

УДК 532.5

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В СВЕРХЗВУКОВОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

К. В. АВРАМОВ*, М. В. ЧЕРНОБРЫВКО*, В. Н. РОМАНЕНКО*,
Т. Я. БАТУТИНА**, В. А. ПИРОГ**

* Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков
61046 Харьков, ул. Пожарского, 2/10

** Государственное предприятие "Конструкторское бюро "Южное" им. М.К. Янгеля",
Днепропетровск
kavramov@ipmach.kharkov.ua

Получено 03.07.2014

Исследуется динамическая неустойчивость параболических оболочек в сверхзвуковом газовом потоке. Такие оболочки описывают обтекатели ракет-носителей. Для получения уравнений движения конструкции применяется метод заданных форм. Сверхзвуковое течение газа описывается поршневой теорией. Исследуются области динамической неустойчивости конструкции и формы динамической потери устойчивости параболических оболочек при возникновении автоколебаний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: обтекатели ракет-носителей, сверхзвуковой газовый поток, динамическая потеря устойчивости

Досліджується динамічна нестійкість параболических оболонок у надзвуковому газовому потоці. Такі оболонки описують обтічники ракет-носіїв. Для отримання рівнянь руху конструкції застосовується метод заданих форм. Надзвукова течія газу описується поршневою теорією. Досліджуються області динамічної нестійкості конструкції і форми динамічної втрати стійкості параболических оболонок при появі автоколивань.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: обтічники ракет-носіїв, надзвуковий газовий потік, динамічна втрата стійкості

Dynamic instability of parabolic covers in a supersonic gas stream is investigated. Such designs describe a rockets deflectors. The method of the set forms is applied to receiving the equations of movement of a design. The supersonic current of gas is described by the piston theory. Areas of dynamic instability of a design and form of dynamic loss of stability of parabolic covers are investigated at emergence of self-oscillations.

KEY WORDS: rockets deflectors, supersonic gas stream, dynamic loss of stability

ВВЕДЕНИЕ

Параболические оболочки широко используются в ракетно- и самолетостроении. В процессе эксплуатации они находятся в газовом потоке. Взаимодействие тонкостенной конструкции с газовым потоком может привести к возникновению автоколебаний с большими амплитудами, которые приводят к поломкам. Эти автоколебания возникают при потере динамической устойчивости состояния равновесия оболочкой. Именно такая потеря динамической устойчивости параболической оболочкой является предметом настоящей статьи.

Несмотря на широкое применение в технике элементов конструкций, имеющих форму параболических оболочек, исследованиям их колебаний уделялось мало внимания. В работе [1] приведен обзор ранее опубликованных работ по теории параболических оболочек. Свободные колебания параболических оболочек вращения рассмотрены в работе [2]. Для анализа колебаний таких оболо-

чек используется сдвиговая теория первого порядка. Динамика вращающихся параболических оболочек рассматривается в статье [3], где подробно исследуются области динамической неустойчивости. В работе [4] на основании сдвиговой теории изучается динамика оболочек вращения, в [5] – колебания параболических оболочек. Для анализа параболических оболочек в статье [6] применяется четырехузловой конечный элемент, учитывающий сдвиг.

Рассмотрим результаты анализа аэроупругих колебаний цилиндрических оболочек и пластин в сверхзвуковом газовом потоке. Динамика цилиндрических оболочек в сверхзвуковом газовом потоке обсуждается в монографии [7]. В статье [8] анализируется флаттер панели с учетом ее геометрически нелинейного деформирования. Для исследования динамики оболочки применяется метод продолжения решения по параметру. Хаотическая динамика панели в сверхзвуковом газовом потоке рассматривается в [9]. Для моделирования

колебаний применяются уравнения фон Кармана. В статье [10] исследуется флаттер балки в газовом потоке. Движение изгибных волн в продольном направлении в бесконечно длинной периодически подкрепленной цилиндрической панели под действием сверхзвукового газового потока исследуется в [11]. Анализ колебаний и устойчивости многосекционных панелей с периодической пространственной структурой приведен в [12]. Флаттер орбренных пластинок изучается в статье [13]. Предполагается, что пластинка находится в неоднородном тепловом поле. Динамика упругой панели под действием сверхзвукового газового потока и продольной статической нагрузки исследуется в [14]. Анализу подвергаются периодические и хаотические аттракторы системы.

