

УДК 532.595

# БИФУРКАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ ГИБКИХ ПЛАСТИН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ГАЗОВЫМ ТЕЧЕНИЕМ

К. В. АВРАМОВ\*, Ю. В. МИХЛИН\*, В. Н. РОМАНЕНКО\*, А. А. КИРЕЕНКОВ\*\*

\*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины,  
61046, Харьков, ул.Д.Пожарского, 2/10\*\*Институт проблем механики РАН,  
119526, Москва, пр. Вернадского, д.101, корп.1  
kvavr@kharkov.ua

Получено 07.07.2013 ◊ Пересмотрено 12.11.2013

Для исследования автоколебаний тонкостенных пластинок, взаимодействующих с потенциальным газовым потоком, используются гиперсингулярные интегральные уравнения относительно аэродинамических производных перепада давления. Геометрически нелинейное деформирование пластинок описывается уравнениями фон Кармана. Аэроупругое поведение конструкции сводится к нелинейной динамической системе относительно обобщенных координат колебаний пластинки. Полученная система исследуется численным методом пристрелки в сочетании с алгоритмом продолжения.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** сингулярные интегральные уравнения, геометрически нелинейное деформирование пластинок, хаотические колебания

Для дослідження автоколивань тонкостінних пластинок, що взаємодіють з потенційною газовою течією, використовуються гіперсингулярні інтегральні рівняння відносно аеродинамічних похідних перепаду тиску. Геометрично нелінійне деформування пластинок описується рівняннями фон Кармана. Аеропружна поведінка конструкцій зводиться до нелінійної динамічної системи відносно узагальнених координат коливань пластин. Отримана система досліджується чисельними методом пристрілки в сполученні з алгоритмом продовження.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** сингулярні інтегральні рівняння, геометрично нелінійне деформування пластин, хаотичні коливання

Singular integral equations with respect to aerodynamic derivatives of pressure drop are used to investigate self-sustained vibrations of plates interacting with potential gas flow. Geometrical nonlinear plate deformations are described by Von Karman equations. Aeroelastic behavior of the structure is reduced to the nonlinear dynamical system with respect to the plate general coordinates. The obtained dynamical system are analyzed by combination of shooting technique and continuation method.

**KEY WORDS:** singular integral equation, plate straining with geometrical nonlinearity, chaotic vibrations

## ВВЕДЕНИЕ

Много усилий сделано для исследования колебаний тонкостенных конструкций, взаимодействующих с потенциальным газовым течением. Подробный обзор публикаций на эту тему представлен в статье [1]. В большинстве публикаций, посвященных этим вопросам, поток предполагается потенциальным. Для описания взаимодействия пластин с газовым потоком используются гиперсингулярные интегральные уравнения относительно плотности циркуляции. В этом случае, с задней кромки пластинки сходят вихри, которые движутся по течению. Влияние таких вихрей на колебания пластин учитывается в большинстве моделей, что приводит к необходимости учета переходных процессов, возникающих при колебаниях пластинок. При применении такого подхода не удается использовать конструктивные методы нелинейной

динамики, к которым относится метод гармонического баланса, численный метод решения двухточечной краевой задачи. Такие методы рассмотрены в монографии [2].

Для применения конструктивных методов нелинейной динамики к рассматриваемым системам, гиперсингулярные интегральные уравнения записываются относительно аэродинамических производных перепада давления. Тогда не учитываются вихри, сходящие с задней кромки пластинки. Поэтому можно исследовать установившиеся автоколебания системы с помощью конструктивных методов нелинейной динамики.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим консольную пластинку, взаимодействующую с газовым потоком. Если пластинка находится в области флаттера, то она, в основ-

