

УДК 532.5

## ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ ЗА РУХОМОЮ ОБЛАСТЮ ПОВЕРХНЕВОГО ТИСКУ В КАНАЛІ З ТРАПЕЦІЄВИДНИМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ

О. Г. СТЕЦЕНКО, В. М. ІЛЬЧЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ  
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Київ-180, Україна  
office@hydromech.com.ua

Одержано 02.07.2014

Розв'язана лінійна задача генерації та еволюції поверхневих хвиль та затухаючих збурень на вільній поверхні каналу з трапецієвидною формою поперечного перерізу при стаціонарному русі області поверхневого тиску прямокутної форми. Для знаходження розв'язку для потенціалу швидкостей використано змінену систему координат та інтегральне перетворення по поздовжній координаті і розклад у ряд Фур'є по поперечній координаті. Одержано в явному вигляді розв'язок як для хвильового поля, так і для затухаючих складових. У результаті виконаних розрахунків проаналізовано особливості формування та структуру корабельних (баричних) хвиль у залежності від режиму руху, трапецієвидності каналу та характеристик рухомої області.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** стаціонарний рух, канал, трапецієвидний переріз, збурення, математична модель, функції Бесселя, поверхневі хвилі, потенціал швидкості, число Фруда.

Решена линейная задача генерации и эволюции поверхностных волн и затухающих возмущений на свободной поверхности канала с трапециевидной формой поперечного сечения при стационарном движении области поверхностного давления прямоугольной формы. Для нахождения решения задачи для потенциала скоростей использовано измененную систему координат, интегральное преобразование по продольной координате и разложение в ряд Фурье по поперечной координате. Получено в явном виде решение как для волнового поля, так и для затухающих составляющих. В результате выполненных расчетов проанализировано особенности формирования и структуру корабельных (барических) волн в зависимости от режима движения, трапециевидности канала и характеристик движущейся области.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** стационарное движение, канал, трапециевидное сечение, возмущение, математическая модель, функции Бесселя, поверхностные волны, потенциал скорости, число Фруда

A linear problem of generation and evolution of the surface waves, and convergent responses on the free surface of a channel of trapezoidal cross-section when the rectangular surface pressure region moves at a constant velocity from the state of rest is solved. In order to solve a problem in respect of a velocity potential, a transformed coordinate system and an integral transformation for longitudinal coordinate, and expansion into a Fourier series for a transverse coordinate are used. The explicit solution bots for a wave field and for damped components is obtained. Based on the calculations performed, the peculiarities of forming and structure of the ship (pressure) waves are analysed depending on the movement mode, trapezoidal channel and characteristics of the moving region.

**KEY WORDS:** stationary movement, channel, trapezoidal cross-section, response, mathematical model, Bessel function, surface waves, velocity potential, Froude number

### ВСТУП

Широке використання судоходних каналів, як рукотворних, так і природного утворення, обумовлює інтерес до вивчення гідродинаміки руху суден в умовах обмеженого фарватеру. Особливістю цього напрямку досліджень є необхідність врахування впливу на гідродинаміку обтікання судна та його ходові характеристики не лише наявності скінченості глибини, але і геометрії бічних стінок каналу. У той самий час, в такого роду фарватерах практично важливим стає врахування процесів взаємодії гідродинамічних полів (зокрема, корабельних хвиль), генерованих рухомим судном, з берегами та різного роду спорудами, на них розташованими.

Вивчення корабельних хвиль має достатньо дов-

гу історію, однак інтерес до цього напрямку досліджень не втратив своєї актуальності через низку недостатньо вивчених проблем, обумовлених вже відзначеною обмеженістю фарватера та необхідністю прогнозування результатів взаємодії збурень за судном з берегами та розташованими на них спорудами, а також змінною топографією дна та нестационарністю руху суден. Починаючи з піонерських робіт Л. М. Сретенського [1, 2] до кінця минулого століття виконано достатньо велика кількість робіт, в яких у лінійній постановці розв'язано ряд задач, що дозволило виявити головні особливості і механізми формування поля поверхневих корабельних хвиль у каналах прямокутного поперечного перерізу та обумовлений ними хвильовий опір руху судна [3–8] (див. бібл. в [3, 4, 8]). У виконаних теоретичних дослідженнях ру-

хоме судно імітувалось у різний спосіб. Це і використання форм обводів судна, які описуються простими аналітичними залежностями [7], і заміна судна рухомою областю поверхневого тиску [5, 6] або розподіленими вздовж вісі руху джерелами [4]. В експериментальних дослідженнях використовувались моделі суден [9, 10]. Головною направленістю відмічених робіт є визначення хвильового опору при русі суден. Для вузьких каналів, коли габарити судна та ширина каналу співрозмірні, для побудови лінійних розв'язків можна ефективно використовувати розклад шуканого потенціалу швидкості руху в ряд Фур'є по поперечній координаті [8]. Одержаний в такий спосіб розв'язок не містить подвійних інтегралів і тому зручніший для використання.

В ряді виконаних робіт досліджені також нелінійні ефекти, які виникають у каналах при досягненні судном діапазону чисел Фруда, більших певного критичного значення. Теоретичні і експериментальні дослідження показують, що в таких діапазонах має місце утворення одиноких хвиль-солітонів або їхніх систем [11–17]. В теоретичних роботах рухоме судно імітувалось областю поверхневого тиску. Проведені дослідження дозволили встановити низку характерних особливостей формування цих нелінійних утворень. Так, виявлено важливість значення величини коефіцієнта блокування, рівного відношенню площі поперечного перерізу судна до площі поперечного перерізу каналу [12], та істотний вплив мілководдя [15] та топографії каналу на їхні характеристики [13]. Встановлено, що нестационарність процесу переходу режиму руху від понадкритичного до докритичного може супроводжуватись помітним збільшенням амплітуд солітонів [16].

Всі згадані дослідження виконані для каналів прямокутного поперечного перерізу або з вертикальними боковими стінками. Але всі рукотворні судоходні канали мають форму поперечного перерізу у вигляді трапеції, а канали природнього утворення мають форму улоговин. Для широких каналів форма бічних стінок практично не впливає на гідродинаміку обтікання судна та його ходові характеристики, а питання взаємодії корабельних хвиль з берегами можна розглядати окремо від руху судна, використовуючи для цього відомі представлення цих хвиль для водних акваторій скінченної глибини. Для випадків руху суден в обмежених фарватерах, де характерні розміри судна і каналу одного порядку, вплив геометрії поперечного перерізу каналу стає істотним, особливо для режимів руху з числами Фруда, близькими до критичного, або більшими, коли максимально

проявляються нелінійні ефекти. Виконані в цьому напрямку дослідження, достатньо повну бібліографію яких наведено в роботі [18], показують, що в нелінійних задачах у наближенні мілкої води каналам зі складнішою геометрією притаманні також особливості формування корабельних хвильових картин, аналогічні відміченим раніше для каналів прямокутного перерізу. Однак при цьому структура хвильових картин залежить і від особливостей геометрії перерізу. Стосовно каналів з трапецієвидною формою поперечного перерізу, слід відмітити роботи [19, 20]. В першій з них в гідравлічному наближенні з використанням експериментальних коефіцієнтів представлено метод визначення величини гідродинамічного опору рухомого судна для докритичних режимів руху ( $Fr < 0.3$ ) і різних значень такого параметра, як відношення площі поперечного перерізу каналу до площі поперечного перерізу судна. В роботі [20] в нелінійній постановці, з використанням рівнянь мілкої води Гріна-Нагді, одержані чисельні розв'язки хвильових полів за рухомою областю поверхневого тиску для режимів руху з  $Fr < 1$ , де в якості лінійного масштабу використано величину відношення площі поперечного перерізу каналу до ширини водної поверхні каналу. Показано, що для режимів руху з  $Fr$ , близьких до одиниці, хвильова картина стає строго нелінійною, з формуванням з часом попереду області одиноких хвиль-солітонів, подібних до тих, що формуються в каналах прямокутного перерізу. В цілому гідродинаміка корабельних хвиль у каналах з різною геометрією поперечних перерізів вивчена не достатньо повно. Навіть у лінійних задачах немає жодного точного розв'язку для геометрії поперечного перерізу, відмінної від прямокутника. В свою чергу, нелінійні розв'язки одержані поки що лише для випадку рухів з використанням наближення мілкої води. Таким чином, дослідження в цьому напрямку представляються такими, що заслуговують на увагу для всього класу означених задач.

