

УДК 532.465

## НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ВТОРОЙ МОДЫ В СЛОЕ РАЗДЕЛА

Е. В. ТЕРЛЕЦКАЯ\*, В. С. МАДЕРИЧ\*, И. А. БРОВЧЕНКО\*, Т. Г. ТАЛИПОВА\*\*

\* *Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев*\*\* *Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород**kterletska@gmail.com**Получено 22.08 2013*

По результатам численных экспериментов проведен анализ структуры внутренних волн второй моды для широкого диапазона амплитуд волн и стратификации. Показано, что наиболее важными характеристиками, влияющими на динамику волн, являются: локальное число Фруда  $Fr_m$ , вычисляемое как отношение максимальной локальной скорости к фазовой скорости волн; минимальное число Ричардсона  $Ri_{min}$ ; эффективное число Рейнольдса  $Re_{eff}$ , определяемое как отношение произведения фазовой скорости волн и амплитуды волны  $a$  к кинематической вязкости. В зависимости от значений параметров  $Fr_m$  и  $Ri_{min}$  выделены три основных класса симметричных волн второй моды, распространяющихся в слое раздела толщиной  $h$  между двумя глубокими однородными слоями воды: (а) слабонелинейные волны при  $Fr_m < 1$ ; (б) устойчивые сильно нелинейные волны, переносящие массу, при  $Ri_{min} > 0.15$  и  $Fr_m \approx 1.2$ ; (в) неустойчивые сильно нелинейные волны при  $Ri_{min} \leq 0.1$ . Обнаружена неполная автомодельность динамики волн по числу Рейнольдса при больших  $Re_{eff}$ . Затухание волн со временем происходит таким образом, что число Ричардсона растет по автомодельной зависимости  $Ri_{min} \sim (a/h)^{-1.25} Re_{eff}^{-1.25}$ .

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** численное моделирование, внутренние волны второй моды, неполная автомодельность

За результатами чисельних експериментів проведено аналіз структури внутрішніх хвиль другої моди для широкого діапазону амплітуд хвиль і стратифікації. Показано, що найбільш важливими характеристиками, що впливають на динаміку хвиль, є: локальне число Фруда  $Fr_m$ , що обчислюється як відношення максимальної локальної швидкості до фазової швидкості хвиль; мінімальне число Річардсона  $Ri_{min}$ ; ефективне число Рейнольдса  $Re_{eff}$ , яке визначається як відношення добутку фазової швидкості хвиль і амплітуди хвилі  $a$  до кінематичної в'язкості. Залежно від значень параметрів  $Fr_m$  і  $Ri_{min}$  виділені три основні класи симетричних хвиль другої моди, що поширюються в шарі розділу товщиною  $h$  між двома глибокими однорідними шарами води: (а) слабонелінійні хвилі при  $Fr_m < 1$ ; (б) стійкі сильно нелінійні хвилі, які переносять масу, при  $Ri_{min} > 0.15$  і  $Fr_m \approx 1.2$ ; (в) нестійкі сильно нелінійні хвилі при  $Ri_{min} \leq 0.1$ . Виявлена неповна автомодельність динаміки хвиль по числу Рейнольдса при великих  $Re_{eff}$ . Загасання хвиль з часом відбувається таким чином, що число Річардсона зростає по автомодельній залежності  $Ri_{min} \sim (a/h)^{-1.25} Re_{eff}^{-1.25}$ .

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** чисельне моделювання, внутрішні хвилі другої моди, неповна автомодельність

According to the results of numerical experiments the analysis of the internal structure of the second mode wave for a wide wave amplitude and stratification range. It is shown that the most important characteristics that govern the dynamics of waves are local Froude number  $Fr_m$ , calculated as the ratio of the maximum local rate to the phase velocity of the waves, minimum Richardson number  $Ri_{min}$  and the effective number Reynolds  $Re_{eff}$ , defined as the ratio of the product of the phase velocity of the waves and the wave amplitude  $a$  to kinematic viscosity. Depending on the parameter values  $Fr_m$  and  $Ri_{min}$  three main classes of symmetric waves of the second mode propagating in the interface layer of thickness  $h$  between two homogeneous layers in deep water are identified: (a) the weakly nonlinear waves at  $Fr_m < 1$ , (b) stable strongly nonlinear waves that carry mass at  $Ri_{min} > 0.15$  and  $Fr_m \approx 1.2$ , and (c) unstable strongly nonlinear waves at  $Ri_{min} \leq 0.1$ . It was revealed incomplete self-similarity of waves at high Reynolds number  $Re_{eff}$ . Wave damping occurs over time, so that the Richardson number is growing by self-similar dependence  $Ri_{min} \sim (a/h)^{-1.25} Re_{eff}^{-1.25}$ .

**KEY WORDS:** numerical modelling, internal waves of the second mode, incomplete similarity

### ВВЕДЕНИЕ

Внутренние волны (ВВ) представляют собой важный компонент динамики океана и стратифицированных озер. Достигая в океане амплитуд в сотни метров, эти волны играют существенную роль в переносе энергии [1–3], приводя к турбулентному перемешиванию [4] и переносу взвеси в придонном слое океана и озер. Волны большой амплитуды могут воздействовать на подводные аппараты и подводные инженерные сооружения, а

также на распространение звука в океане [2].

Большая часть энергии ВВ сосредоточена в волнах первой бароклинной моды, которые распространяются как волны–понижения, когда толщина верхнего слоя много меньше глубины океана, и как волны–повышения – в противоположном случае. Результаты теоретических и экспериментальных исследований уединенных волн первой моды в океане обобщены в [1–5]. Волны большой амплитуды подвержены сдвиговой и конвективной неустойчивости [6], механизмы которой исследовались в [6–11].

Волны второй бароклинной моды, представляющие собой, в зависимости от стратификации, симметричные возмущения любого знака полярности, изучены в меньшей степени. Однако наблюдения в океане [12–16] и пограничном слое атмосферы (явление “Morning Glory”) [17] продемонстрировали важность этого типа волн в переносе энергии в океане и атмосфере. Выделяются несколько основных механизмов генерации волн второй моды [13]: (а) взаимодействие волн первой моды с порогами; (б) взаимодействие волн первой моды с шельфом; (в) генерация внутренних волн второй моды интрузионными потоками в слое раздела; (г) отражение волн первой моды; (д) генерация волн потоком в главном термоклине при обтекании углубления дна.