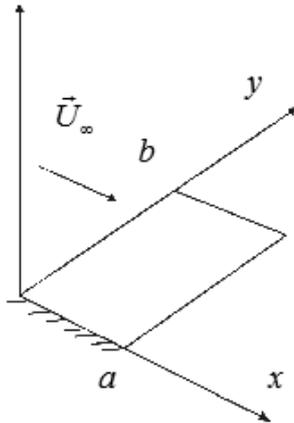


Рис. 1. Пластина, обтекаемая газовым течением

ном, совершает геометрически нелинейное деформирование [1]. Подчеркнем, что граничные условия на свободной стороне являются нелинейными функциями относительно перемещений пластины. Колебания пластинки в потенциальном газовом потоке с учетом перечисленных выше факторов будут рассмотрены в этой статье. Для описания геометрически нелинейного деформирования пластинки используем ее поперечные перемещения  $w(x, y, t)$  и функцию напряжений  $\Phi(x, y, t)$ . Тогда колебания пластинки описываются двумя нелинейными уравнениями в частных производных фон Кармана:

$$D \nabla^4 w + ch \dot{w} + \rho h \ddot{w} + \Delta p = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2)$$

где  $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$ ;  $\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ ;  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $\rho$  – плотность материала пластинки;  $h$  – толщина пластинки;  $c$  – коэффициент линейного демпфирования;  $\Delta p$  – перепад давлений, действующий на пластинку со стороны потока.

Граничные условия пластинки разделим на граничные условия изгиба и мембранные граничные условия [3]. Граничные условия изгиба представим так:

$$w(x, 0) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = 0;$$

$$Q_y + \frac{\partial M_{YX}}{\partial x} \Big|_{y=b} = M_Y|_{y=b} = 0;$$

$$M_X|_{x=0} = Q_X + \frac{\partial M_{XY}}{\partial y} \Big|_{x=0} = 0;$$

$$M_X|_{x=a} = Q_X + \frac{\partial M_{XY}}{\partial y} \Big|_{x=a} = 0, \quad (3)$$

где  $u, v$  – перемещение точек срединной плоскости пластинки вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $M_X, M_Y, M_{XY}$  – изгибающие и крутящие моменты;  $Q_X, Q_Y$  – поперечные силы в пластинке.

Мембранные усилия связаны с функцией напряжений  $\Phi$  следующими зависимостями:

$$N_X = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_Y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad N_{XY} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Мембранные усилия можно определить через перемещения точек срединной поверхности так:

$$N_X = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right];$$

$$N_Y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right];$$

$$N_{XY} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим мембранные граничные условия для мембранных усилий  $N_X, N_Y, N_{XY}$ . Если мембранные граничные условия записать через перемещения  $u, v, w$ , используя соотношения (4), то они будут нелинейными. Эти граничные условия преобразуются в линейные, если их представить относительно функции напряжений  $\Phi$ . Конечно, легче решать задачу с линейными граничными условиями. Поэтому, в данной статье, в качестве основных неизвестных выбраны  $\Phi$  и  $w$ . Анализ граничных условий для функции напряжений  $\Phi$  консольной пластинки подробно рассматривается в [3]. Эти граничные условия принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \Big|_{y=0} = 0;$$

$$\Phi|_{y=b} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0;$$

$$\Phi|_{x=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0;$$

$$\Phi|_{x=a} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0. \quad (5)$$

Изгибные колебания пластинки разложим по собственным формам колебаний  $\psi_j(x, y)$  так:

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_1} q_j(t) \psi_j(x, y), \quad (6)$$

где  $q_j(t)$  – обобщенные координаты. Функцию напряжений  $\Phi$  разложим по базисным функциям, которые удовлетворяют граничным условиям (5):

$$\Phi = \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{\nu=1}^{N_3} \theta_{j\nu}(t) F_{j\nu}(x, y). \quad (7)$$

В этой работе предполагается, что колебания пластинки близки к моногармоническим:

$$q_j(t) \approx \gamma_j \cos(\omega t) + \delta_j \sin(\omega t); \quad j = 1, \dots, N_1. \quad (8)$$

Пластина обтекается трехмерным потенциальным несжимаемым течением. На значительном расстоянии от пластинки поток имеет постоянную скорость  $U_\infty$ , параллельную оси  $x$ . Потенциал скоростей и давление потока удовлетворяют уравнениям Лапласа:  $\nabla^2 \varphi = 0$ ;  $\nabla^2 p = 0$ . Рассмотрим граничные условия для этих уравнений. Возмущения в скорости газового потока вдали от пластинки стремиться к нулю. Поэтому выполняется следующее граничное условие:  $\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} \text{grad} \varphi = 0$ .

