

УДК 532.465

НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ДВОЙНОЙ σ -СИСТЕМЕ КООРДИНАТ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НАД УСТУПАМИ

А. А. НЕСТЕРОВ

Worley Parsons Canada Services Ltd.

Стилл Крик Драйв 4321, Оф. 600, Бурнаби, Британская Колумбия, Канада, V5C6S7
oleksangr_nesterov@gmail.com

Получено 23.07.2013

В работе представлена численная негидростатическая модель течений со свободной поверхностью, уравнения которой записаны в двойной σ -системе координат. В отличие от односигменной модели, такая модель пригодна для изучения структуры потоков вблизи подводных препятствий с вертикальными или почти вертикальными стенками, таких как уступы шельфов, рифов, судоходных каналов, океанических впадин. Применение разработанной модели к изучению трансформации солитона над искусственным шельфом в гидравлическом лотке показало достаточно хорошие результаты сравнений с измерениями. Также модель довольно аккуратно воспроизвела вихри, наблюдавшиеся в лабораторных экспериментах вблизи стенок погруженного препятствия при прохождении волны над ним. В обоих случаях хорошее согласование с экспериментальными данными было достигнуто путём калибровки шероховатости дна.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: негидростатические течения со свободной поверхностью, солитон, подводное препятствие, двойная сигма-система координат, численное моделирование

В роботі представлена чисельна негідростатична модель течій з вільною поверхнею, рівняння якої записані в подвійній σ -системі координат. На відміну від односигмальної моделі, така модель є придатною для дослідження структури потоків поблизу занурених перешкод з вертикальними або майже вертикальними стінками, такими як заступи шельфів, рифів, судноплавних каналів, океанічних впадин. Застосування розробленої моделі до дослідження трансформації солітона над штучним шельфом у гідравлічному лотку показало достатньо гарні результати порівняння з вимірами. Також модель досить точно відтворила вихори, які спостерігалися в лабораторних дослідженнях поблизу стінок зануреної перешкоди при проходженні хвилі над нею. В обох випадках гарне співпадання з експериментальними даними було досягнуто шляхом калібрування шорсткості дна.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: негідростатичні течії з вільною поверхнею, солітон, занурена перешкода, подвійна сигма-система координат, чисельне моделювання

A numerical model for free-surface non-hydrostatic flow computation in a double σ -coordinate system is presented. In contrast to a single σ -coordinate model, this model is suitable for flow studies in proximity to submerged obstacles with vertical or nearly vertical walls, such as steep drop-offs of coastal shelves, reefs, navigation canals, oceanic trenches. An application of the developed model to the study of a solitary wave transformation over an artificial shelf in a lab flume has shown a fairly good agreement with the measurements. Also this model rather accurately reproduced vortices observed in the laboratory experiments at the edges of a submerged obstacle during the passage of a wave over it. In both cases a good agreement with the experimental data has been achieved by calibrating the bed roughness.

KEY WORDS: non-hydrostatic free-surface flows, solitary wave, submerged obstacle, double-sigma coordinate system, numerical modeling

ВВЕДЕНИЕ

Задачи, связанные с распространением волн на поверхности водоёмов, являются классическим предметом исследований гидродинамики окружающей среды [1, 2]. В настоящее время существует множество моделей, пригодных для описания волн на поверхности, начиная от моделей, рассматривающих непосредственно уравнения Навье-Стокса [3], и заканчивая разновидностями модели Буссинеска, например [4–6]. Последние в основном направлены на быстрый расчёт уровня и/или интегральных характеристик волн, используемых в инженерной практике, не вдаваясь в детальное описание гидродинамических полей.

Трёхмерные модели океанических течений со свободной поверхностью [7] вполне хорошо описывают длинноволновые движения в прибрежных зонах, такие как приливные волны, однако большинство из них непригодно для моделирования коротких поверхностных волн вследствие гидростатической аппроксимации давления, как показано на примерах в [8, 9]. Негидростатические модели всё ещё составляют относительно малую долю от общего числа моделей океанических течений [7, 10, 11]. Уравнения последних записаны, как правило, либо в z -системе координат [9, 12], либо в σ -системе [8, 13–15]. К недостаткам использования z -системы можно отнести относительно сложное описание кинематики свободной поверхно-

сти, большую затрату вычислительной памяти на дискретизацию z -слоёв над поверхностью, которые могут быть лишь временно „затоплены“ [3, 9], а также ступенчатую дискретизацию дна. Недостатками σ -системы являются отсутствие возможности моделирования процесса обрушения волн и более громоздкая форма уравнений по сравнению с z -системой. Кроме того, гладкое описание дна, свойственное для σ -системы координат, оказывается малоприменимым для моделирования течений в областях с большими градиентами дна, таких как уступы шельфов, рифов, впадин и судоходных каналов, где точность численного решения и сходимость значительно ухудшаются. В некоторых случаях удаётся построить приближённое аналитическое решение, как в задаче про накат солитона на шельф со ступенькой [5]. В общем случае, для моделирования течений в водоёмах с такими особенностями более уместными являются двойная σ -система [16–18] либо σ/z система [19], суть которых состоит в разделении водоёма на две части, верхняя из которых описывается обычной σ -системой, а нижняя – либо второй σ -, либо z -системой.

Упомянутые модели [16–19] являются гидростатическими и поэтому непригодны для описания коротковолновых движений. В то же время, негидростатические модели [8, 10, 11, 13–15], использующие одинарную σ -систему, плохо подходят для описания течений вблизи вертикальных стенок уступов. Поэтому естественной идеей является создание негидростатической модели в двойной σ -системе координат, которая могла бы эффективно применяться в задачах с большими градиентами дна. Это и было осуществлено в данной работе путём слияния моделей [8] и [16, 17].

Разработанная модель была применена к изучению трансформации солитона над искусственным шельфом [5, 6, 20] и достаточно хорошо воспроизвела образование вторичной и отражённых волн, наблюдавшихся в экспериментах. Также модель довольно аккуратно воспроизвела образование вихрей вблизи уступов искусственного препятствия, погружённого в гидравлический лоток, при прохождении волны над ним [3]. В обоих задачах хорошие результаты сравнений с экспериментальными данными были достигнуты путём калибровки шероховатости дна.

1. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

В настоящей работе рассматриваются уравнения Навье-Стокса, осреднённые по Рейнольдсу,

описывающие гидродинамику водоёмов со свободной поверхностью, размеры которых значительно меньше планетарных [1]. Последнее позволяет пренебречь заведомо малыми слагаемыми, возникающими при рассмотрении уравнений во вращающейся сферической системе координат. Упрощённые трёхмерные уравнения, взятые за основу, в локальной z_* -системе координат, в которой ось z_* направлена противоположно силе земного притяжения, имеют вид, представленный в [8, 12].

Одним из основных недостатков z_* -системы является то, что система уравнений должна быть решена в области, ограниченной подвижной поверхностью $z_* = \eta(x_*, y_*, t_*)$ сверху и дном $z_* = -H(x_*, y_*)$ снизу, где (x_*, y_*) – локальные горизонтальные координаты; t_* – время. Поэтому для решения уравнений гидродинамики в водоёмах со свободной поверхностью широко применяется так называемая σ -система координат [13, 21], в которой координата $\sigma = (z_* - \eta)/D$, где $D = H + \eta$ – полная глубина. В отличие от z_* -системы, область решения в σ -системе не зависит времени и, более того, форма области значительно упрощается, так как $\sigma \in [-1, 0] \forall x_*, y_*, t_*$. Гидростатическое приближение уравнений движения в σ -системе координат, как и другие различные упрощения, подробно обсуждаются в [21].