Слабонелинейная теория уединенных внутренних волн второй моды на глубокой воде была развита в работах [18–20]. Решения уравнения Дюбрейль-Жакотен [21] позволяют описать уединенные волны большой амплитуды [19]. Особенность этого решения заключается в возможности существования замкнутых линий тока в движущейся системе координат и переносе массы такими волнами. Это явление обнаружено в лабораторных экспериментах [19] и в дальнейшем исследовано экспериментально [22–27], теоретически [28–30] и численно [26, 31–34]. Предельный случай распространения симметричного возмущения постоянной промежуточной плотности в двухслойной среде рассматривался в [28]. В движущейся системе координат жидкость в таком возмущении оставалась в покое. Результаты экспериментов и расчетов, однако, продемонстрировали ряд существенных особенностей динамики внутренних волн второй моды, требующих дальнейшего исследования:

1) слабонелинейная теория непригодна для описания сильно-нелинейных волн. Тогда как предсказываемая теорией [18–20] длина волны уменьшается с увеличением амплитуды, эксперименты показали, что для волн большой амплитуды длина волн растет с амплитудой;

2) даже небольшая асимметрия длинных волн второй моды, распространяющихся в слое раздела, приводит к возникновению коротких волн первой моды [27–34], в энергию которых переходит энергия волн второй моды [35];

3) построенные в рамках теории идеальной жидкости теоретические стационарные решения для волн большой амплитуды с замкнутыми линиями тока в движущейся системе координат оказались неустойчивы [28, 32]. В то же время, наблюдаемые в экспериментах волны большой амплитуды,

переносящие массу, могут быть устойчивыми и медленно эволюционирующими образованиями.

4) внутренняя структура потоков внутри областей с замкнутыми линиями тока может быть различной: от их отсутствия в системе координат, движущейся с волной (“солидон” [28]), до формирования вихревой пары [32]. Лабораторные эксперименты и численные расчеты продемонстрировали сложную, меняющуюся со временем, многовихревую структуру этих потоков [22–26, 31–33].

Следует предположить, что на устойчивость волн большой амплитуды и особенности внутренней структуры этих волн оказывает существенное воздействие относительно малая вязкость. В настоящей работе численно исследуется динамика симметричных внутренних волн второй моды в относительно тонком слое раздела и структура областей захваченной жидкости в них в зависимости от амплитуды волн и толщины слоя раздела.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Расчеты проводились в рамках уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска для стратифицированной по солености воды:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{g_i \Delta \rho}{\rho_0}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U_j \frac{\partial S}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2}, \quad (3)$$

где  $x_i = (x, y, z)$  – декартовы координаты, ось  $z$  направлена вертикально вверх;  $U_i = (U, V, W)$  – составляющие поля скорости;  $P$  – давление;  $\rho$  – плотность воды;  $\rho_0$  – невозмущенное значение плотности воды;  $S$  – соленость;  $g_i = (0, 0, g)$  – ускорение свободного падения;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\chi$  – коэффициент молекулярной диффузии. Система уравнений дополнялась уравнением состояния.

Система уравнений модели (1)–(3) дискретизировалась с использованием метода конечных разностей на смещенной сетке. Решение задачи разделялось на две этапы: (а) – решение двумерной системы уравнений для возвышений уровня и осредненных по глубине скоростей и (б) – решение трехмерной задачи для скорости и давления. Поле скорости и давления в трехмерной подзадаче решалось на гидростатическую и негидростатическую составляющие. Алгоритм решения вклю-



в уравнениях не содержатся безразмерные параметры подобия и решения уравнений автомодельны [36]. Однако в общем случае можно ожидать, что зависимость от безразмерных параметров сохранится при  $Re \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow \infty$  и автомодельность по ним будет неполной [36].

Для характеристики рассматриваемых движений конечной амплитуды определяющие масштабы задачи должны быть дополнены максимальной локальной скоростью  $U_m$  и амплитудой волн  $a$ . Тогда можно определить два безразмерных параметра, характеризующих динамику волн конечной амплитуды: число Фруда и эффективное число Рейнольдса. Число Фруда  $Fr_m$  определяется как отношение максимальной локальной скорости  $U_m$  к фазовой скорости волн  $U_c$ :

$$Fr_m = \frac{U_m}{U_c}. \quad (9)$$

Эффективное число Рейнольдса  $Re_{eff}$  определяется как

$$Re_{eff} = \frac{U_m a}{\nu}. \quad (10)$$

Важным параметром, характеризующим устойчивость волн, является число Ричардсона:

$$Ri = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} / \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2. \quad (11)$$

Расчеты проводились в лотке длиной  $L = 3.5$  м и высотой  $2H = 0.92$  м. Соленость в верхнем и нижнем слоях была  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 30$  соответственно, при постоянной температуре  $T = 20^\circ$  С. Тогда  $\rho_0 = (\rho_2 + \rho_1)/2 = 1009.5$  кг/м<sup>3</sup> и  $\Delta\rho/\rho_0 = 0.022$ , молекулярная вязкость  $\nu = 1.14 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>с<sup>-1</sup> и молекулярная диффузия соли  $\chi = 10^{-9}$  м<sup>2</sup>с<sup>-1</sup>. Было проведено три серии расчетов при толщине пикноклина  $h = 0.5; 1; 2$  см. Параметры этих серий приведены в табл. 1. Изменяя размеры перемешанного объема в каждой серии расчетов, были получены наборы волн различных амплитуд  $a$ , характеризующихся безразмерной скоростью  $U_c/C$ , числами Фруда  $Fr_m$ , Рейнольдса  $Re_{eff}$  и минимальным значением числа Ричардсона  $Ri_{min}$ .

Табл. 1. Параметры расчетов

$h$ (см)	$Re$	$\varepsilon$
0.5	75	92
1	200	46
2	575	23

Задача решалась в квазидвумерной постановке, когда уравнения дискретизировались в нескольких узлах поперек бассейна при условии скольжения на боковых стенках бассейна. На свободной поверхности касательные напряжения отсутствуют, а на дне используются условия прилипания. Предварительные расчеты с различным разрешением сетки, проведенные для различных  $h$  и амплитуд волн, показали, что различие между результатами расчетов практически отсутствует при  $\varepsilon > 10$ . Это свидетельствует о полной автомодельности задачи по параметру  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Кроме того, результаты расчетов для выбранных параметров вычислительного лотка и генерируемых волн для всего лотка (рис. 1, а) и для верхней половины области (рис. 1, б) также практически совпадают, т.е. влияние дна и свободной поверхности мало. Поэтому приведенные ниже результаты получены для симметричной постановки задачи, что исключает возможность появления первой моды, представляющей собой помеху в виде осциллирующего хвоста, наблюдаемого в лабораторных экспериментах (напр. [24,26]). Разрешение сетки по длине, высоте и ширине составляло  $3000 \times 600 \times 5$  узлов или  $0.12 \times 0.08 \times 0.12$  см.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 2 представлено сравнение рассчитанных фазовых скоростей и длин волн в зависимости от амплитуды волн для сечения  $x/h=150$  с данными экспериментов и теоретическими соотношениями. Согласно слабо-нелинейной теории [18] для стратификации, описываемой функцией (4), зависимости для фазовой скорости и длины волн имеют вид:

$$\frac{U_c}{C} = \sqrt{1 + \frac{3a}{5h}}, \quad (12)$$

$$\frac{\lambda}{h} = \frac{5h}{2a}, \quad (13)$$

где  $a$  – амплитуда волны;  $\lambda$  – половина длины волны (см. рис. 1). Профиль уединенных волн описывается алгебраическим решением [18]:

$$\phi = \frac{a\lambda^2}{\hat{x}^2 + \lambda^2}, \quad (14)$$

где  $\phi$  – линия тока в движущейся системе координат  $\hat{x} = x - Ct$ .