Граничное условие непротекания представим так:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (9)$$

Перепад давлений

$$\Delta p(x, y, t) = p(x, y, z)|_{z=0^+} - p(x, y, z)|_{z=0^-}$$

на границе пластинки  $\partial S$  обращается в нуль:  $\Delta p|_{\partial S} = 0$ .

## 2. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ ДАВЛЕНИЯ

Потенциал скоростей и давления потока представим через аэродинамические производные так [5]:

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{N_1} \left[ \varphi_j^{(0)}(x, y, z) q_j(t) + \varphi_j^{(1)}(x, y, z) \dot{q}_j(t) \right], \quad (10)$$

$$p(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{N_1} \left[ p_j^{(0)}(x, y, z) q_j(t) + p_j^{(1)}(x, y, z) \dot{q}_j(t) \right]. \quad (11)$$

Подчеркнем, что потенциал скоростей и давления раскладываются по обобщенным координатам

и обобщенным скоростям пластинки. Отметим, что аэродинамические производные  $\varphi_j^{(k)}(x, y, z)$  и  $p_j^{(k)}(x, y, z)$  удовлетворяют уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_j^{(k)} = 0; \quad (12)$$

$$\nabla^2 p_j^{(k)} = 0; \quad k = 0, 1; \quad j = 1, \dots, N_1. \quad (13)$$

Здесь индекс  $j$  указывает на номер собственной моды колебаний, которая индуцирует давление. Решение уравнения Лапласа (13) представим в виде потенциала двойного слоя так [6]:

$$p_j^{(k)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S \Delta p_j^{(k)}(x_1, y_1) \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{z_1=0} dx_1 dy_1, \quad (14)$$

где  $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$ ;  $S$  – область, занимаемая срединной плоскостью пластинки;  $\Delta p_j^{(k)}(x_1, y_1) = p_j^{(k)}|_{z_1=0^+} - p_j^{(k)}|_{z_1=0^-}$  – аэродинамические производные перепада давления на пластинке. Рассматриваемое течение удовлетворяет уравнению Бернулли:

$$p(x, y, z) = -\rho_\infty \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (15)$$

где  $\rho_\infty$  – плотность газа. Уравнение Бернулли (15) для аэродинамических производных (10), (11) принимает следующий вид:

$$U_\infty \frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial x} - \omega^2 \varphi_j^{(1)} = -\frac{p_j^{(0)}}{\rho_\infty};$$

$$U_\infty \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x} + \varphi_j^{(0)} = -\frac{p_j^{(1)}}{\rho_\infty}. \quad (16)$$

Используя метод вариаций произвольных постоянных, решение системы (16) представим так:

$$\begin{aligned} \varphi_j^{(1)}(x, y, z) &= \\ &= -\frac{1}{U_\infty \rho_\infty \omega} \int_{-\infty}^x \left[ \omega p_j^{(1)}(\xi, y, z) \cos\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\xi-x)\right) + \right. \\ & \left. + p_j^{(0)}(\xi, y, z) \sin\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\xi-x)\right) \right] d\xi; \\ \varphi_j^{(0)}(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{U_\infty \rho_\infty} \int_{-\infty}^x \left[ -p_j^{(0)}(\xi, y, z) \cos\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\xi-x)\right) + \right. \\ & \left. + \omega p_j^{(1)}(\xi, y, z) \cos\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\xi-x)\right) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Граничное условие непроницаемости (9) для аэродинамических производных принимает следующий вид:

$$\left. \frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=0} = U_\infty \frac{\partial \psi_j}{\partial x}; \quad \left. \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=0} = \psi_j. \quad (18)$$