В даній роботі вперше розв'язана стаціонарна задача генерації лінійних поверхневих хвиль за рухомою областю поверхневого тиску в каналі з трапецієвидною формою поперечного перерізу. Одержано точний розв'язок цієї задачі, який включає в себе як хвильові, так і затухаючі складові. При цьому, як і у [8], використано підхід з розкладом шуканого розв'язку для потенціалу швидкості в ряд Фур'є по поперечній координаті.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається стаціонарне поле лінійних корабельних (баричних) хвиль, утворене областю по-

верхнього тиску, яка рухається з постійною швидкістю  $U$  вздовж поздовжньої вісі каналу з трапецієвидною формою його поперечного перерізу (рис. 1). Верхня сторона цієї трапеції  $BC$  шириною  $l_1 = 2l$  співпадає з вільною поверхнею води, нижня сторона  $AD$  – з дном каналу шириною  $l_2 < l_1$ , а її висота відповідає глибині водного шару в каналі  $h$ . Вибирається рухома система координат  $oxyz$ , початок якої знаходиться в центрі області тиску на вільній поверхні, вісь  $ox$  направлена в сторону, протилежну напрямку швидкості руху області, а вісь  $oz$  – вгору. Геометрія області поверхневого тиску задається у вигляді прямокутника з поздовжньою стороною  $2a$  і поперечною стороною  $2b$ . Тиск  $P(x, y)$  всередині області приймається рівномірно розподіленим, так що

$$P(x, y, 0) = P_0 f(x, y),$$

де  $f(x, y) = [H(x+a) - H(x-a)][H(y+b) - H(y-b)]$ . Тут  $H()$  – одиничні функції Хевісайда і  $f(x, y, t)$  може бути представлена рядом Фур'є по  $y$  та інтегральним представленням Фур'є по  $x$ .

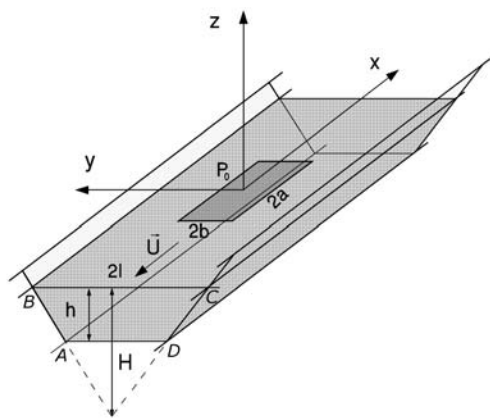


Рис. 1. Схема руху області тиску в каналі

Введення безрозмірних величин, де вибрані в якості масштабів: довжини – глибина каналу  $h$ , тиску –  $\rho U^2$ , потенціалу швидкості течії –  $U h$ , дозволяє сформулювати наступну граничну задачу для визначення потенціалу швидкості збуреної течії  $\phi(x, y, z, t)$ :

$$\Delta \phi = 0 \tag{1}$$

з граничними умовами

$$\lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + P_0 \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{при } z = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{при } (y, z) \in (AB \text{ і } CD), \tag{4}$$

та умовою випромінювання

$$\phi(x, y, z) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \tag{5}$$

Тут  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – тривимірний оператор Лапласа,  $\lambda = \frac{gh}{U^2}$  – обернене значення числа Фруда;  $\vec{n}$  – нормаль до бічних стінок каналу.

## 2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ В НОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Нехай прямі, що проходять через сторони  $AB$  і  $CD$ , перетинаються в точці, вертикальна координата якої  $z = -H$ , де  $H > 1$ . Введення нової поперечної координати  $y_1$

$$y_1 = \frac{Hy}{z + H}$$

дозволяє граничну умову (3) зі змінними значеннями  $y$  замінити умовою зі сталими значеннями  $y_1 = \pm l$ , що аналогічно задачі для каналу з прямокутним поперечним перерізом. Це виходить з того, що в кожній точці бокових стінок  $AB$  і  $CD$  її координата  $y_1$  дорівнює величині тангенса кута між бічними сторонами каналу і віссю  $oz$ . Отже, в координатах  $y_1, z$  поперечний переріз каналу набуває прямокутної форми. Геометрія області тиску в новій системі координат не змінюється, оскільки при  $z = 0$  виконується рівність  $y_1 = y$ .

В системі координат  $x, y_1, z$  рівняння (1) набуває вигляду

$$(z + H)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - (H^2 + y_1^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_1^2} + (z + H)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2y_1(z + H) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_1 \partial z} + 2y_1 \frac{\partial \phi}{\partial y_1} = 0, \tag{6}$$

а граничні умови (2)–(4) –

$$\lambda \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{y_1}{H} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + P_0 \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{при } z = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{y_1}{H-1} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} = 0 \quad \text{при } z = -1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_1} = 0 \quad \text{при } y_1 = \pm l. \tag{9}$$

Умова випромінювання (5) не змінює свого вигляду.

### 3. ПОВУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ

Розв'язок задачі для  $\phi(x, y_1, z)$  шукається у вигляді інтегрального перетворення Фур'є по  $x$ :

$$\phi = \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k_1, y_1, z) e^{ik_1x} dk_1. \quad (10)$$

Підстановка (10) у вирази (5)–(9) приводить до задачі знаходження розв'язку рівняння для функції образу  $\tilde{\phi}(k_1, y_1, z)$ :

$$(z + H)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2} - 2y_1(z + H) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y_1 \partial z} + (H^2 + y_1^2) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y_1^2} + 2y_1 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_1} - k_1^2(z + H)^2 \tilde{\phi} = 0 \quad (11)$$

з граничними умовами

$$\lambda \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} - \frac{y_1}{H} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_1} \right) - k_1^2 \tilde{\phi} + i\tilde{f} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} - \frac{y_1}{H-1} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_1} = 0 \quad \text{при } z = -1, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_1} = 0 \quad \text{при } y = \pm l, \quad (14)$$

де

$$\tilde{f} = 2 \sin(k_1 a) [H(y_1 + b) - H(y_1 - b)].$$

В силу симетричності  $f(x, y)$  по  $y$  вона залишається симетричною і по  $y_1$ . Тоді, як це видно з (11)–(14), функція  $\tilde{\phi}(k_1, y_1, z)$  також має симетричний по  $y_1$  характер і розв'язок для неї можна знаходити у вигляді розкладу в ряд Фур'є по  $y_1$  в інтервалі  $-l \leq y_1 \leq l$ , як це зроблено у [8]:

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{2} \bar{\phi}_0(k_1, z) + \sum_{k_2=1}^{\infty} \bar{\phi}_{k_2}(k_1, z) \cos(k_2 y_1), \quad (15)$$

де  $k_{2*} = \pi k_2 / l$ . Умова (14) при цьому задовольняється автоматично.

В силу симетричності складових рівняння (11)  $y_1 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_1}$  і  $y_1^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y_1^2}$  по  $y_1$  їх можна також представити у вигляді розкладів в ряд Фур'є:

$$y_1 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \check{\phi}_{n_1}(k_1, z) \cos(n_* y_1), \quad (16)$$

$$y_1^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y_1^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \check{\phi}_{n_2}(k_1, z) \cos(n_* y_1). \quad (17)$$

На підставі представлень (15)–(17) мають місце співвідношення

$$-y_1 \sum_{k_2=1}^{\infty} k_{2*} \bar{\phi}_{k_2} \sin(k_{2*} y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \check{\phi}_{n_1} \cos(n_* y_1),$$

$$-y_1^2 \sum_{k_2=1}^{\infty} k_{2*}^2 \bar{\phi}_{k_2} \cos(k_{2*} y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \check{\phi}_{n_2} \cos(n_* y_1),$$

де  $n_* = \frac{\pi n}{l}$ .