Согласно (12)–(13) фазовая скорость растет с ростом амплитуды волн, тогда как длина волны падает. Как следует из рис. 2, результаты моделирования и эксперименты хорошо описываются

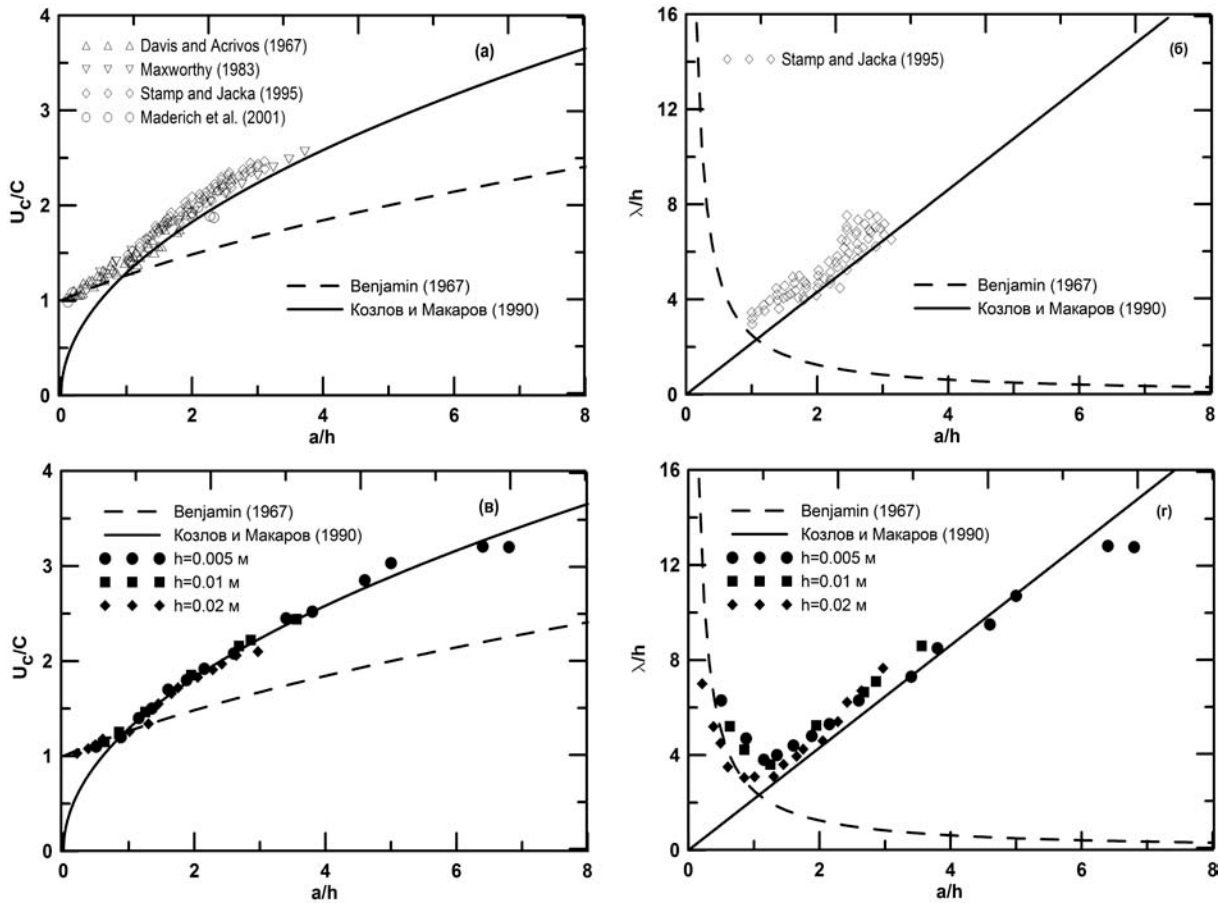


Рис. 2. Зависимость фазовой скорости от амплитуды: сравнение аналитических решений с результатами лабораторных экспериментов (а) с результатами численных расчетов (в). Зависимость длины волны от амплитуды: (б) – сравнение аналитических решений с результатами лабораторных экспериментов, (г) – с результатами численных расчетов

слабо-нелинейной теорией при  $a/h < 1$ . Профиль уединенной волны (14) также хорошо согласуется с численным решением уравнения Навье-Стокса. Однако, как следует из рис. 2, для  $a/h > 1$  длина волны растет с увеличением амплитуды, а фазовые скорости существенно отклоняются от предсказываемых слабо-нелинейной теорией. Для установившихся волн больших амплитуд численные решения уравнения Дюбрель-Жакотен [21] предсказывают существование замкнутых линий тока в движущейся системе координат и перенос массы такими волнами. В предельном случае двухслойной стратификации скорость перемещения симметричного возмущения постоянной промежуточной плотности находится из соотношения [28], перенормированного в [31] на параметры слоя раздела:

$$\frac{U_c}{C} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{h_0}{h}}, \quad (15)$$

где  $\alpha$  – отношение максимальной высоты возму-

щения (интрузии)  $h_0$  к ее длине  $2l_0$ ,

$$\alpha = \frac{h_0}{2l_0} = 0.232, \quad (16)$$

постоянная  $\beta=0.622$ . Решение [28] предсказывает, что форма этих интрузий подобна и отношение высоты  $h_0$  к длине  $2l_0$  – величина постоянная. Несмотря на большую идеализацию механизмов динамики, решение [28] удивительно хорошо предсказывает зависимость скорости распространения длины волн от амплитуды при  $1 < a/h < 5$  (рис. 2). Необходимо подчеркнуть, однако, что в рамках идеальной жидкости это решение неустойчиво [28]. Как следует из рис. 2, б, не только интрузии, но и сами волны с амплитудами  $1 < a/h < 5$  подобны по форме. Такое автомодельное поведение волн было также отмечено в работах ([24, 29]). В работе [24] результаты экспериментов были аппроксимированы линейной зависимостью длины вол-

ны от амплитуды:

$$\lambda = 0.95 + 2.1a \quad (17)$$

с отношением длины волны к амплитуде 2.1, близким к решению (14). В то же время, при  $a/h > 5$  теоретические кривые [28] отклоняются от результатов моделирования, согласно которым скорость и длина волн перестают зависеть от амплитуды волн. Необходимо отметить, что результаты экспериментов и численных расчетов фазовой скорости и длин волн демонстрируют полную автомодельность по параметрам  $Re$  и  $\varepsilon$ .