Уравнение (14) введем в (17), а результат учтем в (18). В итоге получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & 4\pi U_\infty^2 \rho_\infty \frac{\partial \psi_j(x, y)}{\partial x} = \\ & = -\omega \iint_S \Delta p_j^{(1)}(x_1, y_1) K_S(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 + \\ & + \iint_S \Delta p_j^{(0)}(x_1, y_1) K_C(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1; \\ & 4\pi U_\infty \rho_\infty \omega \psi_j(x, y) = \\ & = \omega \iint_S \Delta p_j^{(1)}(x_1, y_1) K_C(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 + \\ & + \iint_S \Delta p_j^{(0)}(x_1, y_1) K_S(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} & K_C(x - x_1, y - y_1) = \\ & = - \int_{-\infty}^{x-x_1} \cos \frac{\omega(\lambda + x_1 - x)}{U_\infty} \frac{d\lambda}{[\lambda^2 + (y - y_1)^2]^{3/2}}; \\ & K_S(x - x_1, y - y_1) = \\ & = - \int_{-\infty}^{x-x_1} \sin \frac{\omega(\lambda + x_1 - x)}{U_\infty} \frac{d\lambda}{[\lambda^2 + (y - y_1)^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

К системе уравнений (19) применим следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} & \chi = \frac{\omega a}{U_\infty}; \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{a}; \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1}{a}; \quad \bar{y}_1 = \frac{y_1}{b}; \\ & \bar{x} = \frac{x}{a}; \quad \bar{y} = \frac{y}{b}; \quad r = \frac{a}{b}; \quad \tau = \omega t; \quad \vartheta_i = \frac{q_i}{h}; \\ & K_S = \frac{a \bar{K}_S}{b^3}; \quad K_C = \frac{a \bar{K}_C}{b^3}; \\ & \Delta \bar{p}_j^{(1)} = \frac{\omega a \Delta p_j^{(1)}}{\rho_\infty U_\infty^2}; \quad \Delta \bar{p}_j^{(0)} = \frac{a \Delta p_j^{(0)}}{\rho_\infty U_\infty^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\chi$  – число Струхала. В результате получим систему уравнений, аналогичную (19) относительно безразмерных переменных и параметров. Тогда второе уравнение (19) проинтегрируем по  $\bar{x}$  и

результат введем в первое уравнение. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\Delta \bar{p}_j^{(1)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) d\bar{x}_1 d\bar{y}_1}{[r^2(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2]^{3/2}} = \\ & = - \frac{8\pi\chi}{r^2} \frac{\partial \psi_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь первое уравнение системы (19) проинтегрируем по  $\bar{x}$  и результат введем во второе уравнение системы (19). В результате получим:

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\Delta \bar{p}_j^{(0)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) d\bar{x}_1 d\bar{y}_1}{[r^2(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2]^{3/2}} = \\ & = \frac{4\pi}{r^2} \left[ \chi^2 \psi_j(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial^2 \psi_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^2} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Динамическое поведение пластин в потоке газа исследуется при различных значениях числа Струхала. Полученная система сингулярных интегральных уравнений (21), (22) зависит от числа Струхала. Поэтому при исследовании автоколебаний пластин приходится решать систему гиперсингулярных интегральных уравнений (21), (25) при различных значениях числа  $\chi$ . Это приводит к значительным вычислительным затратам. Для избежания этого недостатка получим систему гиперсингулярных интегральных уравнений, которая не содержит число Струхала. Для этого к системе (21), (22) применим следующую замену переменных:

$$\Delta \bar{p}_j^{(1)} = \chi \Delta \hat{p}_j^{(1)}; \quad \Delta \bar{p}_j^{(0)} = \chi^2 \Delta \hat{p}_j^{(0)} + \Delta \tilde{p}_j^{(0)}.$$