Якщо кожену складову цих співвідношень помножити на  $\cos(n_* y_1)$ , де  $n$  дорівнює деякому  $k_2$ , і проінтегрувати по  $y_1$  в інтервалі від  $-l$  до  $l$ , то в правих їхніх частинах всі складові при  $n \neq k_2$  дадуть нуль, а при  $n = k_2$  відповідно  $l\check{\phi}_{n_1} = l\check{\phi}_{k_2}$  та  $l\check{\phi}_{n_2} = l\check{\phi}_{k_2}$ . В лівих частинах отримуються нескінченні ряди складових  $\bar{\phi}_{k_2}$  з коефіцієнтами, які легко вираховуються. Виконання такої процедури для всіх  $1 \leq n < \infty$  та збирання у лівих частинах всіх складових для виділеного номера  $n = k_2$ , які відповідні всім іншим номерам  $n \neq k_2$ , приводить до наступного, справедливого для довільного  $k_2$ , представлення функцій  $\check{\phi}_{n_1}$  та  $\check{\phi}_{n_2}$  через образ-функції  $\bar{\phi}_{k_2}$  для  $n_1 = k_2$  та  $n_2 = k_2$ , відповідно:

$$\check{\phi}_{k_2 1} = \frac{1}{2} \bar{\phi}_{k_2} \left[ 1 - 4 \sum_{n=1, n \neq k_2}^{\infty} \frac{k_{2*} (-1)^{n+k_2}}{n_*^2 - k_{2*}^2} \right],$$

$$\check{\phi}_{k_2 2} = -\bar{\phi}_{k_2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\pi^2 k_2^2}{3} + 4k_2^2 (-1)^{k_2} \bar{\phi}_{k_2 n} \right],$$

де

$$\bar{\phi}_{k_2 n} = \sum_{n=1, n \neq k_2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - k_2^2} + 2k_2^2 \sum_{n=1, n \neq k_2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 - k_2^2)^2}.$$

Враховуючи, що [21]

$$\sum_{n=1, n \neq k_2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - k_2^2} = \frac{1}{4k_2^2} [2 + (-1)^{k_2}],$$

має місце наступне представлення складових  $\bar{\phi}_{k_2 1}$  і  $\bar{\phi}_{k_2 2}$  через базову функцію  $\bar{\phi}_{k_2}$ :

$$\bar{\phi}_{k_2 i} = r_{k_i} \bar{\phi}_{k_2} \quad (i = 1, 2), \quad (18)$$

де

$$r_{k_1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi k_2} [1 + 2(-1)^{k_2}] \right\},$$

$$r_{k_2} = -\frac{3}{2} - \frac{\pi^2 k_2^2}{3} - 2(-1)^{k_2} - 8k_2^4 (-1)^{k_2} r_{k_{2n}},$$

і

$$r_{k_{2n}} = \sum_{n=1, n \neq k_2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 - k_2^2)^2}.$$

Використання представлень (15)–(17) та залежності (18) приводить до наступних граничних задач визначення  $\bar{\phi}_0(k_1, z)$  та  $\bar{\phi}_{k_2}(k_1, z)$ :

1) для  $\bar{\phi}_0(k_1, z)$

$$\bar{\phi}_0'' - k_1^2 \bar{\phi}_0 = 0 \quad (19)$$

з граничними умовами

$$\lambda \bar{\phi}_0' - k_1^2 \bar{\phi}_0 = \frac{ia_0}{k_1} \quad \text{при } z = 0, \quad (20)$$

$$\bar{\phi}_0' = 0 \quad \text{при } z = -1, \quad (21)$$

де

$$a_0 = 4b_* \sin(k_1 a); \quad b_* = \frac{b}{7};$$

2) для  $\bar{\phi}_{k_2}(k_1, z)$

$$(z + H)^2 \bar{\phi}_{k_2}'' - 2r_{k_1}(z + H) \bar{\phi}_{k_2}' - [H^2 k_{2*}^2 - 2r_{k_1} - r_{k_2} + k_1^2(z + H)^2] \bar{\phi}_{k_2} = 0. \quad (22)$$

з граничними умовами

$$\lambda \bar{\phi}_{k_2}' - \left( \frac{\lambda}{H} r_{k_1} + k_1^2 \right) \bar{\phi}_{k_2} = ia_{k_2} \quad \text{при } z = 0, \quad (23)$$

$$\bar{\phi}_{k_2}' - \frac{r_{k_1}}{H-1} \bar{\phi}_{k_2} = 0 \quad \text{при } z = -1, \quad (24)$$

де

$$a_{k_2} = \frac{4}{\pi k_2} \sin(k_1 a) \sin(k_2 b).$$

Умови випромінювання в даних задачах аналогічні умові (5).

Отже, поставлена задача зведена до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.

#### 4. РОЗВ'ЯЗОК ДЛЯ ФУР'Є-КОМПОНЕНТ ОБРАЗУ ПОТЕНЦІАЛУ ШВИДКОСТІ

Розв'язок граничної задачі (19)–(21) для  $\bar{\phi}_0(k_1, z)$  має вигляд

$$\bar{\phi}_0(k_1, z) = \frac{ia_0}{k_1 D} [e^{k_1 z} + e^{k_1(2-z)}], \quad (25)$$

де

$$D = e^{2k_1}(\lambda - k_1) - \lambda - k_1.$$

Незалежні розв'язки рівняння (22) представляються через модифіковані функції Бесселя  $I_\nu[k_1(z + H)]$  і  $K_\nu[k_1(z + H)]$ , порядок  $\nu$  яких визначається параметрами рівняння  $l, H, k_2$

$$\nu = \frac{1}{2} [1 + 4r_{k_1}^2 + 4(H^2 k_{2*}^2 - r_{k_1} - r_{k_2})]^{1/2}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд [22]

$$\bar{\phi}_{k_2}(k_1, z) = (z + H)^{\frac{1+2r_{k_1}}{2}} (C_{1k} I_\nu + C_{2k} K_\nu). \quad (26)$$

Сталі інтегрування  $C_{1k}$  та  $C_{2k}$  визначаються з граничних умов (23) і (24) у вигляді

$$C_{1k} = \frac{ia_{k_2}}{B_k} [K_{\nu 1} + 2(H-1)k_1 K'_{\nu 1}],$$

$$C_{2k} = -\frac{ia_{k_2}}{B_k} [I_{\nu 1} + 2(H-1)k_1 I'_{\nu 1}],$$

де

$$B_k = [K_{\nu 1} + 2(H-1)k_1 K'_{\nu 1}] \times \\ \times \left[ \lambda H^{s_k} R_{k_1} - \left( \frac{\lambda r_{k_1}}{H} + k_1^2 \right) H^{q_k} I_{\nu 0} \right] - \\ - [I_{\nu 1} + 2(H-1)k_1 I'_{\nu 1}] \times \\ \times \left[ \lambda H^{s_k} R_{k_2} - \left( \frac{\lambda r_{k_1}}{H} + k_1^2 \right) H^{q_k} K_{\nu 0} \right], \\ R_{k_1} = r_{k_1} I_{\nu 0} + H k_1 I'_{\nu 0}, \\ R_{k_2} = r_{k_1} K_{\nu 0} + H k_1 K'_{\nu 0}, \\ s_k = \frac{2r_{k_1} - 1}{2}, \quad q_k = \frac{2r_{k_1} + 1}{2}.$$

Індекси '0' та '1' біля порядку функцій Бесселя означають визначення їх при значеннях  $z = 0$  і  $z = -1$  відповідно. Верхній індекс <sup>(l)</sup> означає похідну по  $z$ .

#### 5. ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ ЗА РУХОМОЮ ОБЛАСТЮ

Для визначення поля хвиль за рухомою областю використовується відоме співвідношення [23] для амплітуд зміщення вільної поверхні

$$\eta(x, y, 0) = -\frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + P_0 f \right). \quad (27)$$

З інтегрального перетворення Фур'є по  $x$  даного виразу відповідна образ-функція  $\tilde{\eta}(k_1, y, 0) = \frac{ik_1}{\lambda} \tilde{\phi}$  аналогічно потенціалу швидкості представляється у вигляді розкладу в ряд Фур'є по поперечній координаті:

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{2} \bar{\eta}_0(k_1, 0) + \sum_{k_2=1}^{\infty} \bar{\eta}_{k_2}(k_1, 0) \cos(k_2 y_1), \quad (28)$$

Враховуючи одержаний ряд Фур'є для  $\tilde{\phi}$ , для відповідних складових хвильового поля мають місце наступні представлення:

$$\bar{\eta}_0 = \frac{4b_* \sin(k_1 a)}{\lambda D} (e^{2k_1} + 1),$$

$$\bar{\eta}_{k_2} = \frac{4H^{q_k} A_k k_1}{\pi \lambda k_2 B_k} \sin(k_1 a) \sin(k_2 b),$$

де

$$A_k = I_{\nu 0} [K_{\nu 1} + 2(H-1)k_1 K'_{\nu 1}] - K_{\nu 0} [I_{\nu 1} + 2(H-1)k_1 I'_{\nu 1}].$$

Тоді розв'язок для  $\eta(x, y, 0)$  представляється у вигляді

$$\eta(x, y, 0) = \frac{1}{2}\eta_0 + \sum_{k_2=1}^{\infty} \eta_{k_2} \sin(k_2 * b) \cos(k_2 * y_1), \quad (29)$$

де

$$\begin{aligned} \eta_0(x, 0) &= \frac{P_0 b_*}{\pi \lambda} (J_{01} - J_{02}), \quad (30) \\ J_{01} &= \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{D} (e^{2k_1} + 1) e^{ik_1(x+a)} dk_1, \\ J_{02} &= \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{D} (e^{2k_1} + 1) e^{ik_1(x-a)} dk_1, \\ \eta_{k_2}(x, 0) &= \frac{P_0 H^{q_k}}{\pi^2 \lambda k_2} (J_{k1} - J_{k2}), \quad (31) \\ J_{k1} &= \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_k k_1}{B_k} e^{ik_1(x+a)} dk_1, \\ J_{k2} &= \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_k k_1}{B_k} e^{ik_1(x-a)} dk_1. \end{aligned}$$

Для обчислення інтегралів в одержаних виразах використовується апарат теорії лишків для аналітичних функцій комплексного змінного.