Изменениям в интегральных характеристиках волн (скорость и длина волны) соответствуют изменения во внутренней структуре волн. На рис. 3 приведено распределение в вертикальных сечениях вдоль волн поля солёности и пассивного трассера (а), завихренности (б) и поля линий тока в движущейся системе координат  $\hat{x} = x - U_c t$  (в), для трех характерных высот волн  $a/h = 0.4; 2.5; 6.4$  для серии 1 ( $h=0.5$  см). Соответствующие вертикальные профили горизонтальной скорости через центр волны приведены на рис. 4. Волны малой амплитуды  $a/h = 0.4$  перемещаются без захвата жидкости в ядре. Линии тока в движущейся системе координат разомкнуты и неплохо описываются алгебраическим решением уравнения (14), показанным жирной штриховой линией на рис. 3, в. Волна малой амплитуды на рис. 3, б представляет собой пару областей завихренности разного знака. Вертикальный профиль скорости на рис. 4, а демонстрирует наличие максимума на оси симметрии, который, однако, намного меньше скорости перемещения волн ( $Fr_m = U_m/U_c = 0.33$ ).

Поведение волн изменяется, когда максимум локальной скорости превышает фазовую скорость волн ( $Fr_m > 1$ ). Как следует из рис. 3, в волнах большой амплитуды ( $a/h = 2.5$ ) линии тока образуют замкнутый контур (интрузию), внутри которого переносится жидкость. На вертикальном профиле скорости на рис. 4, б видна область вблизи оси, скорости в которой превосходят скорость перемещения волн, а соответствующее число  $Fr_m = 1.22$ . На рис. 3, а контур области с замкнутыми линиями тока сопоставлен с решением [28], показанным жирной штриховой линией. Как следует из рисунка, оба контура неплохо совпадают. Наличие относительно небольшой вязкости в численных расчетах ( $Re_{eff} = 850$ ) стабилизирует решение [28]. Однако, в отличие от этого решения, жидкость внутри замкнутой области не находится в покое и интрузия не является “солидоном” [28]. Слабая циркуляция внутри интрузии (рис.

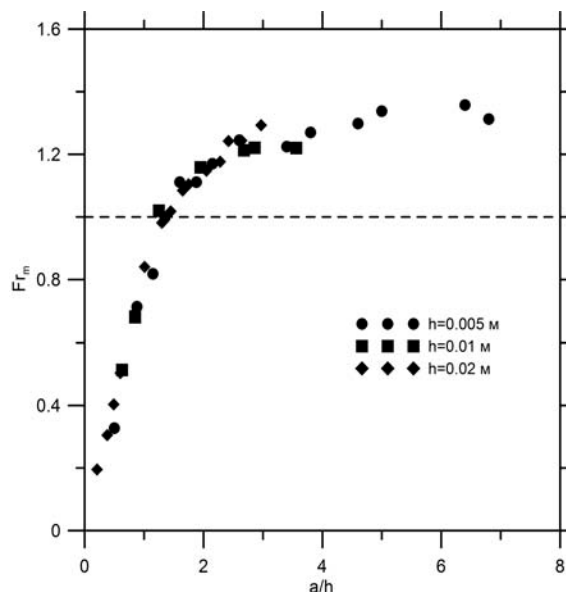


Рис. 5. Зависимость числа Фруда от амплитуды волн. Штриховая линия  $Fr_m = 1$  разделяет докритические и сверхкритические режимы волн

3, б) может быть двухвихревая или четырехвихревая [26, 31] с соответствующим распределением завихренности. На вертикальном профиле скорости (рис. 4, б) наличие циркуляции соответствует провалу скорости у оси симметрии. Результаты расчетов подтверждаются данными измерений скорости в лабораторном эксперименте [26]. Наличие циркуляции внутри интрузии, обусловленное бароклинными силами, адвекцией завихренности и вязкостью [26], приводит к постепенному выносу массы интрузии и вовлечению жидкости из окружающей жидкости. В то же время, минимальное число Ричардсона в волне составляет около 0.35.

При  $a/h > 4.7$  для случая  $h = 0,5$  см волна уже является неустойчивой. На рис. 3 представлено распределение солёности, трассера, линий тока и завихренности для волны амплитудой  $a/h = 6.4$ . Минимальное число  $Ri_{min}$  на границе интрузии падает до значения 0.06 (рис. 4, в), что значительно меньше критического значения числа Ричардсона для линейной неустойчивости, предсказываемого теорией для параллельных стратифицированных потоков [38-39]. Сдвиговая неустойчивость приводит к формированию вихрей Кельвина-Гельмгольца (КГ). Отношение масштаба вихрей КГ  $\lambda_{KH}$  к толщине слоя раздела  $\Delta h$  составляет  $\lambda_{KH}/\Delta h \approx 8$ , что согласуется как со значением 7.5 в теории параллельных стратифицированных потоков [38-39], так и со значением 7.9 в