В результате получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\Delta \hat{p}_j^{(1)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) d\bar{x}_1 d\bar{y}_1}{[r^2(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2]^{3/2}} = - \frac{8\pi}{r^2} \frac{\partial \psi_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}}; \\ & \frac{r^2}{4\pi} \iint_S \frac{\Delta \hat{p}_j^{(0)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) d\bar{x}_1 d\bar{y}_1}{[r^2(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2]^{3/2}} = \psi_j(\bar{x}, \bar{y}); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{r^2}{4\pi} \iint_S \frac{\Delta \tilde{p}_j^{(0)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) d\bar{x}_1 d\bar{y}_1}{[r^2(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2]^{3/2}} = - \frac{\partial^2 \psi_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^2}.$$

Итак, нами получена система трех гиперсингулярных интегральных уравнений (23). Для ее решения применим метод дискретных вихрей в форме, представленной в [1].

**3. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ**

Колебания пластинки, взаимодействующей с газовым потоком, опишем нелинейной динамической системой с конечным числом степеней свободы, которая выводится методом Бубнова–Галеркина. Для этого изгибные колебания пластинки раскладываются по собственным формам колебаний (6). Собственные формы колебаний  $\psi_j(x, y)$  определяются из анализа консольной пластинки методом Релея–Ритца. Рассмотрим выбор базисных функций в разложении функции напряжений (7). Следуя [3], базисные функции представим так:  $F_{j\nu}(x, y) = \phi_j(x)\varphi_\nu(y)$ , где  $\phi_j(x)$  – собственные формы колебаний заземленного с двух сторон стержня;  $\varphi_\nu(y)$  – собственные формы консольного стержня. Выбор такого вида базисных функций определяется граничными условиями (5). Разложения (6),(7) введем в уравнения (2) и воспользуемся методом Бубнова–Галеркина. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно обобщенных координат  $\theta_{j\nu}(t)$ :

$$\sum_{j=1}^{N_2} \sum_{\nu=1}^{N_3} A_{rlj\nu} \theta_{j\nu} = \sum_{i_1, i_2=1}^{N_1} B_{rl i_1 i_2} q_{i_1} q_{i_2}; \quad (24)$$

$r = 1, \dots, N_2; l = 1, \dots, N_3,$

где

$$A_{rlj\nu} = \int_S \nabla^4 F_{j\nu} F_{rl} dx dy;$$

$$B_{rl i_1 i_2} = Eh \int_S (\psi_{i_1,xy} \psi_{i_2,xy} - \psi_{i_1,xx} \psi_{i_2,yy}) F_{rl} dx dy.$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (24), функцию напряжений представим в виде квадратичной формы обобщенных координат поперечных перемещений пластинки:

$$\Phi = \sum_{i_1, i_2=1}^{N_1} G_{i_1 i_2}(x, y) q_{i_1} q_{i_2}. \quad (25)$$

Полученную функцию напряжений (25) введем в уравнение (1) и применим метод Бубнова–Галеркина. В результате получим нелинейную динамическую систему относительно обобщенных координат поперечных перемещений пластины:

$$\sum_{i=1}^{N_1} \rho h I_{ji} \left( \ddot{q}_i + \frac{c}{\rho} \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i \right) + \sum_{i=1}^{N_1} \left( P_{ji}^{(0)} q_i + P_{ji}^{(1)} \dot{q}_i \right) +$$

$$+ \sum_{i, i_1, i_2=1}^{N_1} \chi_{j i i_1 i_2} q_{i_1} q_{i_2} = 0, \quad (26)$$