### 5.1. Розв'язок для складової $\eta_0(x, 0)$

Підінтегральні функції в  $J_{01}$  та  $J_{02}$  в  $k_1$ -площині задовольняють умовам леми Жордана і мають там особливі точки-полюси при  $k_1 = 0$  та  $k_1$ , відповідних розв'язку рівняння  $D = 0$ , або

$$e^{2k_1}(\lambda - k_1) - \lambda - k_1 = 0. \quad (32)$$

Рівняння (31) має один дійсний корінь  $k_1 = \zeta$  лише для режимів руху, відповідних умові  $\lambda > 1$  ( $\text{Fr} < 1$ ) і нескінчену множину чисто уявних коренів  $k_1 = \pm i\zeta_{*i}$ . Корінь  $\zeta$  знаходиться безпосередньо з (32), а корені  $\pm i\zeta_{*i}$  є розв'язками рівняння, яке впливає з рівності нулю як дійсної, так і уявної частини виразу  $D(ik_*)$ :

$$\lambda[1 - \cos(2k_*)] - k_* \sin(2k_*) = 0. \quad (33)$$

Слід відмітити, що множина розв'язків  $\zeta_{*i}$  включає в себе підмножину

$$\zeta_n = n\pi.$$

Відповідний аналіз показує, що полюс  $k_1 = 0$  не дає вкладу у розв'язок. Класичний підхід використання теореми Коші для замкнутого контура з його замиканням у верхній або нижній півплощині комплексної  $k_1$ -площини, в залежності від знаку величин  $x + a$  і  $x - a$ , з урахуванням умови випромінювання, дає наступний розв'язок для  $\eta_0(x, 0)$ :

а) в області  $x > a$

$$\eta_0(x, 0) = \frac{P_0 b_*}{\lambda} [-8A_0 \sin(\zeta x) \sin(\zeta a) + A_{01}^{(i)}]. \quad (34)$$

$$A_0 = \frac{e^{2\zeta} + 1}{2e^{2\zeta} (\lambda - \zeta - \frac{1}{2}) - 1},$$

$$A_{01}^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{0i}}{D_{0i}} [e^{-\zeta_{*i}(x+a)} - e^{-\zeta_{*i}(x-a)}].$$

$$A_{0i} = D_{0ii}[1 + \cos(2\zeta_{*i})] - D_{0ir} \sin(2\zeta_{*i}),$$

$$D_{0i} = D_{0ir}^2 + D_{0ii}^2,$$

$$D_{0ir} = (2\lambda - 1) \cos(2\zeta_{*i}) + 2\zeta_{*i} \sin(2\zeta_{*i}) - 1,$$

$$D_{0ii} = (2\lambda - 1) \sin(2\zeta_{*i}) - 2\zeta_{*i} \cos(2\zeta_{*i}).$$

б) в області  $-a < x < a$

$$\eta_0(x, 0) = \frac{P_0 b_*}{\lambda} \{4A_0 \cos[\zeta(x+a)] + A_{02}^{(i)}\}, \quad (35)$$

$$A_{02}^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{0i}}{D_{0i}} [e^{-\zeta_{*i}(x+a)} + e^{\zeta_{*i}(x-a)}].$$

в) в області  $x < -a$

$$\eta_0(x, 0) = -\frac{P_0 b_*}{\lambda} A_0^{(i)}, \quad (36)$$

$$A_{03}^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{0i}}{D_{0i}} [e^{\zeta_{*i}(x+a)} - e^{\zeta_{*i}(x-a)}].$$

### 5.2. Розв'язок для складової $\eta_{k_2}(x, 0)$

Підінтегральні функції складових  $J_{k1}$  та  $J_{k2}$  розв'язку (31) в  $k_1$ -площині при  $k_1 \rightarrow \infty$  прямують до нуля як  $k_1^{-1}$  і, отже, задовольняють умовам леми Жордана. Вони мають особливі точки в цій площині. Це точка розгалуження  $k_1 = 0$ , характерна для всіх функцій Бесселя, та точки, координати яких задовольняють рівняння  $B_{k_2} = 0$ , або

$$\begin{aligned} & [K_{\nu 1} + 2(H-1)k_1 K'_{\nu 1}] \times \\ & \times \left[ \lambda H^{s_k} R_{k1} - \left( \frac{\lambda r_{k1}}{H} + k_1^2 \right) H^{q_k} I_{\nu 0} \right] - \end{aligned}$$

$$- [I_{\nu 1} + 2(H - 1)k_1 I'_{\nu 1}] \times \left[ \lambda H^{s_k} R_{k_2} - \left( \frac{\lambda r_{k_1}}{H} + k_1^2 \right) H^{q_k} K_{\nu 0} \right] = 0. \quad (37)$$

Вздовж дійсної піввісі  $k_1 \leq 0$  в  $k_1$ -площині виконано розріз.

Рівняння (37) має корінь  $\zeta_k^{(r)}$  на додатній дійсній піввісі, де зручно позначити  $k_1 = k_1^{(+)} \geq 0$ . На від'ємній дійсній піввісі, яку також зручно позначити як  $k_1 = k_1^{(-)} \leq 0$ , корені знаходяться за допомогою представлення  $k_1^{(-)}$  на кожному з берегів розрізу через рівне по модулю додатне  $k_1^{(+)}$  та використання відомих виразів аналітичного продовження для модифікованих функцій Бесселя на обох берегах розрізу [24]. На верхньому березі розрізу, де для рівних модулів  $k_1^{(+)}$  і  $k_1^{(-)}$  ці величини виражаються одна через другу як  $k_1^{(-)} = k_1^{(+)} e^{\pi i}$ ,

$$I_{\nu}(k_1^{(-)}) = e^{\nu \pi i} I_{\nu}(k_1^{(+)}) , \\ K_{\nu}(k_1^{(-)}) = e^{-\nu \pi i} K_{\nu}(k_1^{(+)}) - \pi i I_{\nu}(k_1^{(+)}) .$$

На нижньому березі, де  $k_1^{(-)} = k_1^{(+)} e^{-\pi i}$ ,

$$I_{\nu}(k_1^{(-)}) = e^{-\nu \pi i} I_{\nu}(k_1^{(+)}) , \\ K_{\nu}(k_1^{(-)}) = e^{\nu \pi i} K_{\nu}(k_1^{(+)}) - \pi i I_{\nu}(k_1^{(+)}) .$$

Підстановка цих виразів у рівняння (37) показує, що воно не змінює свого вигляду на обох берегах розрізу. З цього виходить, що на від'ємній дійсній вісі, як і у випадку складової  $\eta_0(x, 0)$ , має місце симетричний корінь  $-\zeta_k^{(r)}$ .

Враховуючи відомі властивості спряженості бesselових функцій для дійсних  $\nu$ ,

$$I_{\nu}(\bar{k}_1) = \bar{I}_{\nu}(k_1) , \quad K_{\nu}(\bar{k}_1) = \bar{K}_{\nu}(k_1) ,$$

неважко пересвідчитись, що має місце залежність

$$B_k(\bar{k}_1) = \bar{B}_k(k_1) .$$

Це означає, що рівняння (37), окрім дійсних коренів  $\pm \zeta_k^{(r)}$ , має ще (для кожного значення  $k_2$ ) нескінчену множину чисто уявних коренів  $\pm i \zeta_k^{(in)}$ .

Відповідний аналіз показує, що величина  $A_k$  також не змінюється при переході на другий берег розрізу, внаслідок чого при обході розрізу сумарний вклад у величину інтегралів  $J_{k_1}$  та  $J_{k_2}$  рівний нулю. Окрім того, аналіз асимптотики підінтегральних функцій  $I_{k_1}$  та  $I_{k_2}$  в околі точки розгалуження ( $k_1 \rightarrow 0$ ) показує, що вони тут прямують до величини  $2/(2r_{k_1} + 1)$ , так що величина інтегралів при обході цієї точки по колу нескінченно

малого радіуса прямує до нуля. Отже, у розв'язок для даної складової, як і у випадку для  $\eta_0(x, 0)$ , вклад дають лише полюси підінтегральних функцій  $\pm \zeta_k^{(r)}$  та  $\pm i \zeta_k^{(in)}$ .