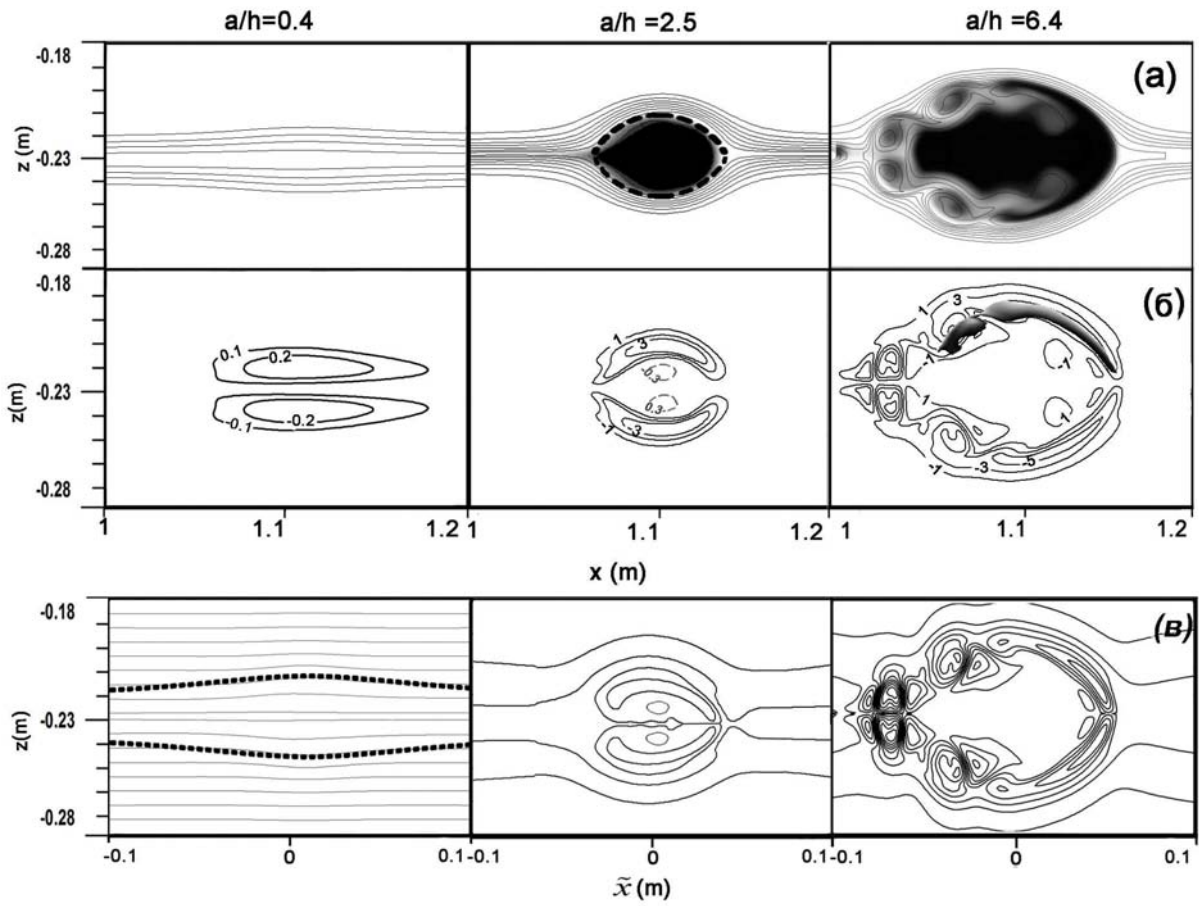


Рис. 3. Распределение в вертикальных сечениях вдоль волн поля солёности и пассивного трассера (а), завихренности (б) и поля линий тока в движущейся системе координат  $\hat{x} = x - Uct$  (в), для трех характерных высот волн  $a/h = 0.4; 2.5; 6.4$  в серии 1 ( $h=0.5$  см). Остальные обозначения приведены в тексте

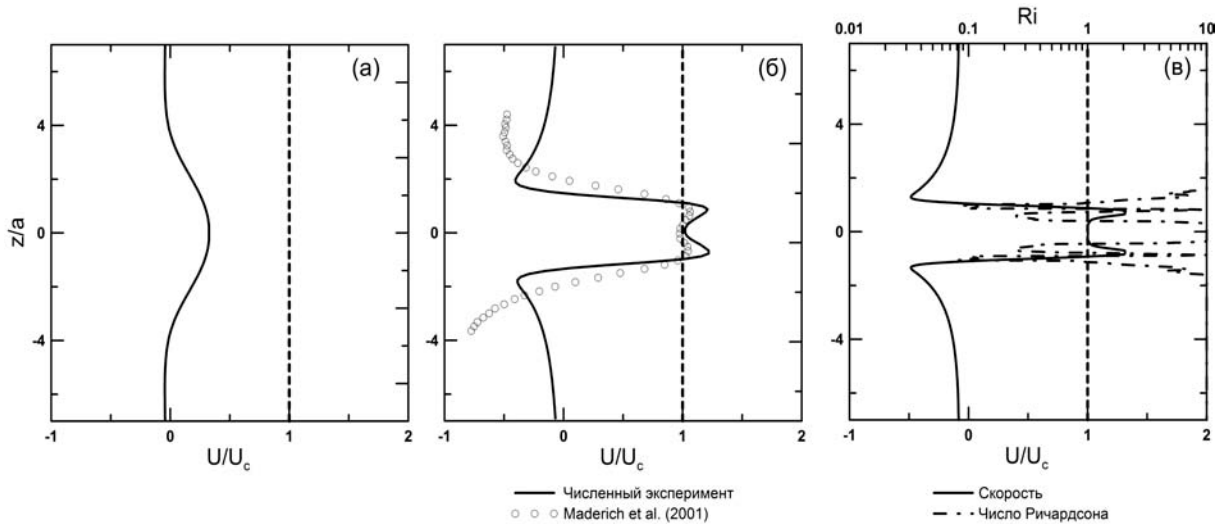


Рис. 4. Рассчитанные вертикальные профили горизонтальной скорости по центру волны для амплитуд волн  $a/h = 0.4$  (а),  $a/h = 2.5$  (б) и  $a/h = 6.4$  (в) в серии 1 ( $h=0.5$  см). На (б) приведено сравнение с лабораторным экспериментом [26]. На (в) приведено распределение числа Ричардсона Ri