где

$$I_{ji} = \int_S \psi_i \psi_j dx dy;$$

$$P_{ji}^{(0)} = \int_S \Delta p_i^{(0)}(x, y) \psi_j dx dy;$$

$$P_{ji}^{(1)} = \int_S \Delta p_i^{(1)}(x, y) \psi_j dx dy;$$

$$\chi_{j i i_1 i_2} =$$

$$= \int_S \{ 2G_{i_1 i_2, xy} \psi_{i, xy} - G_{i_1 i_2, yy} \psi_{i, xx} - G_{i_1 i_2, xx} \psi_{i, yy} \} \psi_j dx dy;$$

$\omega_i$  – собственные частоты линейных колебаний пластинки. Приведем динамическую систему (26) к следующим безразмерным переменным и параметрам:

$$\bar{x} = \frac{x}{a}; \quad \bar{y} = \frac{y}{b}; \quad \tau = \omega t; \quad \vartheta_i = \frac{q_i}{h}; \quad (27)$$

$$\Delta \bar{p}_j^{(1)} = \frac{\omega a \Delta p_j^{(1)}}{\rho_\infty U_\infty^2}; \quad \Delta \bar{p}_j^{(0)} = \frac{a \Delta p_j^{(0)}}{\rho_\infty U_\infty^2}; \quad \chi_1 = \frac{\omega_1 a}{U_\infty}.$$

Динамическая система (26) примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{N_1} R_{ji} (\chi^2 \vartheta_i'' + \alpha \chi^2 \vartheta_i' + \chi_1^2 \Omega_i^2 \vartheta_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N_1} (\chi^2 \pi_{1,ji} \vartheta_i + \pi_{2,ji} \vartheta_i + \chi \pi_{3,ji} \vartheta_i') = 0 \quad (28)$$

$$+ \chi_1^2 \sum_{i, i_1, i_2=1}^{N_1} \alpha_{j i i_1 i_2} \vartheta_i \vartheta_{i_1} \vartheta_{i_2} = 0,$$

где

$$\vartheta_i' = \frac{d\vartheta_i}{d\tau}; \quad \alpha_{j i i_1 i_2} = \frac{h \chi_{j i i_1 i_2}}{b \rho \omega_1^2 a}; \quad \varepsilon = \frac{a \rho_\infty}{h \rho};$$

$$\alpha = \frac{c}{\omega \rho}; \quad \Omega_j = \frac{\omega_j}{\omega_1};$$

$$R_{ji} = \int_S \psi_i \psi_j d\bar{x} d\bar{y}; \quad \pi_{1,ji}^- = \int_S \Delta \hat{p}_i^{(0)} \psi_j d\bar{x} d\bar{y};$$

$$\pi_{2,ji}^- = \int_S \Delta \hat{p}_i^{(0)} \psi_j d\bar{x} d\bar{y}; \quad \pi_{3,ji}^- = \int_S \Delta \hat{p}_i^{(1)} \psi_j d\bar{x} d\bar{y}.$$

#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Для исследования автоколебаний решалась двучточечная краевая задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений (28). Для этого использовался метод пристрелки в сочетании с алгоритмом продолжения решения по параметру. Такое сочетание методов рассмотрено в [2].

В дальнейшем исследуем пластинку-флаг, рассмотренную в [7]. В этом случае исследуется консольная пластинка, защемленная сторона которой перпендикулярна направлению газового течения. Выберем параметры пластинки, ранее рассмотренные в [7]:

$$a = 0.27 \text{ м}; b = 0.127 \text{ м}; \alpha = 0.1; h = 0.39 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \\ \rho = 2.84 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \rho_\infty = 1.43 \text{ кг/м}^3; \\ E = 70.56 \cdot 10^9 \text{ Па}; \nu = 0.3.$$

Для расчета собственных частот колебаний консольной пластинки применялся метод Рэлея-Ритца. Собственные частоты колебаний этой пластинки в Гц таковы:

$$\omega_1 = 4.471; \omega_2 = 20.09; \omega_3 = 27.85; \omega_4 = 65.19; \\ \omega_5 = 78.10; \omega_6 = 124.23; \omega_7 = 134.86; \omega_8 = 154.49.$$