В результаті виконання стандартної процедури інтегрування по замкнутому контуру з використанням теореми Коші одержано наступний розв'язок для  $\eta_{k_2}(x, 0)$ :

а) в області  $x > a$

$$\eta_{k_2}(x, 0) = \frac{2P_0}{\pi \lambda k_2} H^{q_k} \sin(k_2 * b) \eta_{k_2 1} , \quad (38) \\ \eta_{k_2 1} = - \frac{4A_k^{(r)} \zeta_k^{(r)}}{B_{kp}^{(r)}} \sin(\zeta_k^{(r)} x) \sin(\zeta_k^{(r)} a) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{kn} \left[ e^{-\zeta_k^{(in)}(x+a)} - e^{-\zeta_k^{(in)}(x-a)} \right] ;$$

б) в області  $-a < x < a$

$$\eta_{k_2}(x, 0) = \frac{2P_0}{\pi \lambda k_2} H^{q_k} \sin(k_2 * b) \eta_{k_2 2} , \quad (39) \\ \eta_{k_2 2} = \frac{2A_k^{(r)} \zeta_k^{(r)}}{B_{kp}^{(r)}} \cos[\zeta_k^{(r)}(x+a)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_{kn} \left[ e^{-\zeta_k^{(in)}(x+a)} + e^{\zeta_k^{(in)}(x-a)} \right] ;$$

в) в області  $x < -a$

$$\eta_{k_2}(x, 0) = - \frac{2P_0}{\pi \lambda k_2} H^{q_k} \sin(k_2 * b) \times \sum_{n=1}^{\infty} G_{kn} \left[ e^{\zeta_k^{(in)}(x+a)} - e^{\zeta_k^{(in)}(x-a)} \right] . \quad (40)$$

Тут

$$A_k^{(r)} = A_k(\zeta_k^{(r)}) , \quad B_{kp}^{(r)} = \frac{dB_k}{dk_1}(\zeta_k^{(r)}) , \quad (41)$$

$$A_k^{(in)} = A_k(i \zeta_k^{(in)}) , \quad B_{kp}^{(in)} = \frac{dB_k}{dk_1}(i \zeta_k^{(in)}) , \quad (42)$$

$$G_{kn} = \operatorname{Re} \left( \frac{i A_k^{(in)} \zeta_k^{(in)}}{B_{kp}^{(in)}} \right) . \quad (43)$$

Вирази (29), (34)–(36) та (38)–(40) дають розв'язок поставленої задачі визначення поля корабельних хвиль за рухомою областю тиску.

## 6. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Розрахунки характеристик хвильового поля та амплітудних картин виконані для декількох характерних режимів руху області поверхневого тиску,

подібних тим, що були використані для каналу з прямокутним поперечним перерізом шириною  $2l$ . Це дозволяє провести аналіз впливу трапецеївидності каналу на характеристики відповідних хвильових полів.

При визначенні характеристик поверхневих хвиль для обчислення функцій Бесселя  $I_\nu$  та  $K_\nu$  використовувались їхні інтегральні представлення, а для великих значень  $\nu$  – їхні відповідні асимптотичні представлення. Похідні відмічених функцій знаходилися з відомих виразів їхнього представлення через самі функції [24].

В цілому, структура амплітудної картини подібна до випадку прямокутного каналу і включає в себе поперечні і розбіжні хвилі. При цьому поперечні хвилі, відповідні розв'язку для  $\eta_0$ , виявились ідентичними одержаним в [8] для каналу з вертикальними стінками ширини  $2l$ . Їх не існує для режимів з  $\lambda < 1$ . При  $\lambda > 1$ , що відповідає докритичним значенням числа Фруда  $Fr < 1$ , ці хвилі присутні по всій ширині каналу в області  $x > -a$ . Відповідна поперечна хвиля з хвильовим числом  $\zeta$ , прив'язана до рухомої області в зоні  $-a < x < a$ , представляється складовою з  $\cos[\zeta(x+a)]$ , а позаду цієї зони при  $x > a$  – складовими з  $\sin(\zeta a) \sin(\zeta x)$ . Як впливає з розв'язку для  $\zeta$ , інтенсивність цієї складової пропорційна параметру  $b_*$ , який при  $l \rightarrow \pm\infty$  прямує до нуля.

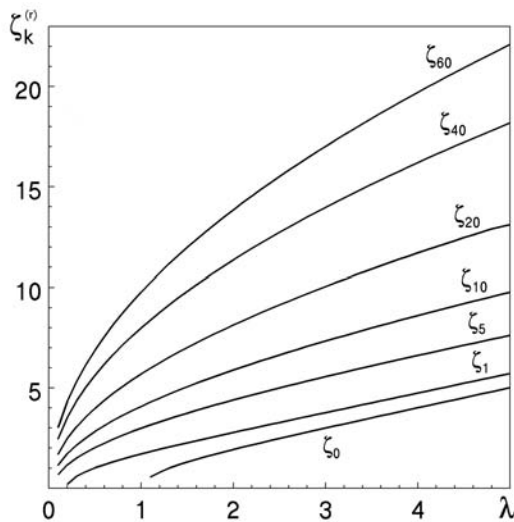


Рис. 2. Залежність  $\zeta$  та  $\zeta_k^{(r)}$  від  $\lambda$  при  $H = 1.2$

Друга система хвиль (розбіжних), які існують при всіх  $\lambda$ , описується складовими з  $\sin(\zeta_k^{(r)} x) \sin(\zeta_k^{(r)} a)$  і вона бере участь у формуванні хвильової картини позаду області тиску. Складові з  $\cos[k_{2*} y - \zeta_k^{(r)} x]$  відповідають хвилям, які

формується зліва від вісі руху, потім відбиваються від лівої стіни каналу і поширюються вправо. Відповідно, складові з  $\cos[k_{2*} y + \zeta_k^{(r)} x]$  формуються справа від вісі руху, потім відбиваються від правої стінки каналу і поширюються вліво. Далі процеси відбиття хвиль повторюються.

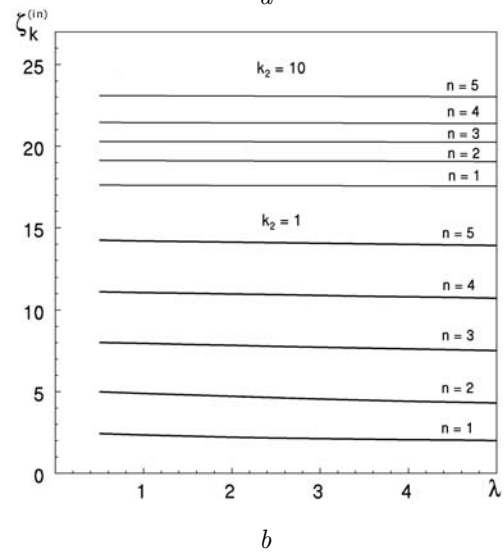
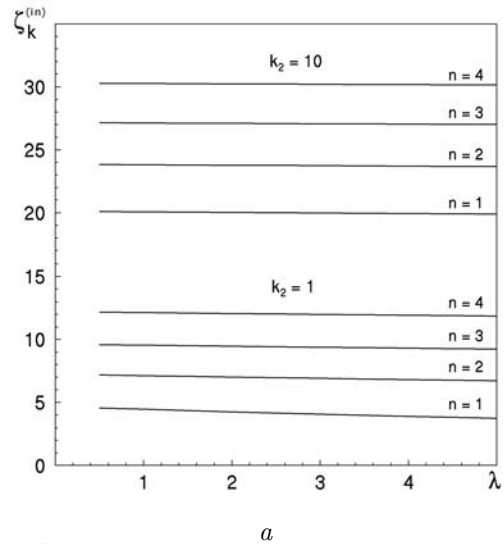


Рис. 3. Залежність  $\zeta_k^{(in)}$  від  $\lambda$  при:  $a - H = 1.2$ ;  $b - H = 4$

В ближній до області тиску зоні ці хвилі, подібно до схем руху без бокових стінок, також знаходяться всередині певного сектора, величину кута якого, на відміну від випадку відсутності стінок, не вдається визначити явно. На рис. 2 наведена залежність відповідних значень хвильових чисел обох типів хвиль від параметра  $\lambda$  при  $H = 1.2$ , одержана із розв'язку рівняння (37). З нього видно, що при фіксованому значенні  $\lambda$  величини



хвильових чисел  $\zeta_k^{(r)}$  збільшуються зі зростанням номера Фур'є складової  $k_2$ , а збільшення величини параметра  $\lambda$  при фіксованому значенні  $k_2$  дає зростання хвильових чисел генерованих хвиль. Представлені залежності дуже близькі до відповідних залежностей, одержаних для каналу тієї самої ширини з прямокутною формою поперечного перерізу [8] (відмінність має місце, починаючи з третього-четвертого значущого числа в діапазоні  $k_2 \leq 60$ ).