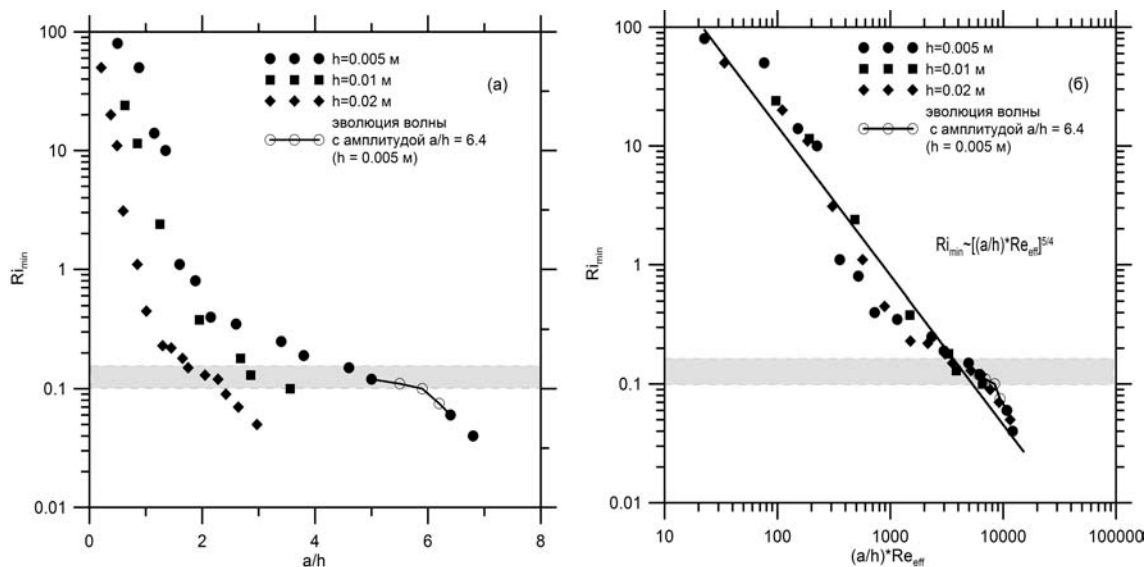


Рис. 6. Зависимость минимального числа Ричардсона  $Ri_{min}$  от амплитуды волн ( $a$ ) и эффективного числа Рейнольдса  $Re_{eff}$ . Заштрихованная полоса между  $Ri_{min} = 0.1$  и  $0.15$  разделяет устойчивые и неустойчивые волны

лабораторном эксперименте [7] для волн большой амплитуды.

Неравномерность потока в уединенной волне предполагает, что использование классического числа Ричардсона в качестве индикатора неустойчивости может быть недостаточным. На рис. 3 показано горизонтальное распределение потенциально неустойчивых областей (“карманов” [7]) с  $Ri < 0.25$ . Горизонтальная длина  $L_x$  карманов с  $Ri < 0.25$  является полезным прогностическим показателем неустойчивости [7], так как она характеризует горизонтальную протяженность, где может развиваться неустойчивое движение. Предложенное для волн первой моды [7] эмпирическое соотношение  $L_x/\lambda = 0.86$  отделяет потенциально устойчивые ( $L_x/\lambda < 0.86$ ) волны от неустойчивых волн. Вычисленное для волны второй моды на рис. 3, б значение  $L_x/\lambda$  равно 0.76, что ниже критического значения, найденного для волн первой моды. Это свидетельствует об отличиях в механизме неустойчивости: в случае волн первой моды слой раздела отделяет два разнонаправленных потока (рис. 10 в [9]), тогда как в волне второй моды слой раздела отделяет интрузию со слабой циркуляцией от внешнего потока (рис. 4, в). Аналогично, более низкие оценки ( $L_x/\lambda = 0.37 \div 0.8$ ) были получены [32] для неустойчивых интрузий.

Как показано на рис. 5, с ростом амплитуды волн число Фруда  $Fr_m$  сначала почти линейно растет и, как уже отмечалось выше, при  $a/h > 1.5$

течения в волне становятся сверхкритическими,  $Fr_m > 1$  (рис. 4), приводя к формированию интрузии с наличием областей рециркуляции. В дальнейшем рост числа Фруда замедляется и в диапазоне  $2 < a/h < 5$  оно почти постоянно со средним значением 1.22, немного превосходящим критическое значение  $Fr_m = 1$ , тогда как число Рейнольдса  $Re_{eff}$  увеличивается в этом диапазоне почти в 4 раза. Это указывает на гидравлически саморегулирующийся механизм распространения интрузий. Заметим, что для “солидона” [28] значение числа Фруда для интрузии  $Fr_m \equiv 1$ . Как следует из рис. 5, параметр  $Fr_m$  также демонстрирует полную автомодельность по параметру  $Re_{eff}$ .

Однако, как следует из рис. 6, а зависимость минимального в волне числа Ричардсона  $Ri_{min}$  от амплитуды волн  $a/h$  неавтомодельна. Для более широкого пикноклина число Ричардсона падает быстрее. Как следует из рис. 6 в волнах малой амплитуды  $Ri_{min}$  быстро падает с ростом амплитуды. Затем, в диапазоне существования устойчивых интрузий, переносимых волнами, значение  $Ri_{min}$  падает до границы  $0.1 < Ri_{min} < 0.15$ , после которой в интрузиях возникают неустойчивости. Оценка для границы между устойчивыми и неустойчивыми волнами близка к оценкам  $Ri_{min} = 0.075 \pm 0.035$  [40] и  $Ri_{min} = 0.092 \pm 0.016$  [7], полученным в лабораторных экспериментах, и  $Ri_{min} = 0.10$  – в численных расчетах [9, 11] для волн первой моды. Заметим, что граница между устойчивыми и не-



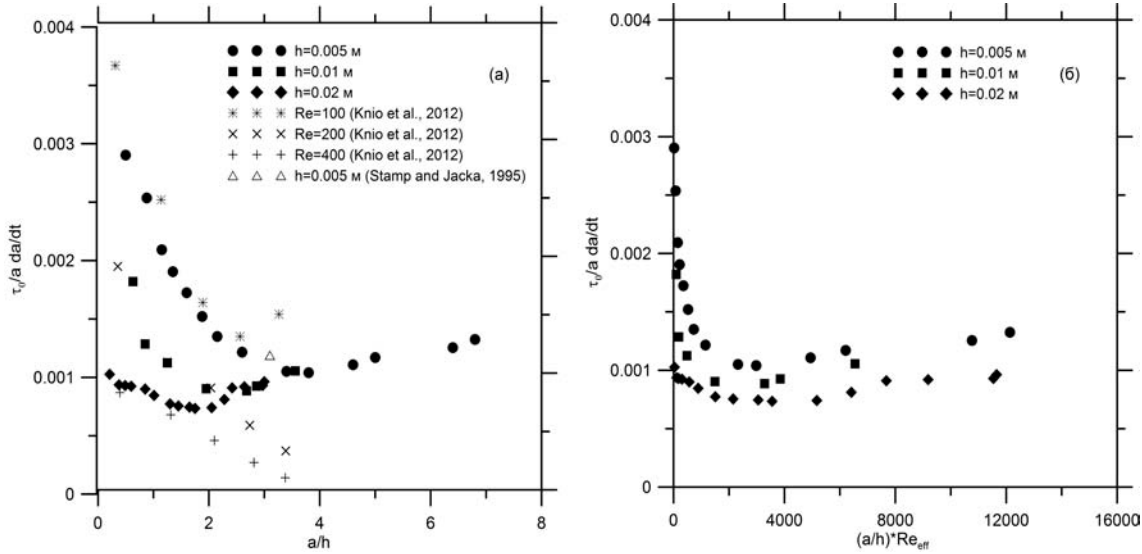


Рис. 7. Относительная скорость затухания амплитуды волн в зависимости от амплитуды волн (а) и эффективного числа Рейнольдса (б)