Теперь рассмотрим результаты анализа аэроупругих колебаний оболочек вращения. Применение поршневой теории к анализу аэроупругих колебаний оболочек вращения рассмотрено в работах [15]. В работах [16–18] проанализированы аэроупругие колебания конических оболочек с использованием поршневой теории. Обзор результатов, посвященных конечноэлементным исследованиям аэроупругих колебаний конструкций, представлен в [19].

Как следует из представленного выше обзора литературы, динамика параболических оболочек практически не изучалась. Учитывая широкое применение таких конструкций в ракетостроении и авиации, а также имея экспериментальное подтверждение автоколебаний элементов ракетносителей в сверхзвуковом газовом потоке, считаем целесообразным теоретические исследования в данном направлении.

В данной статье для получения уравнений движения параболической оболочки применяется метод заданных форм, который использует потенциальную и кинетическую энергию конструкции. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая колебания параболоида в сверхзвуковом газовом потоке. Предложен подход для определения формы оболочки при возникновении автоколебаний. Численно исследуется динамическая неустойчивость параболоидов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИИ

Обтекатели современных ракетносителей часто представляют собой тонкие параболические оболочки, которые защищают полезный груз при выведении его на орбиту. Экспериментальный ана-

лиз обтекателей ракетносителей показал, что в сверхзвуковом газовом потоке наблюдаются их интенсивные автоколебания. Это приводит к колебаниям выводимых на орбиту спутников и, как следствие, к их поломкам уже на этапе вывода спутника на орбиту. Подчеркнем, что большую часть полета ракета движется со сверхзвуковой скоростью. Поэтому поставлена задача моделирования и исследования аэроупругих колебаний обтекателей в сверхзвуковых газовых потоках.

Рассматриваемая параболическая оболочка является тонкой, поэтому сдвиги и инерция вращения не учитываются. Для описания деформирования параболоида воспользуемся гипотезами Киргофа-Лява. Напряжения и деформации предполагаются малыми; они удовлетворяют закону Гука. Деформируемое состояние срединной поверхности параболоида описываем проекциями перемещений на направления касательных к координатным линиям $u(\theta, \varphi, t)$, $\nu(\theta, \varphi, t)$, $w(\theta, \varphi, t)$, где координаты θ и φ определяются по формулам [20]:

$$R_\theta = \frac{R_0}{(1 + \chi \sin^2 \theta)^{3/2}}, R_\varphi = \frac{R_0}{(1 + \chi \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad (1)$$

где R_0 – радиус кривизны в особой точке оболочки $\theta = 0$. Параметр χ указывает на форму оболочки вращения; для параболических оболочек $\chi = -1$.

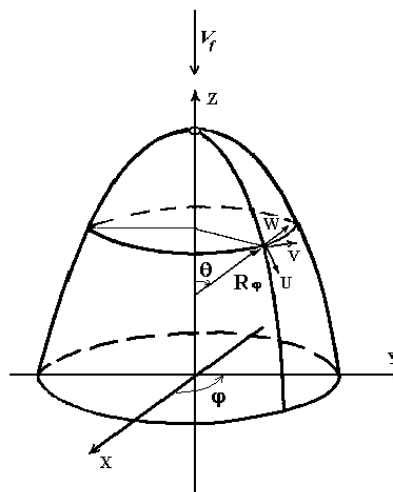


Рис. 1. Эскиз параболоида

Для построения уравнений движения параболической оболочки в сверхзвуковом газовом потоке воспользуемся методом заданных форм [21], который использует уравнения Лагранжа. Кинетическую энергию оболочки T представим следующим

образом:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R_\theta R_\varphi \sin \theta d\theta d\varphi dz, \quad (2)$$

где h – толщина оболочки; ρ – плотность материала оболочки.