Применение σ -системы эффективно далеко не всегда, как, например, в случае водоёмов с большими градиентами дна, где гладкое представление формы водоёма может оказаться хуже ступенчатой аппроксимации в z_* -системе с точки зрения скорости сходимости и точности численного решения. Форма таких водоёмов более хорошо описывается двойной σ -системой координат [16–18] либо комбинированной σ/z -системой [19]. В простейшем варианте двойной σ -системы вся область решения разбивается горизонтальной плоскостью $z_* = -H_c$ на две подобласти, верхняя из которых описывается в обычной σ -системе, а нижняя – во второй σ -системе, как показано на рис. 1. В общем случае разделение на подобласти может осуществляться произвольной поверхностью, являющейся однозначной функцией горизонтальных координат $H_c = H_c(x_*, y_*)$.

Двойная σ -система связана с z_* -системой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= x_*, \quad y = y_*, \quad t = t_*, \\ \sigma_u &= (z_* - \eta) / D_u \quad \text{при} \quad -\min\{H, H_c\} \leq z_* \leq \eta, \\ \sigma_l &= (z_* + H_c) / D_l \quad \text{при} \quad -H \leq z_* \leq -H_c, \end{aligned} \quad (1)$$

где $D_u = \min\{H, H_c\} + \eta$ и $D_l = \max\{H - H_c, 0\}$ – толщины слоёв воды верхней и нижней подо-

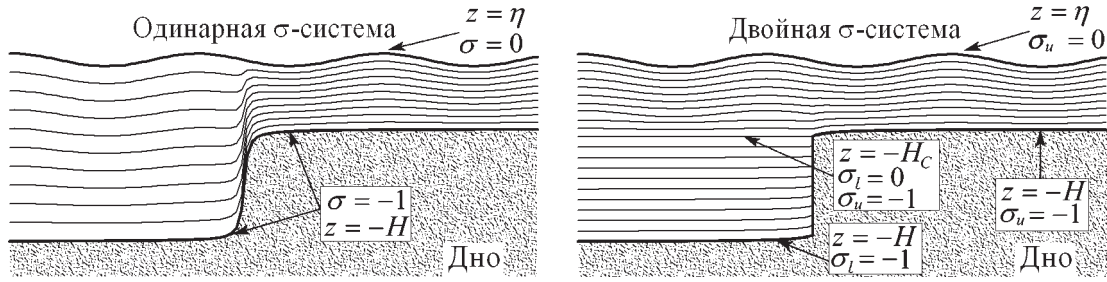


Рис. 1. Сравнение односигменной и двухсигменной систем координат возле уступа

бластей соответственно. При этом полная глубина $D = D_u + D_l$. Преобразования уравнений из z_* -системы проводятся индивидуальным образом для каждой σ -подобласти, каждое из которых является идентичным преобразованием для одинарной σ -системы. Не вдаваясь в детали, которые приводятся в [8, 13, 21], и полагая плотность воды ρ постоянной, уравнения в двойной σ -системе могут быть записаны для каждой σ -подобласти как:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial D_s U_s}{\partial t} + \frac{\partial D_s U_s^2}{\partial x} + \frac{\partial D_s U_s V_s}{\partial y} + \frac{\partial \omega_s U_s}{\partial \sigma_s} - D_s (\bar{f} V_s - \hat{f} W_s) &= \\ = -D_s \left(g_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial q_s}{\partial x} - J_{s,x} \frac{\partial q}{\partial \sigma_s} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma_s} \left(\frac{\nu_s}{D_s} \frac{\partial U_s}{\partial \sigma_s} \right) + F_{s,x}, \\ \frac{\partial D_s V_s}{\partial t} + \frac{\partial D_s U_s V_s}{\partial x} + \frac{\partial D_s V_s^2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_s V_s}{\partial \sigma_s} + D_s \bar{f} U_s &= \\ = -D_s \left(g_s \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial q_s}{\partial y} - J_{s,y} \frac{\partial q}{\partial \sigma_s} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma_s} \left(\frac{\nu_s}{D_s} \frac{\partial V_s}{\partial \sigma_s} \right) + F_{s,y}, \\ \frac{\partial D_s W_s}{\partial t} + \frac{\partial D_s U_s W_s}{\partial x} + \frac{\partial D_s V_s W_s}{\partial y} + \frac{\partial \omega_s W_s}{\partial \sigma_s} - D_s \hat{f} U_s &= \\ = -\frac{\partial q_s}{\partial \sigma_s} + \frac{\partial}{\partial \sigma_s} \left(\frac{\nu_s}{D_s} \frac{\partial W_s}{\partial \sigma_s} \right) + F_{s,\sigma_s}, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

где индекс s принимает одно из двух значений: либо u (upper), либо l (lower), относящиеся к верхней и нижней подобластям соответственно; (U_s, V_s, W_s) – вектор скорости; q_s – негидростатическая „поправка“ давления; $F_{s,x}, F_{s,y}, F_{s,\sigma_s}$ – проекции удельной (делённой на плотность ρ) силы вязкости на оси координат; g – гравитационное ускорение; $\bar{f} = 2\Omega \sin \phi$ и $\hat{f} = 2\Omega \cos \phi$ – коэффициенты проекций кориолисовой силы, зависящие от угловой скорости вращения Земли Ω и географической широты ϕ . Коэффициенты трансформации $J_{s,x}, J_{s,y}, J_{s,t}$ ($s = u, l$) в общем виде определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} J_{u,x} &= \frac{1}{D_u} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma \frac{\partial D_u}{\partial x} \right), \quad J_{l,x} = \frac{1}{D_l} \left(-\frac{\partial H_c}{\partial x} + \sigma \frac{\partial D_l}{\partial x} \right), \\ J_{u,y} &= \frac{1}{D_u} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \sigma \frac{\partial D_u}{\partial y} \right), \quad J_{l,y} = \frac{1}{D_l} \left(-\frac{\partial H_c}{\partial y} + \sigma \frac{\partial D_l}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

$$J_{u,t} = \frac{1}{D_u} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sigma \frac{\partial D_u}{\partial t} \right), \quad J_{l,t} \equiv 0. \quad (3)$$

В уравнениях (2), так же как в [21], вводится преобразованная "вертикальная" компонента скорости ω_s , связанная с W_s соотношением

$$\omega_s = W_s - D_s (J_{s,x} U_s + J_{s,y} V_s + J_{s,t}). \quad (4)$$

Уравнения неразрывности в верхней и нижней σ -системах координат имеют вид [13, 21]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_u U_u}{\partial x} + \frac{\partial D_u V_u}{\partial y} + \frac{\partial \omega_u}{\partial \sigma_u} + \frac{\partial \eta}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial D_l U_l}{\partial x} + \frac{\partial D_l V_l}{\partial y} + \frac{\partial \omega_l}{\partial \sigma_l} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

их также можно переписать в иной форме, без производных по времени, одинаковой для обеих σ -систем:

$$\frac{\partial D_s U_s}{\partial x} + \frac{\partial D_s V_s}{\partial y} + \frac{\partial W_s}{\partial \sigma_s} - \frac{\partial (J_{s,x} D_s U_s + J_{s,y} D_s V_s)}{\partial \sigma_s} = 0. \quad (6)$$

Касательные напряжения и, соответственно, компоненты удельной силы вязкости $F_{s,x}, F_{s,y}, F_{s,\sigma}$ формулируются в упрощённом виде [21]. Для описания турбулентной вязкости предпочтение было отдано параметризации Смагоринского [22], согласно которой касательные напряжения определяются как $\tau_{i,j} = -2C\Delta^2 |S_{i,j}| S_{i,j}$, где $S_{i,j}$ – тензор скорости сдвига; Δ – размер фильтра вихрей подсеточного масштаба (размер численной ячейки); $C \sim 0.2$ – постоянный коэффициент. Применение k/ϵ модели турбулентной вязкости в задачах, обсуждаемых в следующих разделах, показало более плохие результаты, что и обусловило такой выбор.