стойчивыми интрузиями соответствует  $a/h \approx 4.7$  для  $h = 0.5$  см,  $a/h \approx 3$  для  $h = 1$  и  $a/h \approx 2$  для  $h = 2$ , и можно предполагать, что эта граница зависит от чисел Рейнольдса. Из соображений размерности минимальное число Ричардсона  $Ri_{min} = \Phi(a/h, Re_{eff})$ . Предполагая неполную автомодельность по параметру  $Re_{eff}$ , получаем зависимость

$$Ri_{min} = Re_{eff}^n \Psi(a/h) \quad (18)$$

где  $n$  – показатель степени;  $\Psi(a/h)$  – некоторая функция от  $a/h$ . Как следует из рисунка 6, б, данные расчетов могут быть аппроксимированы универсальной степенной зависимостью

$$Ri_{min} = A(a/h)^m Re_{eff}^n, \quad (19)$$

где  $m = n = -1.25$ ; константа  $A = 4693$ . Диапазон критических значений  $0.1 < Ri_{min} < 0.15$  на этой универсальной кривой располагается при  $3000 < (a/h)Re_{eff} < 5000$ . При больших  $(a/h)Re_{eff}$  число  $Ri_{min}$  уменьшается, приводя к усилению неустойчивости и интенсивному размыванию интрузии при почти постоянном  $Fr_m$  (рис. 5). Таким образом, в зависимости от значений параметров  $Fr_m$  и  $Ri_{min}$  можно выделить три основных класса симметричных волн второй моды, распространяющихся в слое раздела между двумя глубокими однородными слоями воды: (а) слабонелинейные волны при  $Fr_m < 1$ , (б) устойчивые сильно нелинейные волны, переносящие массу, при  $Ri_{min} > 0.15$  и  $Fr_m \approx 1.2$  и (в) неустойчивые сильно нелинейные волны при  $Ri_{min} \leq 0.1$ .

Необходимо подчеркнуть, что в каждом из выделенных классов волны эволюционируют с разной скоростью под действием различных механизмов. На рис. 7, а приведена нормализованная безразмерная скорость затухания внутренних волн в зависимости от безразмерной амплитуды волн. Как следует из рисунка, и в этом случае нет полной автомодельности, однако автомодельности нет и для перенормированной зависимости на рис. 7, б, что указывает на разные механизмы диссипации для разных классов волн. В целом, рассчитанные зависимости для скорости затухания волн согласуются с доступными данными экспериментов [24] и численными расчетами [33]. Скорость затухания для устойчивых и неустойчивых интрузий почти постоянна и существенно меньше, чем для слабонелинейных волн, несмотря на то что главным механизмом диссипации энергии и перемешивания в случае неустойчивых интрузий является неустойчивость КГ. При больших временах амплитуда слабонелинейных волн, для которых число Рейнольдса невелико, падает за счет вязкости, а устойчивые интрузии медленно размываются обтекающим потоком и внутренней циркуляцией, что приводит к потере массы, переносимой волнами, и, в конечном итоге, к превращению в волны, докритические по числу Фруда. В свою очередь, неустойчивые волны также теряют массу за счет перемешивания вихрями КГ и через некоторое время становятся устойчивыми волнами, переносящими массу. Аналогично эволюционируют

вали интрузии в лабораторных экспериментах [26] и в численном эксперименте [32], когда в начальный момент волна описывалась решением уравнения Дюбрей-Жакотен [21].

Отметим, что эволюция волн происходит таким образом, что число Ричардсона растет со временем по автомодельной зависимости (рис. 7, б). На этом рисунке приведена эволюция волны с амплитудой  $a/h = 6.4$  и начальным числом Ричардсона  $Ri_{min} = 0.06$ , в процессе которой амплитуда волны падает до значения  $a/h = 5$ , а число  $Ri_{min}$  возрастает до 0.12.

## ВЫВОДЫ

По результатам численных экспериментов проведен анализ структуры внутренних волн второй моды для широкого диапазона амплитуд волн. Показано, что наиболее важными характеристиками, влияющими на течение, являются локальное число Фруда  $Fr_m$ , вычисляемое как отношение максимальной локальной скорости к фазовой скорости волн, и минимальное число Ричардсона  $Ri_{min}$ . В зависимости от значений параметров  $Fr_m$  и  $Ri_{min}$  выделены три основных класса симметричных волн второй моды, распространяющихся в слое раздела между двумя глубокими однородными слоями воды: (а) слабонелинейные волны при  $Fr_m < 1$ , (б) устойчивые сильно нелинейные волны, переносящие массу, при  $Ri_{min} > 0.15$  и  $Fr_m \approx 1.2$  и (в) неустойчивые сильно нелинейные волны при  $Ri_{min} \leq 0.1$ . Обнаружена неполная автомодельность динамики волн по числу Рейнольдса, выражающаяся в исчезающей при больших  $Re_{eff}$  зависимости от него параметра  $Ri_{min}$  и скорости затухания амплитуд волн. Эволюция волн происходит таким образом, что число Ричардсона растет со временем по автомодельной зависимости.

Работа выполнена в рамках совместного проекта РФФИ-ДФФД "Интенсивные внутренние волны в океане и их влияние на подводные сооружения и платформы" (проекты ДФФД № Ф53.6/009 и РФФИ № 13-05-90424-Укр-ф-а). Частично представленные результаты получены в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (№ 14.В37.21.0642) (Т.Т)

1. Helfrich K. R., Melville W. K. 2006 // Annu. Rev. Fluid Mech.– 2006.– **38**.– P. 395 – 425.
2. Apel J. R., Ostrovsky L. A., Stepanyants Y. A., Lynch J. F. Internal solitons in the ocean and their

effect on underwater sound // J. Acoust. Soc. Am.– 2007.– **121**.– P. 695–722.