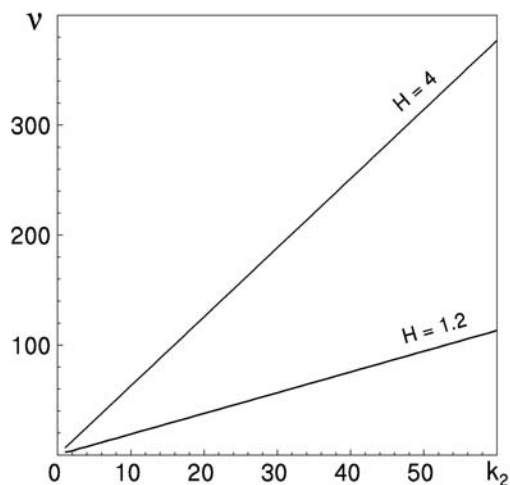


Рис. 4. Залежність  $\nu$  від  $k_2$  при  $l = 3$

Аналогічні розрахунки при  $H = 2$  та  $H = 4$  дають значення хвильових чисел, які мало відрізняються від наведених на рис. 2, але ще ближче до їхніх значень у випадку прямокутної форми перерізу каналу, а при  $H \rightarrow \infty$  залежність  $\zeta_k^{(r)}$  від  $\lambda$  строго відповідає цій формі. Це означає, що фазова картина поверхневого хвильового поля формується спектром хвильових чисел (множина Фур'є-компонент  $\zeta_k^{(r)}$ ), який слабо залежить від величини  $H$  при однакових інших параметрах. Отже, ефект впливу  $H$  на хвильову картину обумовлений, головним чином, механізмами трансформації хвиль, набігаючих на похилий берег, крутизну схилу якого ця величина і визначає.

Затухаючі збурення, породжені рухомою областю тиску, описуються уявними коренями рівняння (37). Для кожного значення  $k_2$  і  $\lambda$  існує нескінченна кількість цих коренів  $\pm i\zeta_k^{(in)}$ . Характер залежності цих коренів від  $\lambda$  для двох значень параметра  $H$  представлений на рис. 3. Як видно, ця залежність від вказаних параметрів кардинально відрізняється від тієї, яка має місце для дійсних коренів  $\pm\zeta_k^{(r)}$ . В даному випадку уявні корені помітно

залежать від значення  $H$  і вкрай слабо залежать від значення  $\lambda$ . Враховуючи, що всі  $\pm i\zeta_k^{(in)}$  мають достатньо великі значення їхніх модулів  $\zeta_k^{(in)}$ , які швидко зростають зі зростанням  $k_2$  і  $H$ , затухаючі збурення швидко прямують до нуля зі збільшенням віддалі від області тиску, що надалі і підтверджують проведені розрахунки.

На рис. 4 представлена залежність величини порядку функцій Бесселя  $\nu$  від хвильових чисел  $k_2$  для двох значень  $H$ . Як видно, зі збільшенням  $H$  градієнт зростання значення  $\nu$  швидко зростає. Саме цим обумовлене згадуване вище застосування асимптотичних представлень для великих  $\nu$  при обчисленні функцій Бесселя.

Характерні картини розподілу ізоліній зміщення вільної поверхні  $\eta/P_0 = \text{const}$  за рухомою областю тиску, віднесеного до величини  $P_0$ , для різних значень визначальних параметрів  $a, b, l, H, \lambda$  наведені на рис. 5–9. Аналіз отриманих у результаті розрахунків картин хвильових полів показує, що для каналів з трапецієвидною формою поперечного перерізу формування хвильової картини зберігає всі характерні особливості, властиві для каналів з прямокутною формою перерізу, набуваючи, однак, деякі нові особливості. Як вже відмічалось, поле поперечних хвиль у рамках розглянутої лінійної постановки в обох випадках співпадає. В ближній зоні за рухомою областю формуються системи носових і кормових хвиль, при цьому кут хвильового сектора, в якому розміщені хвильові цуги, сформовані інтерференцією розбіжних і поперечних хвиль, зростає зі збільшенням величини  $\lambda$ . Відбувається регулярне відбиття поверхневих хвиль від бокових стінок. Як і у випадку відсутності бокових стінок [2, 8, 12], зменшення величини  $\lambda$  зменшує кут хвильового сектора в ближній області, що, звичайно, змінює загальну картину поверхневого збурення. Зі зростанням величини  $\lambda$ , при однакових інших параметрах, амплітуди поверхневих хвиль зменшуються.

Про характер впливу на ці процеси трапецієвидності каналу можна робити висновки на підставі виконаних розрахунків.

На рис. 5 представлена картина ізоліній зміщення вільної поверхні для двох значень  $\lambda$  при незмінних характеристиках області тиску і каналу. На обох картинах видно наявність в ближній зоні за рухомою областю тиску області характерної клиновидної форми, утвореної носовою і кормовою системами хвиль, які сформовані інтерференцією розбіжних та поперечних хвиль. Останні, як вже відмічено, присутні в означеній області каналу. В середині області хвильового поля, де присутні

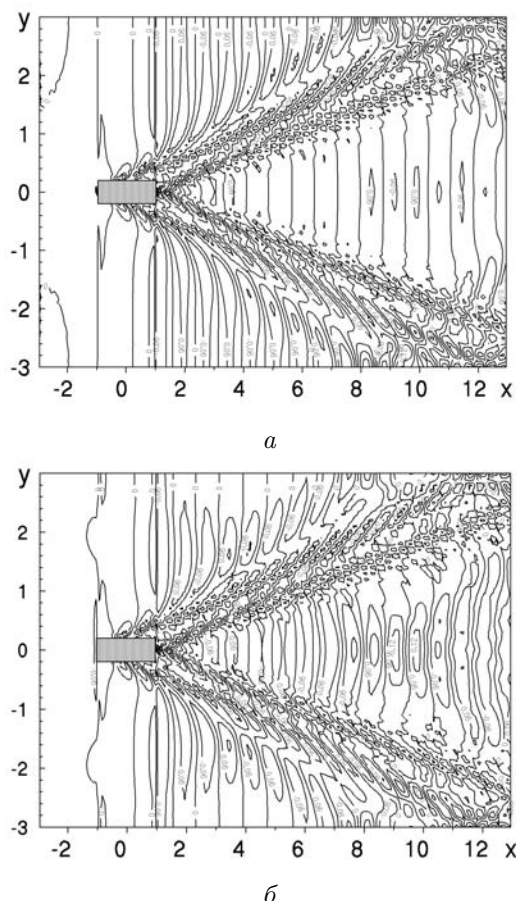


Рис. 5. Ізолії зміщення вільної поверхні при  $\lambda = 4, a = 1, b = 0.2, l = 3$ :  
 $a - H = 4$ ;  $b - H = 1.2$

переважно поперечні хвилі, зі зростанням віддалі від рухомої області до початку відбиття хвильових цугів від бічних стінок має місце зростання їхніх амплітуд при зменшенні величини  $H$ . При досягненні хвильовими фронтами бокових стінок прослідковується початок процесу їх відбиття. Порівняння наведених полів ізолій показує також, що зменшення величини  $H$  (що збільшує протяжність зони схилу бокових стінок каналу) збільшує протяжність переднього фронту хвиль у зоні схилу стінки каналу. В результаті кут розхилу області, зайнятої поверхневими хвилями, зростає (рис. 5, б), що, в певній мірі, відповідне зменшенню середньої глибини каналу. При цьому, амплітуди поверхневих хвиль зі зменшенням величини  $H$  зростають. Наочно вплив зменшення величини  $H$  найкраще спостерігається всередині зони хвильового клину, де знаходяться переважно поперечні хвилі. Там чітко спостерігається помітне зростання амплітуд цих хвиль (в наведеному проміжку

пройденного шляху вони зросли приблизно вдвічі). На передніх фронтах хвильового поля також чітко видно зростання, хоч і менш інтенсивне, їхніх амплітуд над ділянкою схилу стінок каналу.