Далее запишем это выражение в следующем виде:

$$T = \frac{\rho h R_0^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi. \quad (3)$$

Подчеркнем, что в соотношении (3) интегрирование ведется по площади срединной поверхности оболочки. Потенциальную энергию упругой деформации оболочки представим в виде [21]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{12}\epsilon_{12}) \times \left(1 + \frac{z}{R_\theta} \right) \left(1 + \frac{z}{R_\varphi} \right) R_\theta R_\varphi \sin \theta d\theta d\varphi dz, \quad (4)$$

где $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ – компоненты тензора напряжений; $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{22}$, – компоненты тензора деформаций. Компоненты тензоров напряжений и деформаций удовлетворяют закону Гука. Компоненты тензора деформаций связаны с перемещениями оболочки [20]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= E_1 + zK_1, \\ \epsilon_{22} &= E_2 + zK_2, \\ \epsilon_{12} &= \Omega_1 + 2z\Omega_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) \cos^3 \theta; \\ K_1 &= \frac{1}{R_0^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \cos^6 \theta - \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + 3u \right) \cos^5 \theta \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \theta \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + u \cdot \cos \theta + w \cdot \sin \theta \right) \operatorname{ctg} \theta; \\ K_2 &= \frac{1}{R_0^2} \left[\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \theta \cos \theta - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \operatorname{ctg}^2 \theta + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) \operatorname{ctg} \theta \cos^4 \theta \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{1}{R_0} \left[\frac{\partial \nu}{\partial \theta} \cos^3 \theta - \nu \cdot \cos^2 \theta \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. + w \cdot \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \theta \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \frac{1}{R_0^2} \left[\frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta} - \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial \nu}{\partial \theta} + \nu \right) \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} \right]. \end{aligned}$$

Окончательно потенциальную энергию оболочки (4) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[(E_1 + E_2)^2 - 2(1-\nu) \times \right. \\ &\quad \left. \times (E_1 E_2 - \frac{1}{4} \Omega_1^2) \right] R_0^2 \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\{ (K_1 + K_2)^2 - 2(1-\nu)(K_1 K_2 - \Omega_2^2) \} \times \right. \\ &\quad \left. \times R_0^2 \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} + 2\{ (E_1 K_1 + E_2 K_2) + \nu(E_1 K_2 + E_2 K_1) + \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu)\Omega_1^2 \Omega_2^2 \} R_0 \frac{\sin \theta (1 + \cos^2 \theta)}{\cos^3 \theta} \right] d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Вершина оболочки является особой точкой, так как в знаменателе соотношений (6) есть $\sin \theta$. Тогда при условии $\theta \rightarrow 0$ вся дробь стремится к бесконечности. Поэтому в модели конструкции в области этой точки вырежем отверстие диаметром меньше, чем толщина оболочки. Наличие этого отверстия практически не влияет на динамику конструкции [9]. Принимаем, что на стороне этого маленького выреза (на координатной линии $\theta = \theta_1$) будут выполняться граничные условия свободного опирания, а в основании параболоида на координатной линии $\theta = \theta_2$ оболочка закреплена:

$$u|_{\theta=\theta_2} = \nu|_{\theta=\theta_2} = w|_{\theta=\theta_2} = \frac{\partial w}{\partial \theta}|_{\theta=\theta_2} = 0.$$

Так как для исследования колебаний применяется метод заданных форм [21], то на свободной стороне оболочки можно не удовлетворять никаким граничным условиям.

Виртуальную работу аэродинамического давления δA , действующего на параболическую оболочку, представим так:

$$\delta A = R_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \delta w \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi, \quad (8)$$

где p – давление сверхзвукового потока на конструкцию; δw – виртуальное перемещение оболочки.

Для описания давления в сверхзвуковом потоке газа применяется улучшенная поршневая теория [22]:

$$p = -\xi_1 \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \xi_2 \frac{\partial w}{\partial t} - \xi_3 w \right), \quad (9)$$

где

$$\xi_1 = \frac{\rho_f V_f^2}{\beta}; \quad \xi_2 = \frac{M^2 - 2}{V_f \beta^2}; \quad \xi_3 = \frac{1}{2r\beta},$$

$\beta = \sqrt{M^2 - 1}$; $r = R_0 \operatorname{tg}(\theta)$; V_f – скорость потока газа; M – число Маха; r – переменный радиус сечения оболочки. Слагаемое $\xi_3 w$ в соотношении (9) называют поправкой Крумхара. Подчеркнем, что поправка Крумхара зависит от координаты θ оболочки. Выражение для виртуальной работы (8) примет вид:

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{V_f R_0 \rho_f} \delta A = - \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left(R_0 V_f \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{R_0 (M^2 - 2)}{M^2 - 1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} - \frac{V_f}{2\sqrt{M^2 - 1}} \frac{w}{\cos^3 \theta} \right] d\theta d\varphi. \quad (10)$$