Немаловажным в тестовых задачах оказалось влияние придонного трения $\vec{\tau}_b$, которое описывалось формулой

$$\vec{\tau}_b / \rho = -\alpha^2 / (\ln(\Delta z / z_0) - 1)^2 (U_b^2 + V_b^2)^{1/2} \overrightarrow{(U_b, V_b)}, \quad (7)$$

где z_0 – шероховатость дна; $\overrightarrow{(U_b, V_b)}$ – вектор скорости в придонном численном слое; Δz – расстояние центра придонной численной ячейки от дна; $\alpha = 0.4$.

Система уравнений (2) записана в консервативном виде и, по сути, состоит из двух систем, связанных друг с другом граничными условиями на поверхности раздела σ -подобластей. Условиями "склейки" решений являются непрерывность всех физических переменных и их потоков через поверхность раздела. В частности, если $H_c(x, y) = \text{const}$, то уравнения (4) приводят к условию $\omega_u|_{\sigma_u=-1} = \omega_l|_{\sigma_l=0}$.

2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Для дискретизации системы уравнений (2)–(6) в рассматриваемой модели применяются разнесенные сетки: компоненты скорости U_s, V_s, W_s, ω_s и коэффициенты трансформации $J_{s,x}, J_{s,y}$ задаются на соответствующих гранях численной ячейки (i, j, k) ; скалярные переменные C_s и поправка давления q_s задаются в её центре, как показано на рис. 2. Алгоритм расчёта, применённый в данной работе, по сути не отличается от алгоритма односигменной модели [8] и условно может быть разделён на следующие этапы.

1. Вычисление явных слагаемых. На первом этапе каждого шага интегрирования системы (2) проводится расчёт адвективных и кориолисовых слагаемых, а также горизонтальной вязкости по явным схемам, включая уравнение для W . Алгоритмы расчёта являются такими же, как и для односигменной модели [8], и применяются к верхней и нижней σ -подобластям независимым образом. Для W рассматривается специальная ячейка, состоящая из двух половинок "скалярных ячеек", прилегающих к грани, на которой задаётся W (рис. 2). Можно показать, что консервативность вертикальной составляющей импульса обеспечивается, если полагать компоненты скорости на гранях "W-ячеек" как среднее компонент скоростей, соответствующих скалярным ячейкам. Для W_{K_u} , заданного на поверхности раздела σ -подобластей, приходится рассматривать специальную ячейку, состоящую из половинок скалярных ячеек, принадлежащим разным σ -подобластям.

2. Вычисление вязкостных слагаемых в вертикальном направлении. На втором этапе проводится вычисление вязкостных слагаемых в вертикальном направлении по неявной схеме, которая не отличается от схем [9, 21] и подразуме-

вает решение систем линейных уравнений с трёхдиагональными матрицами. Размер таких матриц зависит от того, описывается ли столб воды одинарной или двойной σ -системой.

3. Нахождение уровня поверхности в гидростатическом приближении. Алгоритм расчёта уровня поверхности $\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}$ в гидростатическом приближении по неявной схеме в двухсигменной модели является таким же, как алгоритм односигменной модели [8] и алгоритм z -модели [9]: $\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}$ находится путём решения системы линейных уравнений с 5-диагональной матрицей, после чего проводится соответствующая коррекция поля скорости.

4. Вычисление поправки давления. Суть четвёртого этапа заключается в подстановке дискретных выражений для негидростатической поправки скорости в дискретное уравнение неразрывности согласно [8], приводящее к системе линейных уравнений с несимметричной 25-диагональной матрицей. Поправка давления q находится путём решения этой системы методом Bi-CGSTAB [23], после чего должным образом осуществляется коррекция полей скорости потока и уровня поверхности.

В одинарной σ -системе уравнение для каждого слоя k вовлекает неизвестные q с пяти близлежащих слоёв $k-2, k-1, k, k+1, k+2$ за исключением приповерхностного $k=2$ и придонного $k=K-1$ слоёв, для которых в [8] составлялись отдельные уравнения. В двойной σ -системе нижний слой $k=K_u-1$ верхней σ -подобласти может быть расположен как над дном, так и над нижней σ -подобластью (см. рис. 2). В первом случае уравнение для q со слоя $k=K_u-1$ является таким же, как в [8]. Во втором случае необходимо составление специального уравнения, для вывода которого воспользуемся тем, что на поверхности раздела $z = -H_c$ при $H_c(x, y) = \text{const}$ выполняется условие

$$\omega_u|_{\sigma_u=-1} = \omega_l|_{\sigma_l=0} = W|_{z=-H_c}, \quad (8)$$

следующее из (4). Для простоты будем полагать постоянный в каждой индивидуальной σ -системе размер численной ячейки $\{\Delta x, \Delta y, \Delta \sigma_s\} = \text{const}$ ($\Delta \sigma_u \neq \Delta \sigma_l$). Для слоя $k=K_u-1$ верхней σ -подобласти, расположенного над нижней подобластью, уравнение неразрывности (5) записывается как

$$\begin{aligned} & \left(D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,K_u-1}^{n+1} - D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,K_u-1}^{n+1} \right) / \Delta x + \\ & + \left(D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,K_u-1}^{n+1} - D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,K_u-1}^{n+1} \right) / \Delta y + \\ & + \left(\omega_{i,j,K_u-1}^{n+1} - \omega_{i,j,K_u}^{n+1} \right) / \Delta \sigma + \left(\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n \right) / \Delta t = 0, \quad (9) \end{aligned}$$

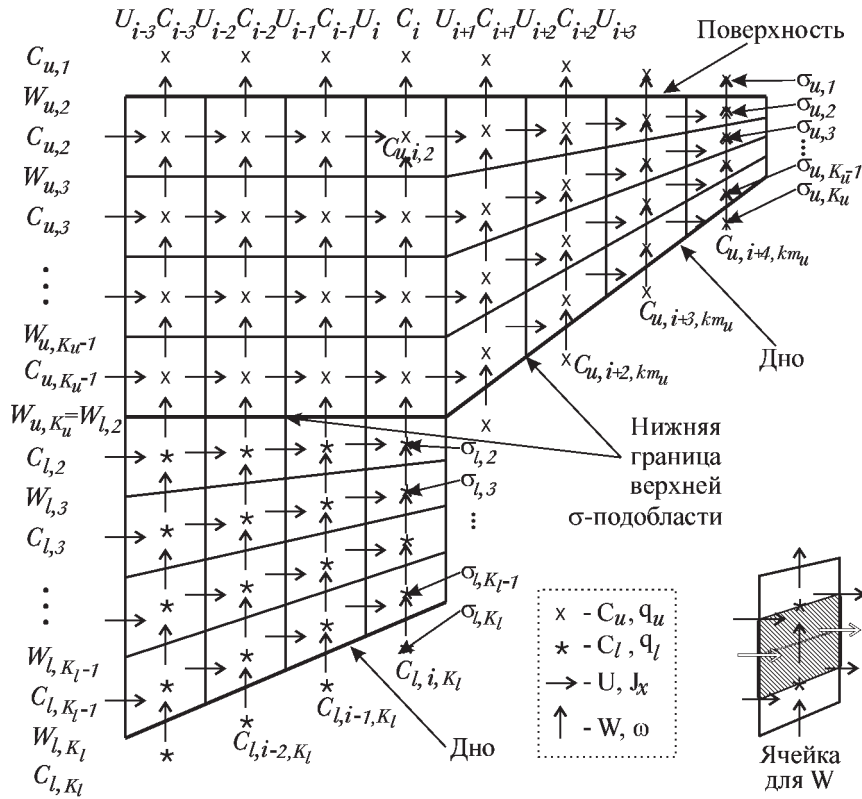


Рис. 2. Пространственное расположение дискретных переменных в разнесенных сетках

где индекс u у переменных σ, D, U, W и ω опущен для упрощения записи. Дискретизируем далее (4) в верхней σ -подобласти:

$$\begin{aligned} \omega_{i,j,k}^{n+1} &= W_{i,j,k}^{n+1} - (1 + \sigma_k) (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n) / \Delta t - 1/4 \times \\ &\times \left\{ J_{x_{i,j,k}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,k}^{n+1} + J_{x_{i,j,k-1}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,k-1}^{n+1} + \right. \\ &+ J_{x_{i+1,j,k}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,k}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,k-1}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,k-1}^{n+1} + \\ &+ J_{y_{i,j,k}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,k}^{n+1} + J_{y_{i,j,k-1}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,k-1}^{n+1} + \\ &\left. + J_{y_{i,j+1,k}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,k}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,k-1}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,k-1}^{n+1} \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