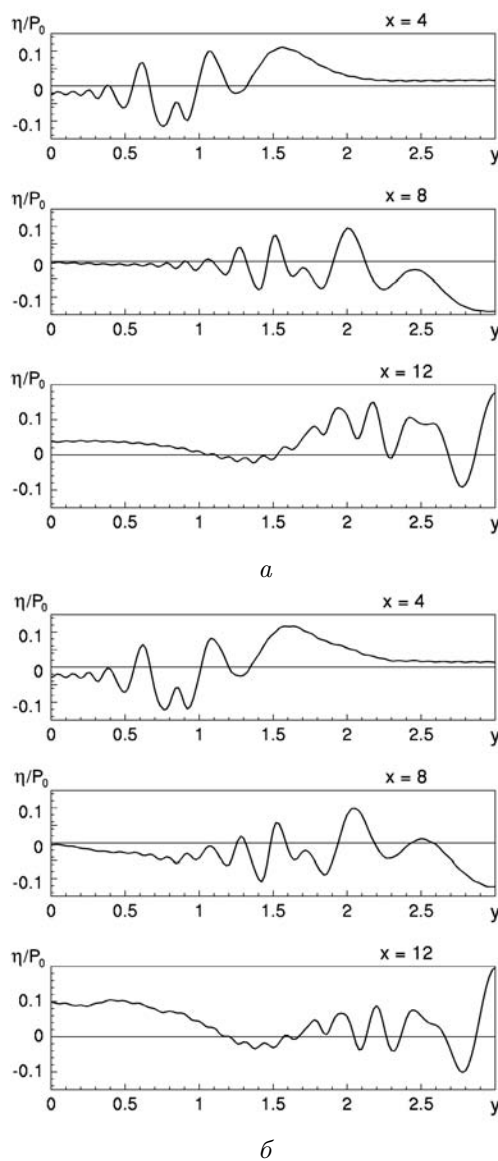


Рис. 6. Зміщення вільної поверхні вздовж поперечних перерізів каналу  $\lambda = 4, a = 1, b = 0.2, l = 3$ :  
 $a - H = 4$ ;  $b - H = 1.2$

На рис. 6 представлено профілі збурення вільної поверхні в трьох поперечних перетинах каналу для тих режимів руху області тиску, що і на рис. 5. З порівняння відповідних профілів видно, що найбільша (більш ніж вдвічі) зміна амплітуд має місце в уже згадуваній області всередині каналу між хвильовими цугами. Відомо, що трансформація хвильових цугів поверхневих корабель-

них хвиль обумовлена дисперсійним розбіганням їхніх хвильових складових. Для каналів з похилими боковими стінками на цей процес впливає крутизна та протяжність цих схилів. В перерізі каналу при  $x = 4$  зміна амплітуди в області переднього фронту починається раніше для меншого значення  $H$ . Це обумовлено тим, що ширина області впливу бічних стінок при  $H = 1.2$  ширша, ніж при  $H = 4$ . Це цілком природно, враховуючи більшу протяжність схилу в цьому випадку. В силу відміченої раніше малої відмінності спектрів генерованих хвильових чисел для різних  $H$ , слід очікувати, що наявні відмінності профілів  $\eta(y)$  для  $H = 1.2$  і  $H = 4$  обумовлені, головним чином, впливом крутизни схилу. Цей вплив обумовлює зміну параметрів кожної складової спектру хвильового цуга як при його набіганні на похилу стінку, так і при відбитті від неї.

хвиль доповнюються збільшенням ширини області, зайнятої розбіжними хвильовими цугами. Це видно із порівняння хвильових картин, представлених на рис. 5 і 7. Відносно рис. 7 слід відмітити, що режим руху з  $\lambda = 2$  в каналах відноситься до діапазону двох критичних швидкостей, де гідродинаміка хвильових полів за суднами має нелінійну природу і тому не описується в лінійній постановці [4]. Однак для якісного аналізу впливу зміни величини  $\lambda$  на картину поля лінійних поверхневих хвиль використання розв'язків лінійних задач допустиме. Для достатньо вузьких каналів хвильові фронти швидко досягають берегів каналу і хвильова картина формується, починаючи з деякої відстані від рухомої області, як інтерференція набігаючих та відбитих систем хвиль. Характерний вигляд хвильових картин для таких ситуацій наведено на рис. 8, де представлена хвильова картина для режиму руху області тиску, відповідному рис. 5, але для каналу шириною  $2l = 4$ .

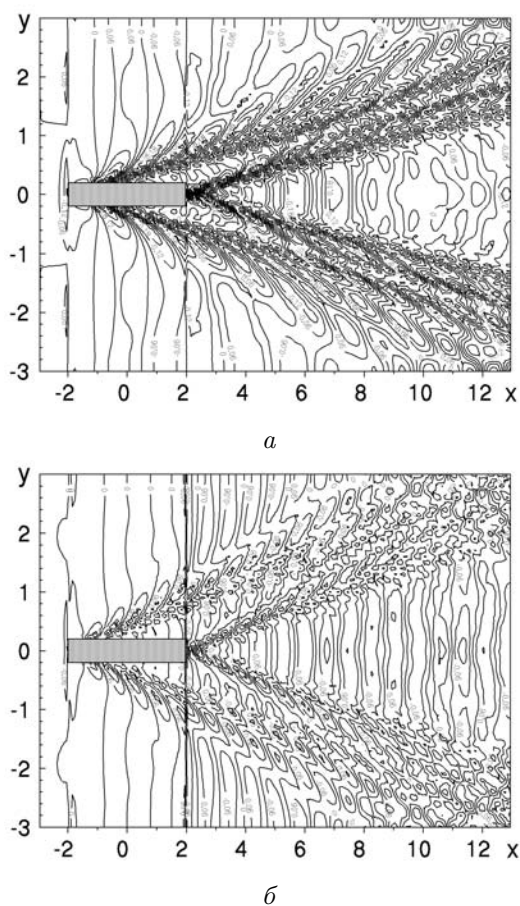


Рис. 7. Ізолії зміщення вільної поверхні при  $H = 1.2, a = 2, b = 0.2, l = 3$ :  
 $a - \lambda = 2; б - \lambda = 4$

При збільшенні довжини області тиску відмічені вище особливості формування корабельних

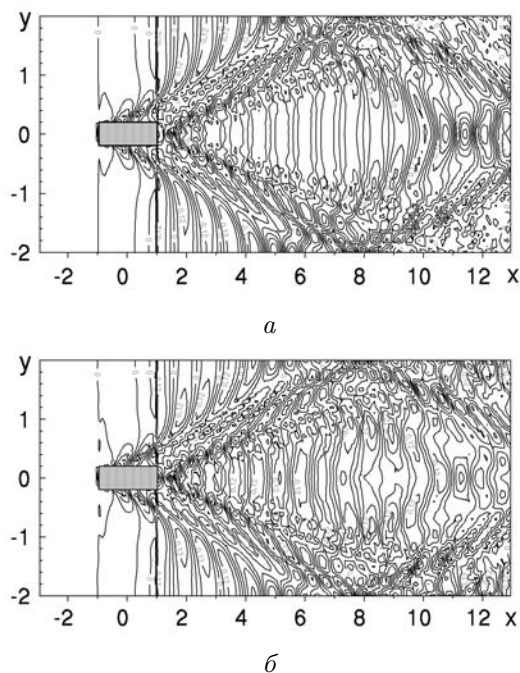


Рис. 8. Ізолії зміщення вільної поверхні при  $l = 2, \lambda = 4, a = 1, b = 0.2$ :  
 $a - H = 4; б - H = 1.2$

В даному випадку характерні відмінності хвильових картин можна виділити лише на передніх фронтах хвильових цугів до початку їх відбиття, де має місце зростання амплітуд хвиль зі зменшенням величини  $H$ , та всередині каналу між розбіжними хвильовими цугами, де при такій же зміні  $H$  помітно зростають амплітуди наявних там збу-

рених поперечних хвиль. Як видно з рис. 8, останнє зростання всередині каналу має місце і після першого відбиття хвильових фронтів. При цьому, як це впливає з представлених тут та на рис. 5 і 7 хвильових картинах, якщо на ділянці кільватерного сліду до початку відбиття хвильових фронтів зростання амплітуд завжди більше при меншому значенні  $H$ , то після відбиття в зоні інтерференції відбитих хвиль більш інтенсивне зростання амплітуд може мати місце і при більшому значенні  $H$ .

В області закритичних режимів руху, при  $\lambda < 1$ , вплив нелінійності різко зменшується. Тут відсутні поперечні хвилі. Тому представляють інтерес також особливості лінійного розв'язку для хвильового поля в умовах руху області тиску в каналі з трапецієвидним поперечним перерізом і для таких режимів. На рис. 9 представлені відповідні поверхневі хвильові картини для двох значень параметра  $H$ .