Функции $u(\theta, \varphi, t)$, $\nu(\theta, \varphi, t)$, $w(\theta, \varphi, t)$ разложим в ряд по формам собственных колебаний:

$$u(\theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{N_u} q_n^{(u)}(t) U_n(\theta, \varphi); \\ \nu(\theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{N_\nu} q_n^{(\nu)}(t) V_n(\theta, \varphi); \quad (11) \\ w(\theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{N_w} q_n^{(w)}(t) W_n(\theta, \varphi),$$

где $q^{(u)} = [q_1^{(u)}, \dots, q_{N_u}^{(u)}]$; $q^{(\nu)} = [q_1^{(\nu)}, \dots, q_{N_\nu}^{(\nu)}]$; $q^{(w)} = [q_1^{(w)}, \dots, q_{N_w}^{(w)}]$ – вектора обобщенных координат; $U_n(\theta, \varphi)$, $V_n(\theta, \varphi)$, $W_n(\theta, \varphi)$ – собственные формы свободных линейных колебаний. Для расчета

собственных форм свободных линейных колебаний применялся метод Рэлея-Ритца. Собственные формы свободных колебаний параболической оболочки представим в следующем виде:

$$U_n(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} A_{ij}^{(n)} \psi_i^{(u)}(\theta) \cos j\varphi,$$

$$V_n(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij}^{(n)} \psi_i^{(v)}(\theta) \sin j\varphi,$$

$$W_n(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} C_{ij}^{(n)} \psi_i^{(w)}(\theta) \cos j\varphi, \quad (12)$$

где $A_{ij}^{(n)}$, $B_{ij}^{(n)}$, $C_{ij}^{(n)}$ – подлежащие определению коэффициенты. Они находятся из проблемы собственных значений, которая выводится из метода Рэлея-Ритца. Функции $\psi_i^{(u)}(\theta)$, $\psi_i^{(v)}(\theta)$ являются собственными модами продольных колебаний консольного стержня, а функции $\psi_i^{(w)}(\theta)$ описывают собственные моды его поперечных колебаний.

Для упрощения дальнейшего изложения, все обобщенные координаты сгруппируем в один вектор $q = [q^{(u)}, q^{(\nu)}, q^{(w)}] = [q_1, \dots, q_{N_G}]$, где $N_G = N_u + N_\nu + N_w$. Теперь составим выражения для обобщенных сил Q_n , где $n = 1, \dots, N_G$. Обобщенные силы $Q^{(u)}$, $Q^{(\nu)}$, соответствующие обобщенным координатам $q^{(u)}$, $q^{(\nu)}$, равны нулю. Тогда элементы вектора обобщенных сил $Q^{(w)}$ представим так:

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{R_0 V_f^2 \rho_f} Q_n^{(w)} = - \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\left(R_0 \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R_0 (M^2 - 2)}{V_f \sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} - \frac{w}{2 \cos^3 \theta} \right) W_n(\theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad (13)$$

где $n = 1, \dots, N_w$. Разложения (11) введем в (13). Тогда вектор обобщенных сил $Q^{(w)}$ запишем в следующем векторном виде:

$$Q^{(w)} = K^{(w)} q^{(w)} + C^{(w)} \dot{q}^{(w)}, \quad (14)$$

где $C^{(w)}$ – матрица аэродинамического демпфирования; $K^{(w)}$ – матрица аэродинамической жесткости.

Теперь разложения (11) введем в выражение для кинетической и потенциальной энергии (3), (9) и проинтегрируем. Тогда кинетическая энергия будет иметь вид квадратичной формы обобщенных скоростей, а потенциальная энергия – квадратичной формы относительно обобщенных координат. Эти квадратичные формы, в общем случае,

можно представить так: $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_{N_G}), T = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N_G})$. Тогда уравнения Лагранжа, описывающие движение оболочки, примут следующий матричный вид:

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{q}^{(u)} \\ \ddot{q}^{(\nu)} \\ \ddot{q}^{(w)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^{(u)} \\ q^{(\nu)} \\ q^{(w)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K^{(w)}q^{(w)} + C^{(w)}\dot{q}^{(w)} \end{bmatrix} = 0, \quad (15)$$