Анализировалась потеря устойчивости состояния равновесия пластинки. Для этого исследовалась устойчивость тривиального состояния равновесия системы (28), в которой отбрасывались нелинейные слагаемые. Было обнаружено, что при  $\chi_1^{(H)} = 0.25$ ;  $\chi = 1.09$  наблюдается бифуркация Хопфа, а в области  $\chi_1 < \chi_1^{(H)}$  наблюдаются неустойчивые состояния равновесия. При  $\chi_1 > \chi_1^{(H)}$  состояние равновесия пластинки является устойчивым. В точке бифуркации Хопфа  $\chi_1 = \chi_1^{(H)}$  рождаются автоколебания, которые будут исследоваться в дальнейшем. Отметим, что на основании расчетов, представленных в [7], бифуркация Хопфа наблюдается при  $\chi_1^{(H)} = 0.257$ ;  $\chi = 1.29$ . Итак, результаты расчетов потери устойчивости пластины, полученные нами и в статье [7], близки.

Для исследования устойчивости и бифуркаций автоколебаний пластинки применяется метод пристрелки. Результаты расчетов приведены на рис. 2. Устойчивое состояние равновесия пластинки наблюдается при  $\chi_1^{(H)} < \chi_1$ . В точке  $H_1$  при  $\chi_1 = \chi_1^{(H)}$  возникает бифуркация Хопфа и от состояния равновесия пластинки отделяются устойчивые периодические колебания. Вследствие этой

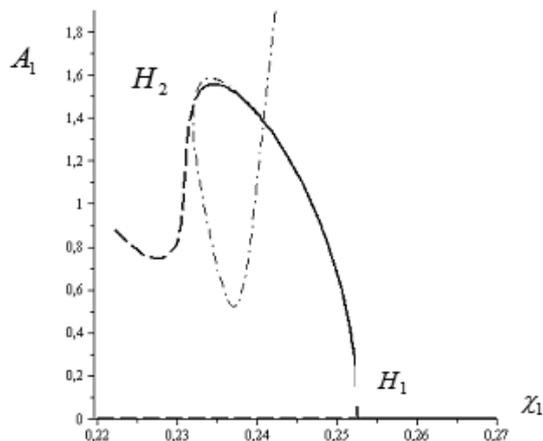


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма автоколебаний пластинки

бифуркации состояния равновесия пластинки становятся неустойчивыми. Неустойчивые состояния равновесия показываются штриховой линией, а устойчивые – сплошной. Устойчивые автоколебания пластинки существуют вплоть до точки  $H_2$ , где наблюдается бифуркация Неймарка-Сакера [2]. Эта бифуркация наблюдается при  $\chi_1 = \chi_1^{(2)}$ . При дальнейшем квазистатическом уменьшении  $\chi_1$  периодические автоколебания являются неустойчивыми. На рис. 2 штрих-пунктирной линией приводятся результаты расчетов, полученные методом гармонического баланса. До точки  $H_2$  поведение, полученное методом пристрелки и методом гармонического баланса, близко. Однако далее результаты расчетов, полученные методом гармонического баланса, существенно отличаются от реального поведения системы.

