **167**.– P. 285-308.
6. *Karl R. Helfrich* Internal solitary waves breaking and run-up on a uniform slope // *J. Fluid Mech.*– 1992.– **243**.– P. 133-154.
7. *Michallet H., Ivey G.N.* Experiments on mixing due to internal solitary waves breaking on uniform slopes // *J. Geoph. Res.*– 1999.– **104**.– P. 13487-13477.
8. *Vlasenko V. and Hutter K.* Numerical experiments on the breaking of solitary internal waves over a slope-shelf topography. // *J. Phys. Oceanogr.*– 2002.– **32**.– P. 1779-1793.
9. *Vlasenko V., and Hutter K.* Generation of second mode solitary waves by the interaction of a first mode soliton with a sill // *Nonlinear Processes in Geophysics*.– 2001.– **8**.– P. 223–239.
10. *Maderich V., Brovchenko I., Terletska K., Hutter K.* Numerical simulations of the nonhydrostatic transformation of basin-scale internal gravity waves and wave-enhanced meromixis in lakes // Ch. 4 in *Hutter K. (Ed.) Nonlinear internal waves in lakes*. – Springer. Series: *Advances in Geophysical and Environmental Mechanics*.– 2012.– P. 193–276.
11. *Wessels F., Hutter K.* Interaction of internal waves with a topographic sill in a two-layered fluid // *J Phys Oceanogr.*– **26**.– 1996.– P. 5–20.
12. *Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Pelinovsky E., Choi B.H., Brovchenko I., Terletska K., and Kim D. C.* The transformation of an interfacial solitary wave of elevation at a bottom step // *Nonlinear Processes in Geophysics*. – 2009.– **16**.– P. 33-42.
13. *Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Terletska K., Brovchenko I., Pelinovsky E., Choi B.H.* Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step. // *Physics of Fluids*.– 2010.– **22**.– P. doi:10.1063/1.3455984.
14. *Talipova T., Terletska K., Maderich V., Brovchenko I., Pelinovsky E., Jung K.T., Grimshaw R.* Solitary wave transformation on the underwater step: Asymptotic theory and numerical experiments // *Physics of Fluids*.– 2013.– **25**.– P. doi: 10.1063/1.4797455.
15. *Yang Y.J., Fang Y. C., Tang T.Y., and Ramp S.R.* Convex and concave types of second baroclinic mode internal solitary waves // *Nonlin. Processes Geophys* 605–614.– 2010.– **17**.– P. 605–614.
16. *Liu A.K., Su F.-C., Hsu M.-K., Kuo N.-J., Ho C.-R.* Generation and evolution of mode-two internal waves in the South China Sea // *Continental Shelf Research*.– 2013.– **59**.– P. 18–27.
17. *Терлецкая Е.В.* Взаимодействие внутренних уединенных волн второй моды с подводной ступенькой // *Прикладна гідромеханіка*.– 2014.– **16**.– С. 70–75.
18. *Marshal J., Hill C., Perelman L., Adcroft A.* Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modelling // *Journal of Geophysical Research*.– 1997.– **102**.– P. 5733-5752.
19. *Kanarska Y., Maderich V.* A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // *Ocean Dynamics*.– 2003.– **53**.– P. 176–185.
20. *Chorin A.J.* Numerical solution of the Navier-Stokes equations // *Mathematics of Computation*.– **22(104)**.– 1968.– P. 745–762. doi:10.1090/S0025-5718-1968-0242392-2
21. *Grimshaw R., Pelinovsky D.E., Pelinovsky E.N., Slunyaev A.* Generation of large-amplitude solitons in the extended Korteweg-de Vries equation // *Chaos*.– **12**.– 2002.– P. 1070–1076. doi:10.1063/1.1521391
22. *Cheng M.-H. and John R.-C.* Hsu Vortex Formation and Waveform Inversion of an Internal Solitary Wave Propagating over a Shelf-slope Topography // *Proceedings of the Nineteenth International Offshore and Polar Engineering Conference*.– **5**.– 2009.– P. 523-530.
23. *Aghsaee P., Boegman L., Lamb KG.* Breaking of shoaling internal solitary waves // *J. Fluid Mech.*– **659**.– 1996.– P. 289–317.
24. *Канарская Ю.В., Мадерич В.С.* Чиленная негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью // *Прикладна гідромеханіка*.– 2002.– **76**.– С. 12–21.
25. *Griffiths S. D. and Grimshaw R. H. J.* Internal Tide Generation at the Continental Shelf Modeled Using a Modal Decomposition: Two-Dimensional Results // *Journal of physical oceanography*.– 2007.– **49**. – P. 428–451.