где $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_{N_G})$. Из теории оболочек известно [21], что собственные частоты, в формах которых преобладают продольные и крутильные колебания, значительно выше собственных частот, в формах которых преобладают изгибные колебания. Поэтому в уравнении (15) примем $\ddot{q}^{(u)} = \ddot{q}^{(\nu)} = 0$. Тогда из первых двух уравнений системы (15) получим следующие матричные соотношения:

$$q^{(u)} = [K_{u,w}]q^{(w)}; q^{(\nu)} = [K_{\nu,w}]q^{(w)}. \quad (16)$$

Соотношения (16) введем в (15) и получим уравнения, описывающие линейные колебания оболочки относительно обобщенных координат поперечных перемещений:

$$[M_1]\ddot{q}^{(w)} + [K_*]q^{(w)} + C^{(w)}\dot{q}^{(w)} = 0, \quad (17)$$

где

$$[K_*] = [K_{31}][K_{u,w}] + [K_{32}][K_{\nu,w}] + [K_{33}][K^{(w)}].$$

Диагональная матрица $[M_1]$ получена из диагональной матрицы $[M]$. Итак, выведена система дифференциальных уравнений (17), описывающая динамическую устойчивость пологой оболочки в газовом течении.

2. ФОРМА ПОТЕРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧКИ

Вследствие взаимодействия сверхзвукового газового потока с параболической оболочкой наблюдается обмен энергией между конструкцией и газовым потоком. В результате этого энергообмена имеет место динамическая неустойчивость конструкции. Возникновение динамической неустойчивости соответствует потере устойчивости тривиального состояния равновесия динамической системы (17). При потере устойчивости наблюдается бифуркация Хопфа. Подчеркнем, что, используя модель (17), можно исследовать форму оболочки,

которая наблюдается при зарождении автоколебаний. Подход к расчету этой формы будет представлен в этом разделе. Динамическую систему (18) перепишем относительно фазовых координат $y = (q_1^{(w)}, \dots, q_{N_w}^{(w)}, \dot{q}_1^{(w)}, \dots, \dot{q}_{N_w}^{(w)})$ в векторном виде:

$$\dot{y} = Gy. \quad (18)$$

Решение системы (18) представим в следующем виде: $y = A_i \exp(\lambda_i t)$. Параметры λ_i называются характеристическими показателями (21). Они определяются из проблемы собственных значений. Динамическая устойчивость тривиального состояния равновесия находится по величинам λ_i .

Рассмотрим случай, когда все характеристические показатели комплексно-сопряженные:

$$\lambda_{2j-1} = \alpha_j + i\Omega_j; \lambda_{2j} = \alpha_j - i\Omega_j; j = 1, \dots, N_w, \quad (19)$$

где i – мнимая единица. Собственные вектора, отвечающие этим собственным значениям, представим так:

$$A_{2j-1} = \gamma_j + i\delta_j; A_{2j} = \gamma_j - i\delta_j; j = 1, \dots, N_w. \quad (20)$$

В области устойчивости тривиального состояния равновесия выполняется следующее неравенство: $\alpha < 0; j = 1, \dots, N_w$. В точке потери устойчивости (бифуркация Хопфа) $\alpha_1 > 0$. Рассмотрим решение динамической системы (17) при бифуркации Хопфа. Его представим в следующем виде:

$$y = \sum_{j=1}^{N_w} \left[C_j(\gamma_j + i\delta_j) \exp[(\alpha_j + i\Omega_j)t] + D_j(\gamma_j - i\delta_j) \exp[(\alpha_j - i\Omega_j)t] \right], \quad (21)$$

где C_j, D_j – константы интегрирования. Так как все действительные части собственных значений, кроме одного, отрицательные, то с течением времени составляющие решения (21) с отрицательными действительными частями собственных значений стремятся к нулю и в решении (21) остается только часть, которая имеет нулевую действительную часть характеристического показателя. Такое решение имеет вид:

$$y = (C_*\gamma_1 + D_*\delta_1) \cos(\Omega_1 t) + (D_*\gamma_1 - C_*\delta_1) \sin(\Omega_1 t), \quad (22)$$

где C_*, D_* – константы интегрирования, определяемые из начальных условий. В дальнейшем рассмотрим частный вид движений, который характеризуется следующими значениями констант

интегрирования: $C_* = D_* = 1$. Элементы векторов γ_1 и δ_1 будут: $\gamma_1 = (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_1^{(2N_w)})$; $\delta_1 = (\delta_1^{(1)}, \dots, \delta_1^{(2N_w)})$. Тогда обобщенные координаты системы [17] принимают вид:

$$q_j^{(w)} = \sqrt{2(\gamma_1^{(j)2} + \delta_1^{(j)2})} \sin(\Omega_1 t + \varphi_j), \quad (23)$$

где $\text{tg } \varphi_j = \frac{\gamma_1^{(j)} + \delta_1^{(j)}}{\gamma_1^{(j)} - \delta_1^{(j)}}$.