где индекс u опущен у $\sigma, D, U, W, \omega, J_x, J_y$. Подставляя выражение (10) в (9) и учитывая (8), уравнение неразрывности для слоя $k = K_u - 1$ верхней σ -подобласти принимает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,K_u-1}^{n+1} - D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,K_u-1}^{n+1}}{\Delta x} + \\ &+ \frac{D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,K_u-1}^{n+1} - D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,K_u-1}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{W_{i,j,K_u-1}^{n+1} - W_{i,j,K_u}^{n+1}}{\Delta \sigma} = \frac{1}{4\Delta\sigma} \times \\ &\times \left\{ J_{x_{i,j,K_u-2}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,K_u-2}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,K_u-2}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,K_u-2}^{n+1} + \right. \\ &\left. + J_{x_{i,j,K_u-1}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,K_u-1}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,K_u-1}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,K_u-1}^{n+1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ J_{y_{i,j,K_u-2}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,K_u-2}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,K_u-2}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,K_u-2}^{n+1} + \\ &+ J_{y_{i,j,K_u-1}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,K_u-1}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,K_u-1}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,K_u-1}^{n+1} \left. \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Уравнение (11) отличается от "придонного" уравнения односигменной модели [8] только лишь присутствием слагаемых W_{i,j,K_u}^{n+1} .

Рассмотрим теперь поправку приближённого гидростатического решения $\tilde{D}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i+1,j,k}^{n+1}, \tilde{D}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{W}_{i,j,k}^{n+1}$, полученного без учёта слагаемых, содержащих q в (2) на этапах 1–3, которая, аналогично [8], проводится путём добавления таковых в полуявной форме как для верхней, так и для нижней σ -подобласти:

$$\begin{aligned} D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,k}^{n+1} &= \tilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i,j,k}^{n+1} - D_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{\theta \Delta t}{\Delta x} (q_{i,j,k}^{n+1} - q_{i-1,j,k}^{n+1}) + \\ &+ D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,k}}^n \frac{\theta \Delta t}{4\Delta\sigma} (q_{i,j,k-1}^{n+1} - q_{i,j,k+1}^{n+1} + q_{i-1,j,k-1}^{n+1} - q_{i-1,j,k+1}^{n+1}), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,k}^{n+1} &= \tilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} - D_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{\theta \Delta t}{\Delta y} (q_{i,j,k}^{n+1} - q_{i,j-1,k}^{n+1}) + \\ &+ D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j,k}}^n \frac{\theta \Delta t}{4\Delta\sigma} (q_{i,j,k-1}^{n+1} - q_{i,j,k+1}^{n+1} + q_{i,j-1,k-1}^{n+1} - q_{i,j-1,k+1}^{n+1}), \quad (13) \end{aligned}$$

$$W_{i,j,k}^{n+1} = \tilde{W}_{i,j,k}^{n+1} - \frac{\theta \Delta t}{D_{i,j}^n \Delta \sigma} (q_{i,j,k-1}^{n+1} - q_{i,j,k}^{n+1}), \quad (14)$$

где $\theta \in (1/2, 1]$ – фактор невязности для повышения точности аппроксимации и

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i,j,k}^{n+1} &= \tilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i,j,k}^{n+1} D_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{(1-\theta)\Delta t}{\Delta x} (q_{i,j,k}^n - q_{i-1,j,k}^n) + \\ &+ D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,k}}^n \frac{(1-\theta)\Delta t}{4\Delta\sigma} (q_{i,j,k-1}^n - q_{i,j,k+1}^n + q_{i-1,j,k-1}^n - q_{i-1,j,k+1}^n), \\ \tilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} &= \tilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} D_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{(1-\theta)\Delta t}{\Delta y} (q_{i,j,k}^n - q_{i,j-1,k}^n) + \\ &+ D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j,k}}^n \frac{(1-\theta)\Delta t}{4\Delta\sigma} (q_{i,j,k-1}^n - q_{i,j,k+1}^n + q_{i,j-1,k-1}^n - q_{i,j-1,k+1}^n), \\ \tilde{W}_{i,j,k}^{n+1} &= \tilde{W}_{i,j,k}^{n+1} - \frac{(1-\theta)\Delta t}{D_{i,j}^n \Delta\sigma} (q_{i,j,k-1}^n - q_{i,j,k}^n). \end{aligned}$$