Для исследования динамического поведения при значениях  $\chi_1 < \chi_1^{(2)}$  проводилось прямое численное интегрирование динамической системы (28) из начальных условий неустойчивых колебаний, представленных на рис. 2. Для определения вида установившихся колебаний рассчитывались сечения Пуанкаре. Для этого использовалась следующая плоскость в фазовом пространстве системы:

$$\Sigma = \left\{ \left( \vartheta_1, \dots, \vartheta_8, \dot{\vartheta}_1, \dots, \dot{\vartheta}_8 \right) \in R^{16} \mid \dot{\vartheta}_1 = 0 \right\}.$$

Результаты расчета сечений Пуанкаре представлены на рис. 3. По их виду делается вывод о виде установившихся колебаний. Сразу за бифуркационной точкой  $H_2$  наблюдаются почти периодические колебания. В качестве примера сечения Пуанкаре почти периодических колебаний при

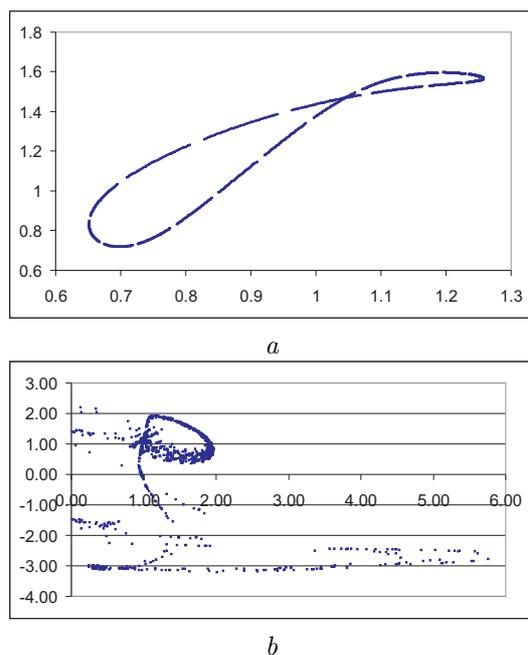


Рис. 3. Сечения Пуанкаре почти периодических и хаотических колебаний, полученные при следующем значении  $\chi_1$ :  
 $a - \chi_1 = 0.23035$ ;  $b - \chi_1 = 0.2293$

$\chi_1 = 0.23035$  приводятся на рис. 3, *a*. На этом рисунке представлено 1200 точек. При дальнейшем уменьшении  $\chi_1$  почти периодические колебания преобразуются в хаотические. В качестве примера, сечения Пуанкаре хаотических колебаний при  $\chi_1 = 0.2293$  приводятся на рис. 3, *b*.

## ВЫВОДЫ

В статье предложен метод исследования аэроупругих колебаний пластин, взаимодействующих с потенциальным, несжимаемым газовым потоком. Для исследования установившихся автоколебаний получена система сингулярных интегральных уравнений относительно аэродинамических

производных перепада давлений, которая описывает взаимодействие пластины с газовым потоком.

Аэроупругие автоколебания пластины сведены к нелинейной динамической системе с конечным числом степеней свободы. Для исследования периодических автоколебаний используется метод пристрелки в сочетании с методом продолжения, который позволяет исследовать устойчивость и бифуркации периодических автоколебаний. С помощью этого подхода исследована бифуркация Хопфа и Неймарка-Сакера. В результате бифуркации Неймарка-Сакера возникают почти периодические колебания, которые преобразуются в хаотические.

Эта работа частично поддержана грантом Национальной академии наук Украины П-66-12 и грантом Президента Украины для докторов наук Ф47/430-2012.

1. Avramov K. V., Strel'nikova E. A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow // *Nonlinear Dynamics*.– 2012.– **70**, N 2.– P. 1335-1354.
2. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем.– М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010.– 704 с.
3. Stavridis. L.T. Dynamic analysis of shallow shells of rectangular base // *Journal of Sound and Vibration*.– 1998.– **218**, No. 5.– P. 861-882.
4. Фын Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости.– М.: ГИФМЛ, 1950.– 424 с.
5. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях.– М.: Физматгиз, 1975.– 423 с.
6. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды.– Харьков: Новое слово, 2005.– 253 с.
7. Tang D. M., Yamamoto H., Dowell E. H. Flutter and limit cycle oscillations of two-dimensional panels in three-dimensional axial flow // *Journal of Fluids and Structures*.– 2003.– N 17.– P. 225-242.