Уравнение (23) введем в соотношения (11). В результате получим выражение для поперечных колебаний параболической оболочки:

$$w(\theta, \varphi, t) = \sum_{j=1}^{N_w} \sqrt{2(\gamma_1^{(j)2} + \delta_1^{(j)2})} W_j(\theta, \varphi) \sin(\Omega_1 t + \varphi_j). \quad (24)$$

Пространственная форма потери устойчивости в точке бифуркации Хопфа имеет вид, представленный в [24]. Она будет численно исследоваться в следующем разделе статьи.

Подчеркнем, что частота начала автоколебаний Ω_1 . Она является комплексной частью характеристического показателя, действительная часть которого проходит через нуль. Итак, частоту начала автоколебаний можно предсказать из линейного анализа конструкции.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Для исследования динамической устойчивости оболочек их перемещения раскладываются по формам колебаний (11). Поэтому первой задачей является анализ свободных колебаний параболической оболочки. Формы колебаний исследуются методом Рэлея-Ритца. Потом эти результаты анализа используются в анализе динамической устойчивости обтекателей.

Численно были проанализированы аэроупругие колебания оболочек с разными высотами $H_1 = 2$ м, $H_2 = 3$ м, $H_3 = 4$ м и одинаковым радиусом основания $r = 2$ м. Толщины оболочек h принималась одинаковыми, равными 5 мм. Все расчеты проводились для материала с механическими характеристиками: $E = 71$ ГПа, $\rho = 2640$ кг/м³, $\nu = 0.3$. Плотность газового потока принималась $\rho_f = 1.0$ кг/м³.

Для оболочек с высотами H_1, H_2, H_3 исследовалось значение числа Маха M , при котором наблюдалась потеря динамической устойчивости конструкции. Такое число Маха называется критическим; оно обозначается M_* . Отметим, что для значений чисел Маха $M < 1$ теория, которая описыва-

ется соотношением (9), неприменима. Поэтому динамическую неустойчивость параболоидов будем исследовать при $M > 1$.

Таблица 1. Значения критических чисел Маха M_* при разном значении числа степеней свободы N_w в модели конструкции

N_w	$H_1 = 2\text{м}$	$H_2 = 3\text{м}$	$H_3 = 4\text{м}$
6	1.380	1.384	1.378
8	1.41421	1.41421	1.41421
10	1,4142	1,4142	1,4142
12	1,4142	1,4142	1,4142

Расчеты проводились в следующем диапазоне M : $1.01 \leq M \leq 1.4142$. Критические значения чисел Маха исследовались при разном числе слагаемых в разложении (11). Целью нашего анализа было исследовать сходимость критических значений чисел Маха при увеличении числа степеней свободы, описывающих конструкцию. Результаты расчетов критических чисел Маха для параболоидов с высотами H_1, H_2, H_3 представлены в таблице 1.

Результаты расчетов показаны для систем с 6, 8, 10, 12 степенями свободы. Как следует из таблицы, критические значения чисел Маха для систем с 8, 10 и 12 степенями свободы близки. Это свидетельствует о сходимости результатов.

Характерно, что критическое значение числа Маха не изменяется при увеличении высоты оболочки с 2 до 4 м. Это объясняется тем, что интенсивный колебательный процесс протекает в нижней части оболочки. Работа сил давления на формах свободных колебаний для трех оболочек существенно не отличается. Исследовалось влияние на значения критических чисел Маха поправки Крумхара, которая входит в соотношение (9). Сравнение результатов, полученных с поправкой Крумхара и без нее показало, что численные значения критических чисел Маха практически не меняются.

Таблица 2. Частоты автоколебаний оболочек с высотами H_1, H_2, H_3

H	H_1	H_2	H_3
Ω_1, Hz	529.55	576.50	619.45

Исследуем частоты начала автоколебаний оболочки. Подход к их определению представлен в разделе 2. Результаты расчетов частот автоколебаний для оболочек с разными высотами представлены в таблице 2. Заметим, что частоты автоколебаний значительно выше нижних собственных частот оболочек. Отметим, что при увеличении высот оболочек частоты автоколебаний растут. Подчеркнем, что собственные частоты пада-

ют с увеличением высоты параболоида.