Подставляя выражения (12)–(14) в (11) для слоя $k = K_u - 1$ верхней σ -подобласти и снова упуская индекс u и σ , $D, U, V, \omega, J_x, J_y$ для упрощения записи, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} q_{i,j,K_{u-1}}^{n+1} &\left\{ \frac{D_{i-\frac{1}{2},j}^n + D_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x^2} + \frac{D_{i,j-\frac{1}{2}}^n + D_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y^2} + \frac{2}{D_{ij}^n \Delta\sigma^2} + \right. \\ &+ S_{x_{i,j,K_{u-2}}}^n + S_{x_{i+1,j,K_{u-2}}}^n + S_{y_{i,j,K_{u-2}}}^n + S_{y_{i,j+1,K_{u-2}}}^n + \\ &+ \left. \left(D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n - D_{i+\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n \right) / (4\Delta x \Delta\sigma) + \right. \\ &+ \left. \left(D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j,K_{u-1}}}^n - D_{i,j+\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j+1,K_{u-1}}}^n \right) / (4\Delta y \Delta\sigma) \right\} + \\ &+ q_{i-1,j,K_{u-1}}^{n+1} \left\{ -\frac{D_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x^2} - \frac{D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n}{4\Delta x \Delta\sigma} + S_{x_{i,j,K_{u-2}}}^n \right\} + \\ &+ q_{i+1,j,K_{u-1}}^{n+1} \left\{ -\frac{D_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x^2} + \frac{D_{i+\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n}{4\Delta x \Delta\sigma} + S_{x_{i+1,j,K_{u-2}}}^n \right\} + \\ &+ q_{i-1,j,K_{u-1}}^{n+1} \left\{ -\frac{D_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y^2} - \frac{D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j,K_{u-1}}}^n}{4\Delta y \Delta\sigma} + S_{y_{i,j,K_{u-2}}}^n \right\} + \\ &+ q_{i+1,j,K_{u-1}}^{n+1} \left\{ -\frac{D_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y^2} + \frac{D_{i,j+\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j+1,K_{u-1}}}^n}{4\Delta y \Delta\sigma} + S_{y_{i,j+1,K_{u-2}}}^n \right\} + \\ &+ q_{i,j,K_{u-2}}^{n+1} \left\{ -1 / (D_{ij}^n \Delta\sigma^2) - \right. \\ &- S_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n - S_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n - S_{y_{i,j,K_{u-1}}}^n - S_{y_{i,j+1,K_{u-1}}}^n + \\ &+ D_{i+\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n - J_{x_{i+1,j,K_{u-2}}}^n) / (4\Delta x \Delta\sigma) - \\ &- D_{i-\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n - J_{x_{i,j,K_{u-2}}}^n) / (4\Delta x \Delta\sigma) + \\ &+ D_{i,j+\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j+1,K_{u-1}}}^n - J_{y_{i,j+1,K_{u-2}}}^n) / (4\Delta y \Delta\sigma) - \\ &- D_{i,j-\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j,K_{u-1}}}^n - J_{y_{i,j,K_{u-2}}}^n) / (4\Delta y \Delta\sigma) \left. \right\} + \\ &+ q_{i,j,K_u}^{n+1} \left\{ -1 / (D_{ij}^n \Delta\sigma^2) + \right. \\ &+ S_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n + S_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n + S_{y_{i,j,K_{u-1}}}^n + S_{y_{i,j+1,K_{u-1}}}^n + \\ &+ \left. \left(D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n - D_{i+\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n \right) / (4\Delta x \Delta\sigma) - \right. \\ &- \left. \left(D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j,K_{u-1}}}^n - D_{i,j+\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j+1,K_{u-1}}}^n \right) / (4\Delta y \Delta\sigma) \right\} + \\ &+ q_{i-1,j,K_{u-2}}^{n+1} \left\{ -D_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{J_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n + J_{x_{i+1,j,K_{u-2}}}^n}{4\Delta x \Delta\sigma} - S_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n \right\} + \\ &+ q_{i+1,j,K_{u-2}}^{n+1} \left\{ D_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{J_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n + J_{x_{i+1,j,K_{u-2}}}^n}{4\Delta x \Delta\sigma} - S_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n \right\} + \\ &+ q_{i-1,j,K_u}^{n+1} \left\{ D_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{J_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n}{(4\Delta x \Delta\sigma)} + S_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n \right\} + \\ &+ q_{i+1,j,K_u}^{n+1} \left\{ -D_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{J_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n}{(4\Delta x \Delta\sigma)} + S_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n \right\} + \\ &+ q_{i,j,K_{u-3}}^{n+1} \left\{ -S_{x_{i,j,K_{u-2}}}^n - S_{x_{i+1,j,K_{u-2}}}^n - S_{y_{i,j,K_{u-2}}}^n - S_{y_{i,j+1,K_{u-2}}}^n \right\} + \\ &+ q_{i-1,j,K_{u-3}}^{n+1} \left\{ -S_{x_{i,j,K_{u-2}}}^n \right\} + q_{i+1,j,K_{u-3}}^{n+1} \left\{ -S_{x_{i+1,j,K_{u-2}}}^n \right\} + \\ &+ q_{i,j-1,K_{u-3}}^{n+1} \left\{ -S_{y_{i,j,K_{u-2}}}^n \right\} + q_{i,j+1,K_{u-3}}^{n+1} \left\{ -S_{y_{i,j+1,K_{u-2}}}^n \right\} = \\ &= - \left(\tilde{D}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i+1,j,K_{u-1}}^{n+1} - \tilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i,j,K_{u-1}}^{n+1} \right) / (\Delta x \Delta t) - \\ &- \left(\tilde{D}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j+1,K_{u-1}}^{n+1} - \tilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j,K_{u-1}}^{n+1} \right) / (\Delta y \Delta t) - \\ &- \left(\tilde{W}_{i,j,K_{u-1}}^{n+1} - \tilde{W}_{i,j,K_u}^{n+1} \right) / (\Delta\sigma \Delta t) + 1 / (4\Delta\sigma \Delta t) \times \\ &\times \left[J_{x_{i,j,K_{u-1}}}^n \tilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i,j,K_{u-1}}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,K_{u-1}}}^n \tilde{D}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i+1,j,K_{u-1}}^{n+1} + \right. \\ &+ J_{x_{i,j,K_{u-2}}}^n \tilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i,j,K_{u-2}}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,K_{u-2}}}^n \tilde{D}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i+1,j,K_{u-2}}^{n+1} + \\ &+ J_{y_{i,j,K_{u-1}}}^n \tilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j,K_{u-1}}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,K_{u-1}}}^n \tilde{D}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j+1,K_{u-1}}^{n+1} + \\ &+ J_{y_{i,j,K_{u-2}}}^n \tilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j,K_{u-2}}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,K_{u-2}}}^n \tilde{D}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j+1,K_{u-2}}^{n+1} \left. \right], \quad (15) \end{aligned}$$

где для краткости введены обозначения:

$$S_{x_{i,j,k}}^n = \frac{D_{i-\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i,j,k}}^n)^2}{16\Delta\sigma^2}; \quad S_{y_{i,j,k}}^n = \frac{D_{i,j-\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j,k}}^n)^2}{16\Delta\sigma^2}.$$

Аналогично составляются уравнения для q со слоя $k = 2$ нижней σ -подобласти. Такой подход приводит к необходимости рассмотрения q с „фигтивных“ слоёв $k = K_u$ верхней и $k = 1$ нижней подобластей, однако позволяет избежать рассмотрения слоёв $k = K_u + 1$ верхней и $k = 0$ нижней подобластей. Получившуюся незамкнутую систему уравнений необходимо дополнить условиями "склейки" на поверхности раздела. Одним из этих условий является условие непрерывности q :

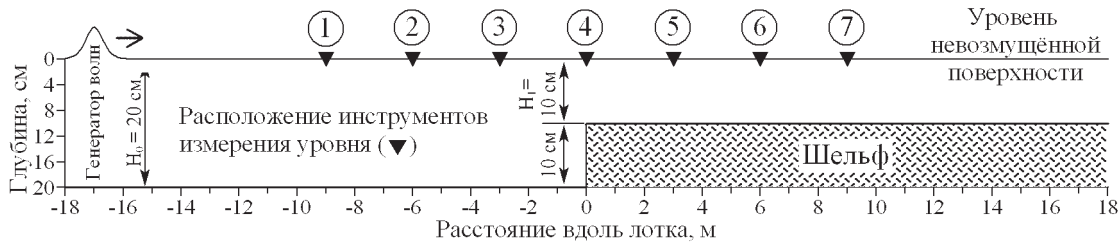


Рис. 3. Схема эксперимента работы [6]

$$\frac{1}{2} (q_{u,i,j,K_u-1}^{n+1} + q_{u,i,j,K_u}^{n+1}) = \frac{1}{2} (q_{l,i,j,1}^{n+1} + q_{l,i,j,2}^{n+1}). \quad (16)$$

Второе условие заключается в том, что поправка вертикальной компоненты скорости W на поверхности раздела, вычисляемая по формуле (14), должна приводить к равным значениям в верхней и нижней подобластях. Принимая во внимание условие равенства вертикальных компонент скорости $\widehat{W}_{u,i,j,K_u}^{n+1} = \widehat{W}_{l,i,j,2}^{n+1}$ на поверхности раздела после осуществления гидростатического этапа расчёта, второе условие склейки выражается в виде

$$\frac{q_{u,i,j,K_u-1}^{n+1} - q_{u,i,j,K_u}^{n+1}}{D_{u,i,j}^n \Delta \sigma_u} = \frac{q_{l,i,j,1}^{n+1} - q_{l,i,j,2}^{n+1}}{D_{l,i,j}^n \Delta \sigma_l}. \quad (17)$$

Условия (16) и (17) можно исключить из системы уравнений для q явным образом, однако алгоритмически более удобно решать систему уравнений с дополнительными неизвестными q_{u,i,j,K_u} и $q_{l,i,j,1}$, поскольку последние входят в уравнения для q со слоёв $k = K_u - 2$ верхней и $k = 3$ нижней σ -подобластей. Кроме того, неизвестные q со слоя $k = K_u$ могут входить в "придонное" уравнение верхней подобласти, когда столб воды описывается одинарной σ -координатой, и исключить их явным образом из системы уравнений не удаётся [8].

3. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ

3.1. Накат солитона на шельф с уступом

Односигменные негидростатические модели [8, 10, 11, 13] применимы для моделирования распространения поверхностных волн над гладким дном с относительно малыми уклонами, такими как 1:10, в экспериментах [4, 24], однако малоприменимы в случаях больших градиентов дна, как в задаче о накате солитона на шельф со ступенькой [5, 6, 13, 20].

Суть лабораторного исследования [6] заключается в анализе трансформации уединённой волны при её накате на искусственный шельф прямоугольной формы, погруженный в гидравлический лоток, как показано на рис. 3. Авторы рассмотрели 80 различных конфигураций эксперимента, главными в которых были отношения A/H_0 и H_1/H_0 – высоты солитона A и глубины шельфа H_1 к глубине в левой части лотка H_0 при невозмущённом уровне поверхности. Было исследовано укрупнение первичной волны, измерены вторичная и третичная волны, образующиеся в результате расщепления солитона (более мелкие волны не поддавались измерению вследствие малости их амплитуд), а также отражённая волна, распространяющаяся в противоположную от уступа шельфа сторону. Вследствие ограниченной длины лотка и технических характеристик генератора волн эксперименты [6] были продублированы для измерения прямых и отражённых волн. Изначальный дизайн генератора волн подразумевал его использование только для создания синусоидальных волн. Поэтому он был неспособен порождать уединённую волну, форма которой соответствовала бы теоретической форме солитона в идеальной жидкости, и приводил к порождению „хвоста“ волн значительной амплитуды. С целью его устранения в положении ① гидравлического лотка была установлена заслонка, которая быстро опускалась сразу после прохождения первичной волны, так что последующие волны отсекались. По утверждению [6] сам процесс опускания заслонки порождал намного меньшие возмущения уровня.

Предложенная в настоящей работе модель наиболее подходит для изучения структуры потока в случаях необрушающихся волн, исследованных в [6]. В качестве тестовой задачи был выбран эксперимент со следующими параметрами: глубина в левой части лотка $H_0 = 20$ см, толщина слоя воды над шельфом $H_1 = 10$ см, высота солитона в контрольном положении ③ (см. рис. 3) $A = 3.65$ см. В качестве граничных условий для численной мо-

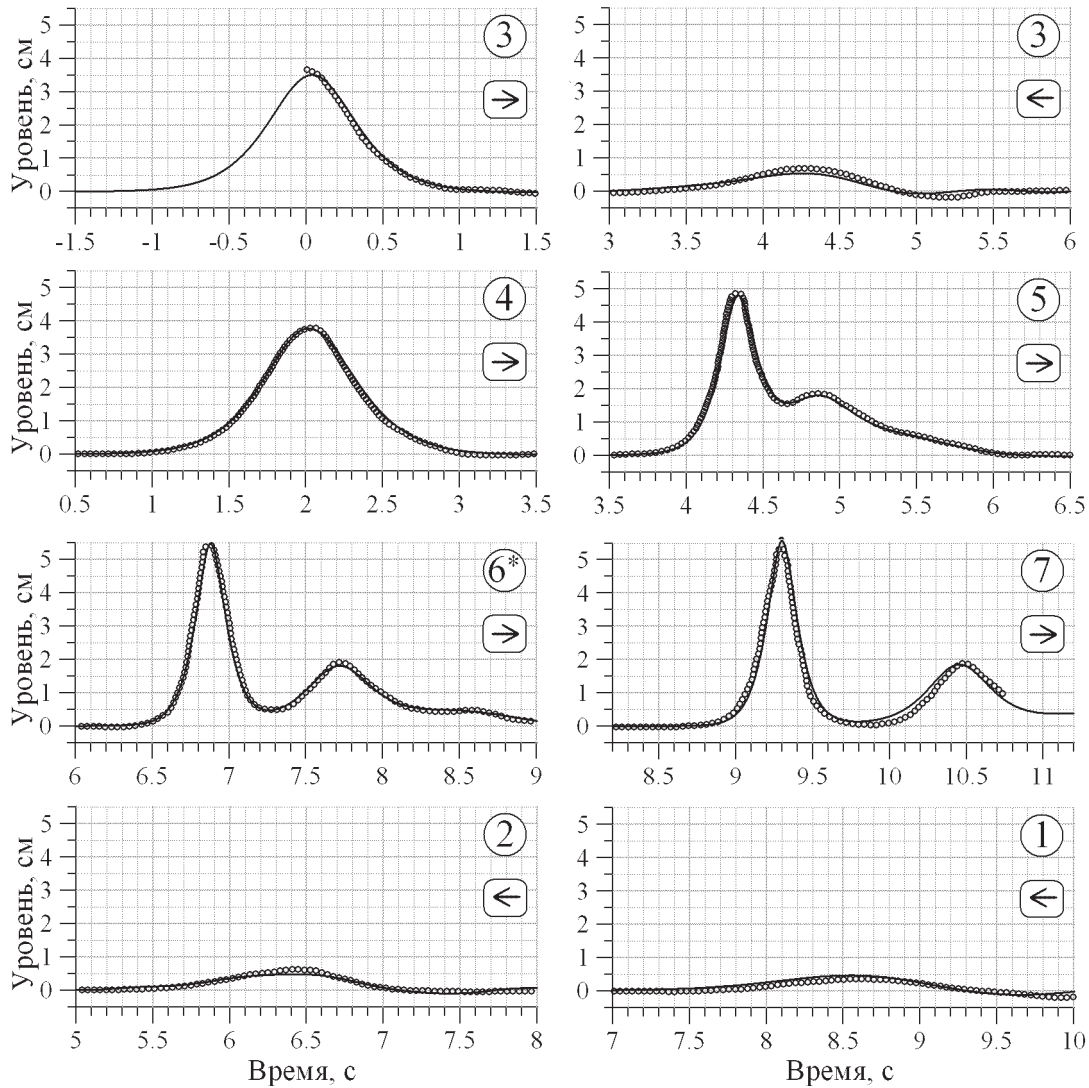


Рис. 4. Сравнение рассчитанного и измеренного уровней поверхности: — модель, $\circ \circ \circ$ — измерения. Направление движения волны указано стрелками: \rightarrow — набегающая волна, \leftarrow — отражённая волна. В положении ⑥ рассчитанный уровень опережал измеренный на 0.12 с (на рисунке фазы согласованы)

дели задавались уровень поверхности и компоненты скорости, описывающие движение солитона в идеальной жидкости в водоёме постоянной глубины H_0 и бесконечной длины, приведённые в [20]. Учитывая, что на дне $z = -H_0$, это условие имеет вид:

$$\eta = A \cdot \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3A}{4H_0}} \frac{\chi}{H_0} \right],$$

$$u = \eta \sqrt{\frac{g}{H_0}} \left[1 - \frac{\eta}{4H_0} + \frac{H_0^2}{3\eta} \left(1 - \frac{3(z+H_0)^2}{2H_0^2} \right) \frac{d^2\eta}{d\chi^2} \right],$$

$$w = -(z+H_0) \sqrt{\frac{g}{H_0}} \left[\frac{2H_0 - \eta}{2H_0} \frac{d\eta}{d\chi} + \frac{2H_0^2 - (z+H_0)^2}{6} \frac{d^3\eta}{d\chi^3} \right],$$

$$\text{где } \chi = -ct; \quad c = \sqrt{g(H_0 + A)}. \quad (18)$$

Чтобы одновременно исследовать прямую и отражённую волны, в численном эксперименте граничные условия задавались на расстоянии 12 м от уступа. Поскольку как физическая (обусловленная вязкостью и придонным трением), так и численная (обусловленная погрешностью численных схем) диссипации энергии приводят к несколько меньшей амплитуде волны в контрольном положении ③ по сравнению с задаваемой на открытой границе, то последняя полагалась на 4.1% больше, чем измеренная в положении ③. Разрешение численной сетки было 1 см по горизонтали; столб воды описывался 20-ью равноудалён-