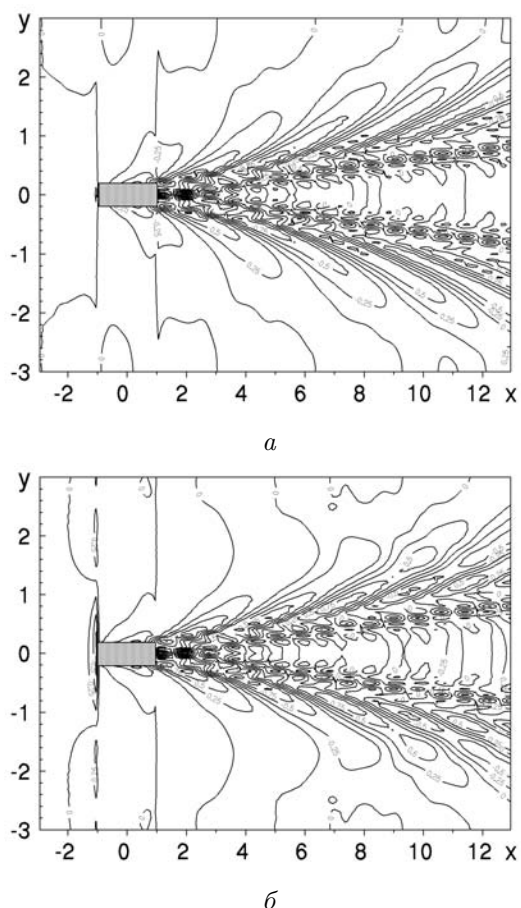


Рис. 9. Ізолнії зміщення вільної поверхні при  $\lambda = 0.5, a = 1, b = 0.2, l = 3$ :  
а –  $H = 4$ ; б –  $H = 1.2$

Аналіз структури одержаних хвильових полів

для даного режиму руху показує її відповідність проаналізованому вище характеру впливу на них величини скосу бокових стінок каналу та величини  $\lambda$ . Однак, враховуючи малі значення  $\lambda$  і одну і ту саму область розрахунку вздовж координати  $x$ , зростання амплітуд в області переднього фронту хвиль та всередині хвильової області між розбіжними цугами хвиль та збільшення кута розхилу хвильової області зі зменшенням величини  $H$  виражено слабкіше.

## ЗАКЛЮЧЕННЯ

В роботі вперше розв'язана лінійна задача розрахунку поля корабельних (баричних) хвиль, генерованих стаціонарним рухом області поверхневого тиску в каналі з трапецієвидною формою поперечного перерізу. Розв'язок задачі знаходився в перетвореній системі координат, в якій граничні умови на косих бічних стінках трансформуються в умови на вертикальних стінках. Застосовано перетворення Фур'є по поздовжній координаті та розклад образу потенціала швидкості в ряд Фур'є по новій поперечній координаті. Разом зі знайденим представленням складових перетвореного рівняння для функції-образу до вигляду, який має точний розв'язок, це дозволило знайти точний розв'язок поставленої задачі у вигляді квадратур. На підставі виконаних чисельних експериментів можна сформулювати наступні висновки стосовно особливостей формування корабельних хвиль для розглянутого типу каналів:

1. Всі особливості впливу головних параметрів задачі ( $l, \lambda, a, b$ ) для каналів прямокутного поперечного перерізу зберігаються і для каналів з трапецієвидним перерізом.

2. Поперечні хвилі, генеровані рухомою областю тиску, аналогічні випадку каналу прямокутного перерізу. Хвильові числа спектру розбіжних хвиль, навіть для  $H$ , близьких до одиниці, мало (в третій-четвертій значущій цифрі) відрізняються від випадку прямокутного каналу. Це означає, що вплив скосу бічних стінок проявляється лише через механізм трансформації розбіжних хвиль в області схилів берегів каналу як в процесі набігання, так і в процесі їх відбиття.

3. При зменшенні величини  $H$  і незмінній глибині каналу  $h$  (зменшення крутизни і, відповідно, збільшення протяжності схилу) має місце трансформація хвильового поля зі зростанням амплітуд хвиль, що найбільш помітно в зоні набігання переднього хвильового фронту на стінку і всередині каналу між розбіжними хвильовими цугами, та збільшення кута розхилу сектора хвильового по-

ля. Обидві особливості подібні до ефекту зменшення величини  $h$ .

В цілому, як впливає з одержаних результатів, вплив скошу бічних стінок каналу на хвильове поле за рухомою областю поверхневого тиску зростає зі зменшенням величини параметра  $H$ . В реальних ситуаціях обмежених фарватерів для суден вплив схилів може бути значно більш істотним, оскільки в цьому випадку включається вплив такого параметра як відношення середньої площі поперечного перерізу судна до площі поперечного перерізу каналу. Цей клас задач, включно з режимами руху в діапазоні критичних швидкостей, представляє найбільший інтерес.

1. Sretensky L.N. On the Wave-making resistance of a Ship moving along in canal // Philosophical Magazine.- 1936.- 7, 22.- P. 1005-1013.
2. Сретенский Л.Н. О волновом сопротивлении корабля при нестационарном движении // В сб. Теоретический сборник ЦАГИ, Труды ЦАГИ.- 1937.- вып. 4, 301.- С. 16-19.
3. Воробьев Ю.Л. Гидродинамика судна в стесненном фарватере.- С.-Петербург: Судостроение, 1992.- 224 с.
4. Войткунский Я.И. Сопротивление движению судов.- Л.: Судостроение, 1988.- 287 с.
5. Newman Y.N., Pote F.A.P. The wave Resistance of a Moving Pressure Distribution in a Canal. // Schiffstechnik.- 1962.- 45,9.- P. 21-26.
6. Eggers K. Uber die Ermittlung des Wellenwiderstandes eines Schiffmodells durch Analyse Wellensystems. // Schiffstechnik.- 1962.- 46,9.- P. 79-85.
7. Tuck E.O. Sinkage and trim in shallow water of finite width. // Schiffstechnik.- 1967.- 14,5.- P. 92-94.
8. Ільченко В.М., Стеценко О.Г. Поверхневі хвилі в каналі, утворені рухомою областю поверхневого тиску // ПГМ.- 2013.- 15(87), 4.- С. 40-48.
9. Kratochvil S. Viny vyvolane plavidiem na omegene neproudici vode. // Vodohosp. cas.- 1979.- 27, 4.- P. 359-377.
10. Abdel-Macsoud M., Riech K. Wellensystem eines Schiffes bei stationaren Fahrstand // Dresden Wasserbauliche Mitteilungen Technische Universitat.- Dresden, Inst. fur Wassenbau und Techn. Hydromech.- 1996.- P. 9.55-74
11. Ertekin R.C., Webster W.C., Wehansen J.V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel. // J.of Fl.Mechanics.- 1986.- 69.- P. 275-292.
12. Pedersen G. Three dimensional wave patterns generated by moving disturbances in transcritical speeds. // J. of Fl.Mechanics.- 1988.- 196.- P. 39-63.
13. Henn R., Sharma S.D., Yiang T. Influence of Canal Topography of Ship Waves in shallow Water.- Proc. 16th. Int. Work Shop in Water Waves and Floating Bodies: 2001.- P. 1-4
14. Li Y., Sclavounes P.D. Three-dimensional nonlinear solitary waves in shallow water generated by an advancing disturbance. // J. of Fl. Mechanics.- 2002.- 470.- P. 393-410.
15. Hang G.B., Dai Y., Matsuda H. Numerical study on breaking Phenomen of Ships waves in narrow and shallow waterways. // J.Mar.Sci.Technol.- 2005.- 10.- P. 11-21.
16. Torsvik K.T. Influence of variable Froude number on waves generated by ships in shallow water // Phys.of Fluids.- 2006.- 18,062102.- P. 1-11.
17. Мороз В.В., Кочін В.О. Виникнення та розвиток хвиль-солітонів перед судном, що рухається в каналі в діапазоні критичних швидкостей. // Доп.НАН України.- 2005.- 1.- С. 50-64.
18. Torsvik T., Pedersen G., Dysthe K. Influence of cross chanel depth variation on ship wave patters // Mechanics and Applied Matsematics.//Depth of Math. University of Oslo.- 2008.- 18, 6.-2102.- P. 1-23.
19. Jovanovic M. Ship resistance in navigation canals. // Preprint.- University of Belgrade.- 2014.- P. 9.
20. Liu P.L.-F., Wu T.-R. Waves Generated by Moving Pressure Disturbances in Rectangular and Trapezoidal Channels. // Journal of Hidraulic Research.- 42(2).- 2004.- P. 163-171.
21. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 797 с.
22. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1971.- 576 с.
23. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости.- М.: Наука, 1977.- 588 с.
24. Справочник по специальным функциям. под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.- М.: Наука, 1979.- 830 с.