3. Maderich V., Brovchenko I., Terletska K., Hutter K. Numerical simulations of the nonhydrostatic transformation of basin-scale internal gravity waves and wave-enhanced meromixis in lakes // Ch. 4 in Hutter K. (Ed.) Nonlinear internal waves in lakes.– Springer. Series: Advances in Geophysical and Environmental Mechanics, 2012.– P. 193-276.
4. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перв стратифицированной среде.– Киев: Наукова Думка, 1988.– 240 с.
5. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Modeling internal solitary waves in the coastal ocean. // Survey in Geophysics.– 2007.– **28**.– P. 273–298.
6. Moum J.N., Farmer D.M., Smyth W.D., Armi L., Vagle S. Structure and generation of turbulence at interfaces strained by internal solitary waves propagating shoreward over the continental shelf // J. Phys. Oceanogr.– 2003.– **33**.– P. 2093–2112.
7. Fructus D., Carr M., Grue J., Jensen A., Davies P. A. Shear-induced breaking of large internal solitary waves // J. Fluid Mech.– 2009.– **620**.– P. 1–29.
8. Carr M., Fructus D., Grue J., Jensen A., Davies P. A. Convectively-induced shear instability in large internal solitary waves // Phys. Fluids.– 2008.– **20**.– P. doi:10.1063/1.3030947.
9. Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Terletska K., Brovchenko I., Pelinovsky E., Choi B.H. Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step. // Phys. Fluids.– 2010.– **22**.– P. doi:10.1063/1.3455984.
10. Talipova T., Terletska K., Maderich V., Brovchenko I., Pelinovsky E., Jung K.T., Grimshaw R., Internal solitary wave transformation over a bottom step: loss of energy // Phys. Fluids.– 2013.– **25**.– P. 032110; doi: 10.1063/1.4797455.
11. Barad M.F., Fringer O. B. Simulations of shear instabilities in interfacial gravity waves // J. Fluid Mech.– 2010.– **644**.– P. 61–95.
12. Konyaev, K. V., Sabinin K. D., Serebryany A. N. Large amplitude internal waves at the Mascarene Ridge in the Indian Ocean // Deep Sea Res. Part I.– 1995.– **42**.– P. 2075 – 2091.
13. Yang Y. J., Fang Y. C., Chang M.-H., Ramp S. R., Kao C.-C., Tang T. Y. Observations of second baroclinic mode internal solitary waves on the continental slope of the northern South China Sea // J. Geophys. Res.– 2009.– **114**.– P. doi:10.1029/2009JC005305.
14. Yang Y. J., Fang Y. C., Tang T. Y., Ramp S. R. Convex and concave types of second baroclinic mode internal solitary waves // Nonlin. Processes Geophys.– 2010.– **17**.– P. 605–614.
15. Shroyer E. L., Moum J. N., Nash J. D. Mode-2 waves on the continental shelf: ephemeral components of the nonlinear internal wave field // J. Geophys. Res.– 2010.– **115**.– P. doi:10.1029/2009JC005605.
16. Ramp S. R. Y. J. Yang D. B. Reeder, and F. L. Bahr Observations of a mode-2 nonlinear internal wave on the northern Heng-Chun Ridge south of Taiwan // Journal of Geophysical Research.– 2012.– **117**.– P. 30–43.
17. Christie D. R. The morning glory of the Gulf of Carpentaria: a paradigm for non-linear waves in the lower atmosphere // Austral. Met. Mag.– 1992.– **41**.– P. 21–60.

18. Benjamin, T. B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth. // *J. Fluid Mech.*– 1967.– **29**.– P. 559–592.
19. Davis, R. E., Acrivos A. Solitary internal waves in deep water // *J. Fluid Mech.*– 1967.– **29**.– P. 593–607.
20. Ono H. Algebraic solitary wave in stratified fluids. // *J. Phys. Soc. Jpn.*– 1974.– **39**.– P. 1082–1091.
21. Dubreil-Jacotin L. Sur les ondes type permanent dans les liquides heterogenes // *Atti R. Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. Fis., Mat. Nat.*– 1932.– **15**.– P. 44–72.
22. Kamachi, M. and H. Honji Steady flow patterns of internal solitary bulges in a stratified fluid // *Phys. Fluids* .– 1982.– **15**.– P. 1119 – 1120.
23. Мадерич В.С., Кулик А. И. Коллапс интрузий в устойчиво стратифицированной среде // *Изв. РАН, Физ. Атм. Океана.*– 1992.– **28**.– С. 1197–1204.
24. Stamp, A. P., Jacka, M Deep-water internal solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 1995.– **305**.– P. 347–341.
25. Honji H., Matsunaga, Y. Sugihara, K. Sakai Experimental observation of internal symmetric solitary waves in a two-layer fluid // *Fluid Dynamics Research* .– 1995.– **15**.– P. 89–102.
26. Maderich, V. S., Heijst, G. J. F. van Brandt, A. Laboratory experiments on intrusive flows and internal waves on a pycnocline // *J. Fluid Mech.*– 2001.– **432**.– P. 285–311.
27. Mehta A. P., Sutherland B. R. , Kyba P. J. Interfacial gravity currents. Part II. Wave excitation // *Phys. Fluids* .– 2002.– **14**.– P. 3558 – 3569.
28. Козлов В. Ф., Макаров, В. Г. Об одном классе стационарных гравитационных течений со скачком плотности. // *Изв. РАН, Физ. Атм. Океана.*– 1990.– **26**.– С. 395–402.
29. Pullin, D. I., Grimshaw, R. H. J. Finite-amplitude solitary waves at the interface between two homogeneous fluids // *Phys. Fluids* .– 1988.– **31**.– P. 3550–3559.
30. Гаврилов Н.В., Ляпидевский В.Ю Симметричные уединенные волны на границе раздела жидкостей // *ДАН.*– 2009.– **429**.– С. 187–190.
31. Terez, D. E., Knio, O. M. Numerical simulations of large-amplitude internal solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 1998.– **362**.– P. 53–82.
32. Helfrich K.R. White B.L. A model for large-amplitude internal solitary waves with trapped cores // *Nonlin. Processes Geophys.*– 2010.– **17**.– P. 303–318.
33. Salloum M, Knio O. M., Brandt A Numerical simulation of mass transport in internal solitary waves // *Phys. Fluids*.– 2012.– **15**.– P. 89–102.
34. Olsthoorn J., Baglaenko A., Stastna M. Analysis of asymmetries in propagating mode-2 waves // *Nonlin. Processes Geophys.*– 2013.– **20**.– P. 59–69.
35. Akylas T., Grimshaw R. Solitary internal waves with oscillatory tails // *J. Fluid Mech.*– 1992.– **242**.– P. 279–298.
36. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике.– Л.: Гидрометеоиздат, 1982.– 256 с.
37. Kanarska Y., Maderich V. A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // *Ocean Dynamics*.– 2003.– **53**.– P. 176–185.
38. Howard L. N. Note on a paper by John W. Miles // *J. Fluid Mech.*– 1961.– **10**.– P. 509–569.
39. Miles J.W., Howard L. N. Note on a heterogeneous shear flow // *J. Fluid Mech.*– 1964.– **20**.– P. 331–69.
40. Troy C. D. Koseff J. R. The instability and breaking of long internal waves // *J. Fluid Mech.*– 2005.– **543**.– P. 107–298.