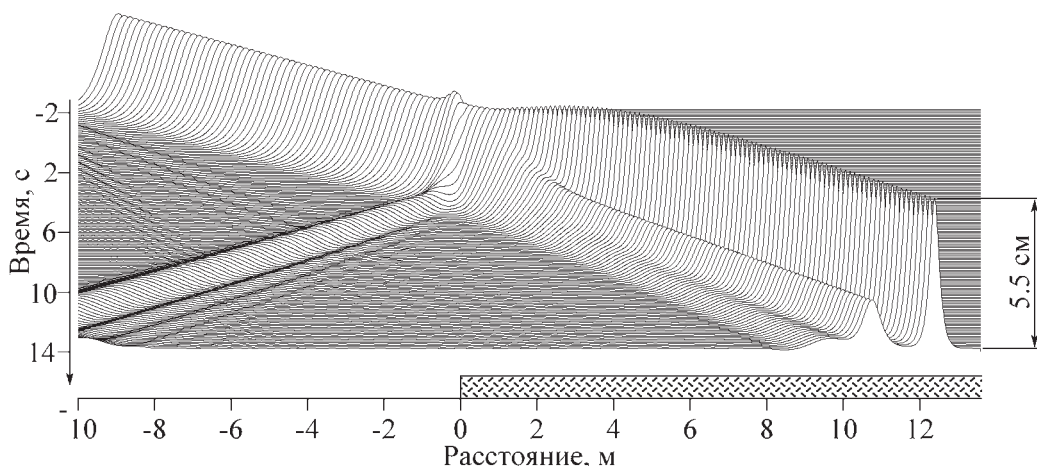


Рис. 5. Временная развёртка уровня поверхности в лотке

Табл. 1. Максимальный рассчитанный уровень (см)

$z_0 \times 30\text{мм}$	Положение относительно уступа						
	① -9 м	② -6 м	③ -3 м	④ 0 м	⑤ 3 м	⑥ 6 м	⑦ 9 м
Без трения	3.58	3.56	3.53	3.83	4.99	5.84	6.15
0.25	3.57	3.53	3.48	3.76	4.79	5.49	5.63
0.5	3.56	3.52	3.47	3.74	4.74	5.40	5.49
1.0	3.56	3.50	3.45	3.71	4.65	5.26	5.29
2.0	3.55	3.48	3.41	3.66	4.53	5.05	5.01
4.0	3.54	3.45	3.36	3.59	4.35	4.75	4.61
Измерения	-	-	3.67	3.91	4.87	5.43	5.32

ными слоями в каждой из σ -подобластей, разделённых горизонтальной плоскостью $H_c = 10$ см. Начало отсчёта по времени $t = 0$ полагалось в момент прохождения гребня солитона через положение ③.

Максимальный рассчитанный уровень поверхности в положениях ① – ⑦ в зависимости от шероховатости дна z_0 приведён в табл. 1 в сравнении с максимальным уровнем, измеренным в этих положениях. Результаты визуального сравнения с экспериментальными данными показаны на рис. 4. Как видно, форма волны достаточно хорошо была воспроизведена моделью на всех станциях. В целом, в процессе калибровки модели наилучшие результаты были достигнуты при шероховатости дна $z_0 = 0.5/30$ мм. Высота первичной волны и, как следствие, фазовая скорость её распространения оказались весьма чувствительными к z_0 , в особенности в положениях ⑤ – ⑦. Как видно из табл. 1 полное отсутствие придонного трения приводит

к заметному завышению высоты первичной волны (16% в положении ⑦) по сравнению с экспериментальными данными, что согласуется с результатами [6, 20].

В работах [6, 20] в положениях ⑥ и ⑦ также наблюдалось существенное фазовое отличие между результатами моделирования и данными эксперимента. В [6] такое расхождение было объяснено погрешностями численной модели, а в [20] было высказано предположение об ошибке измерений, поскольку две различные модели показали схожие результаты. В настоящей работе посредством калибровки z_0 было достигнуто хорошее согласование как формы, так и фазы волны на всех станциях, за исключением ⑥, если глубина H_1 полагалась равной 9.8 см вместо 10 см. Рассогласованность фаз в положении ⑥ составила приблизительно 0.12 с, и устранить её не удалось. По всей видимости, причиной этого является погрешность измерений, как было предположено в [20].

Развёртка профиля уровня поверхности η во времени показана на рис. 5. В частности, виден процесс расщепления солитона, образование вторичной, третичной и отражённой волн.

Исследование наката солитона на шельф с уступом проводилось и во многих других работах. В частности, в [5] приведены приближённые аналитические выражения для числа N солитонов в цуге, следующим за первичной волной, выражения для их амплитуд $A_{t,n}$ и амплитуда отражённой волны A_r как функции отношения H_1/H_0 (см. рис. 3) и начальной амплитуды солитона A :

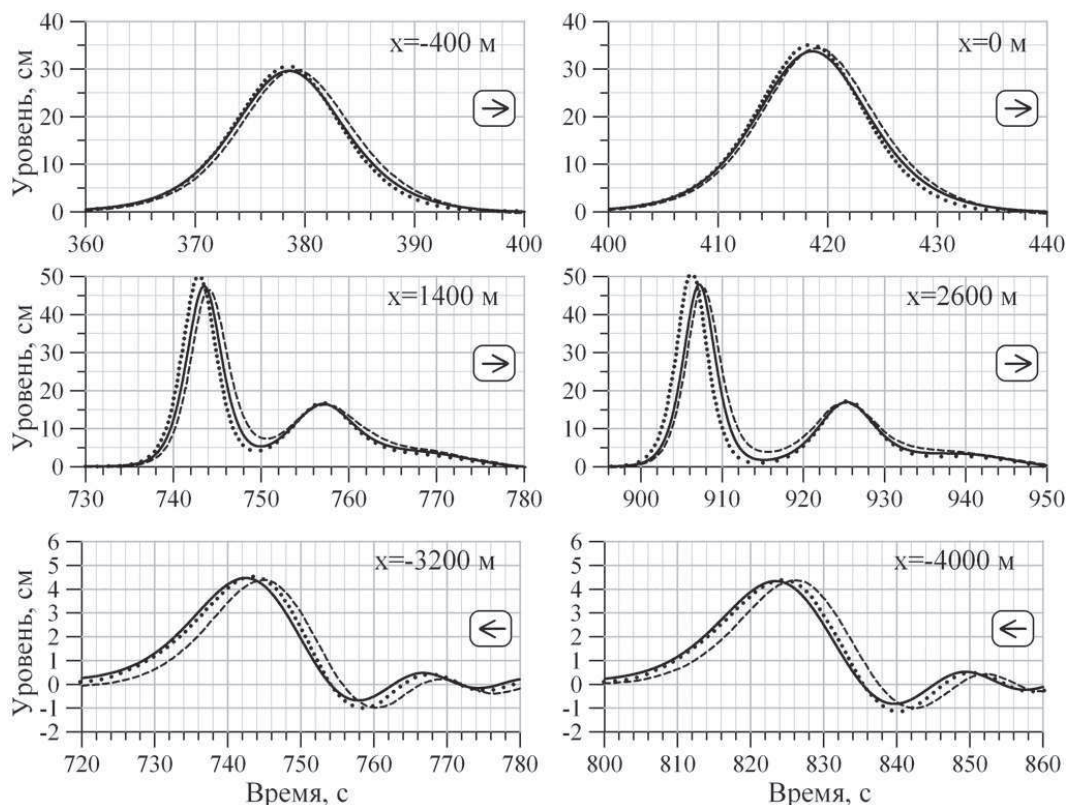


Рис. 6. Сравнение моделей: — двухсигменная модель, ····· CADMAS [5], - - - FLOW-3D [5]. Направление движения волны указано стрелками: → – набегающая волна, ← – отражённая волна