Далее исследуем форму оболочки при начале автоколебаний. Подход для такого анализа предложен в разделе 2. Форма оболочки при возникновении автоколебаний имеет вид (24). Рассмотрена форма в момент времени $t = \frac{0.5\pi}{\Omega_1} - \varphi_1$. Формы автоколебаний оболочек с высотами H_1, H_2, H_3 представлены на рис. 2–4 соответственно. Как видно из этих рисунков, интенсивные автоколебания наблюдаются в нижних частях оболочек.

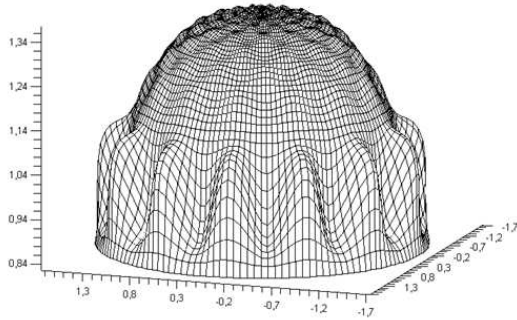


Рис. 2. Форма движения оболочки с радиусом основания $r=2$ м и высотой $H_1=2$ м

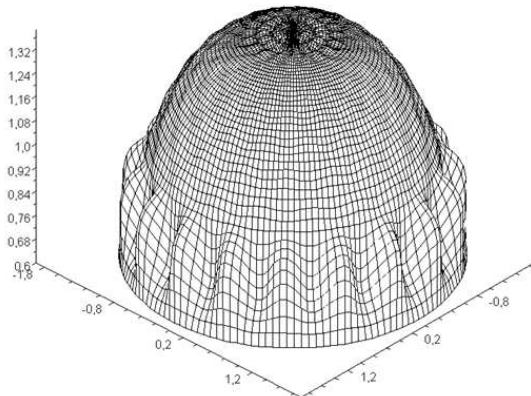


Рис. 3. Форма движения оболочки с радиусом основания $r=2$ м и высотой $H_2=3$ м

ВЫВОДЫ

Для получения уравнений колебаний параболоидов в сверхзвуковом газовом потоке применяется метод заданных форм. Колебания оболочки в

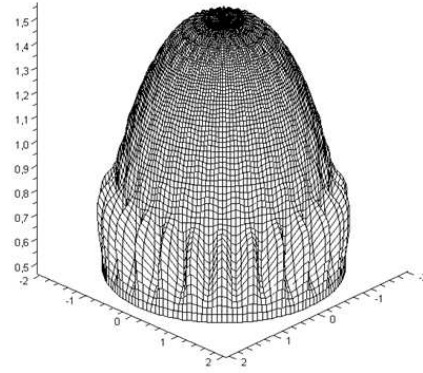


Рис. 4. Форма движения оболочки с радиусом основания $r=2$ м и высотой $H_3=4$ м

сверхзвуковом газовом потоке раскладываются по собственным формам колебаний, которые определяются методом Рэлея–Ритца. Для описания сверхзвукового газового течения применяется поршневая теория. Предложен подход для определения формы автоколебаний параболоида, основанный на анализе линейной модели его колебаний в сверхзвуковом газовом потоке.

Неустойчивое состояние равновесия параболической оболочки в сверхзвуковом газовом потоке наблюдается для следующих значений чисел Маха: $1,01 \leq M \leq 1.4142$.

В области заделки параболоида наблюдается волнообразование поперечных автоколебаний в окружном направлении с большим числом узлов, а вверху параболоида узлов колебаний в окружном направлении нет. Интенсивность колебаний вершины параболоида значительно меньше, чем интенсивность колебаний ее нижней части.

Критическое значения числа Маха не изменяется при увеличении высоты оболочки с 2 до 4 м. Это объясняется тем, что интенсивный колебательный процесс протекает в нижней части оболочки.

Заметим, что частоты автоколебаний значительно выше нижних собственных частот оболочек. При увеличении высот оболочек частоты автоколебаний растут. Подчеркнем, что собственные частоты падают с увеличением высоты параболоида.

Авторы статьи благодарят проф. О.К. Морачковского за полезные обсуждения материала статьи. Работа выполнена при поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2012-2016 гг. в рамках договора № П-67-14 "Расчетная оценка вибраций элементов аэрокосмических систем при силовых и аэродинамических нагрузках".

1. *Leissa A. W.* Vibrations of shells.– Washington: U.S. Government Printing Office, 1973.– 458 p.
2. *Dahlberg C., Faleskog J.* Strain gradient plasticity analysis of the influence of grain size and distribution on the yield strength in polycrystals // *Europ. J. Mech. A.Solids.*– 2010.– № 44.– P. 1–16.
3. *Gulyaev V. I., Solovjev I. L., Belova M. A.* Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies // *Int. J. Solids and Struct.*– 2011.– № 41.– P. 356–358.
4. *Tornabene F., Viola E.* Free vibrations of four-parameter functionally graded parabolic panels and shells of revolution // *Europ. J. Mech And Solids.*– 2009.– № 28.– P. 991–1013.
5. *Viola E., Tornabene F.* Free vibrations of three parameters functionally graded parabolic panels of revolution // *Mech. Res. Comm.*– 2009.– № 36.– P. 587–594.
6. *Chun K. S., Kassegne S. K., Wondimu B. K.* Hybrid/mixed assumed stress element for anisotropic laminated elliptical and parabolic shells // *Fin. Elem. Anal. Des.*– 2009.– № 41.– P. 766–781.
7. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи упругой устойчивости.– М.: Физматгиз, 1961.– 307 с.
8. *Gee D. J.* Numerical continuation applied to panel flutter // *Nonlinear Dynamics.*– 2000.– № 22.– P. 271–280.
9. *Pourtakdoust S. H., Fazelzadeh S. A.* Chaotic analysis of nonlinear viscoelastic panel flutter // *Nonlinear Dynamics.*– 2003.– № 32.– P. 387–400.
10. *Tizzi S.* Influence of non-linear forces on beam behaviour in flutter conditions // *J. of Sound and Vibration.*– 2003.– № 267.– P. 279–299.
11. *Pany C.* Flutter analysis of periodically supported curved panels // *J. of Sound and Vibration.*– 2003.– № 267.– P. 267–278.
12. *Mukherjee S., Parthan S.* Wave propagation in one-dimensional multi-bay periodically supported panels under supersonic fluid flow // *J. of Sound and Vibration.*– 1995.– № 186.– P. 71–86.
13. *Lee I., Lee D. M., Oh I. K.* Wave propagation in one-dimensional multi-bay periodically supported panels under supersonic fluid flow // *J. of Sound and Vibration.*– 1995.– № 186.– P. 71–86.
14. *Bolotin V. V., Grishko A. A., Kounadis A. N., Gantes C., Roberts J. B.* Influence of initial conditions on the postcritical behaviour of a nonlinear aeroelastic system // *Nonlinear Dynamics.*– 1998.– № 15.– P. 63–81.
15. *Бочкарев С. А., Матвеев В. П.* Панельный флаттер вращающихся круговых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком // *Вычислительная механика сплошных сред. Т. 1.*– 2008.– № 3.– С. 25–33.
16. *Миниус Г. М.* Расчет флаттера реактивного сопла с продольными сквозными канавками // *Численные методы в механике деформируемого твердого тела.*– 1987.– № 2.– С. 15–22.
17. *Диткин В. В., Орлов Б. А., Пшеничнов Г. И.* Численное исследование флаттера конических оболочек // *Механика твердого тела.*– 1987.– № 1.– С. 185–189.
18. *Ueda T.* Supersonic flutter truncated conical shells // *Trans. Japan Soc. Aerospace Sci.*– 1977.– V.20.– P. 13–30.
19. *Bismarck – Nasr M. N.* Finite elements in aeroelasticity of plates and shells // *TAppl. Mech. Rev.*– 1996.– №. 49 (10).– P. 17–24.
20. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. 2-е изд.– Л.: Судостроение, 1962.– 432 с.
21. *Аврамов К. В., Михлин Ю. В.* Нелинейная динамика упругих систем.– М.–Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2010.– 704 с.
22. *Krumharr H.* The accuracy of linear piston theory when applied to cylindrical shells // *AIAA J.*– 1963.– V.1.– P. 1448–1449.