$$N = E \left(\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{16}{1 + \sqrt{H_1/H_0}} \frac{H_0^2}{H_1^2}} - 1 \right] \right),$$

$$\frac{A_{t,n}}{A} = \frac{1}{4} \frac{H_1^2}{H_0^2} \left[\sqrt{1 + \frac{16}{1 + \sqrt{H_1/H_0}} \frac{H_0^2}{H_1^2}} - (1 + 2n) \right]^2,$$

$$\frac{A_r}{A} = \frac{1}{4} \left[\sqrt{1 + 8 \frac{1 - \sqrt{H_1/H_0}}{1 + \sqrt{H_1/H_0}}} - 1 \right]^2, \quad (19)$$

где $E(\zeta)$ – целая часть от ζ и $n = 0, \dots, N - 1$. Это решение следует как результат склейки асимптотических решений на двух этапах: (i) далеко от уступа предполагалась справедливость уравнения Кортевега-де Вриза (Korteweg–de Vries), имеющего аналитическое решение; (ii) вблизи уступа предполагалась линейная теория мелкой воды. Применение последней приводит к изменению амплитуды набегающей волны, но не её формы. Как следствие, солитон становится неустойчивым и распадается на цуг солитонов, динамика которого описывается уравнением Кортевега-де Вриза. Движение отражённой волны описывается индивидуаль-

Табл. 2. Амплитуда первичного, вторичного и отражённого солитонов (см) по разным оценкам

Оценка согласно	Перв.	Втор.	Отраж.
Измерения	5.43	1.92	0.36
По (19), $H_1=10$ см	6.18	2.34	0.76
По (19), $H_1=9.8$ см	6.25	2.44	0.80
Модель, без трения	6.15	1.93	0.47
Модель, $z_0 = 0.5$ мм	5.49	1.83	0.46

ным образом также путём решения этого же уравнения.

В таблице 2 приведены сравнения оценок амплитуд первичного и вторичного солитонов и отражённой волны согласно измерениям [6], формулам (19) и модели с учётом придонного трения и без него (вязкость присутствовала в обоих случаях). Как видно, оценки по (19) являются завышенными, что и следовало ожидать ввиду отсутствия учёта вязкости и придонного трения.

В [5] также приведены результаты сравнения аналитических решений с двумя численными моделями Буссинеска (DHI MIKE BV и EB_FEM),

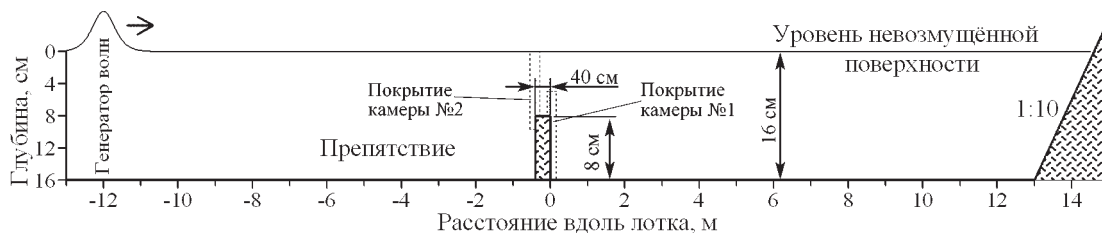


Рис. 7. Схема эксперимента работы [3]

и двумя численными моделями, основанными на уравнениях Навье–Стокса, осреднённых по Рейнольдсу (CADMAS и FLOW-3D) для задачи о накате солитона на уступ со следующими параметрами: $H_0=10$ м, $H_1=5$ м, $A=30$ см. Общая длина расчётной области составляла 10000 м. На рис. 6 показано сравнение результатов применения двухсигментной модели с CADMAS и FLOW-3D. Уступ полагался при $x = 0$ м; граничные условия задавались при $x = -5000$ м; придонное трение и турбулентная вязкость полагались равными нулю; горизонтальное разрешение составляло 1 м; вертикальное разрешение – по 20 равноудалённых σ -слоёв для каждой из подобластей. Вследствие большей глубины придонное трение и вязкость оказывают меньшее влияние по сравнению с экспериментами [6], что приводит к хорошему совпадению результатов различных моделей.

3.2. Образование вихрей вблизи уступов погруженного препятствия

В большинстве работ, посвящённых моделированию или измерению поверхностных волн, рассматриваются задачи только лишь на уровне поверхности, например в [4, 6, 20, 24, 25], в то время как изучению трёхмерных полей скорости и давления уделяется относительно мало внимания. Одними из работ, посвящённых экспериментальному детальному изучению структуры потока при прохождении волны над погруженным препятствием, являются [3, 26]. Интересом последних было исследование вихрей, которые образуются вблизи уступов прямоугольного препятствия при прохождении волн над ним, с помощью метода PIV (Particle Image Velocimetry).

Один из экспериментов [3], суть которого изложена ниже, был выбран в качестве второй задачи, решённой с помощью предложенной модели. В гидравлический лоток длиной 30 м было установлено препятствие прямоугольной формы длиной 40 см и высотой 8 см, так что толщина слоя воды над ним составляла 8 см при невозмущён-

ном уровне поверхности, как показано на рис. 7. За начало отсчёта принималась координата $x = 0$ у правого уступа препятствия. В левой части лотка при $x=-12.6$ м был установлен генератор волн, порождающий солитоны высотой 2.88 см. В правом конце лотка был установлен поглотитель волн с целью предотвращения их отражения. Снимки полей скорости осуществлялись с помощью двух камер с разрешением 1024×1024 пикселя и частотой 30 Гц. Камера №1 покрывала зону 12.8×12.8 см у правого (подветренного) уступа, а камера №2 – зону 10.5×10.5 см у левого (наветренного) уступа препятствия. Векторы скорости рассчитывались как среднее в квадратах 64×64 пикселя, с 50%-ым нахлестыванием друг на друга. По этой причине эксперимент не мог показать векторы скорости ближе, чем 4 мм от твёрдых стенок, зато погрешность измерений скорости составила до 0.6 см/с по оценкам [3].

Граничные условия для численной модели задавались, как и в предыдущей тестовой задаче, – по формулам (18). Было проведено два численных эксперимента с разными разрешениями численной сетки. В первом из них горизонтальное разрешение составляло 5 мм, а вертикальное – по 20 равноудалённых σ -слоёв для каждой из σ -подобластей, которые разделялись плоскостью $H_c = 8$ см. Такое разрешение оказалось достаточным для того, чтобы численная модель хорошо воспроизвела вихрь, образующийся позади препятствия, как показано на рис. 8.

Однако такое разрешение не позволило аккуратно воспроизвести поле скорости над препятствием вблизи его переднего уступа. Согласно экспериментальным данным, накат волны приводил к порождению вихря сплюснутой эллипсоидной формы с относительно большой скоростью оттока у дна порядка 30 см/с в сторону, противоположную направлению распространения первичной волны, и такой же по величине скорости в сторону, совпадающую с направлением движения волны, на расстоянии приблизительно 2.5–3 см от дна, как показано на рис. 9. Таким образом, кратковременный

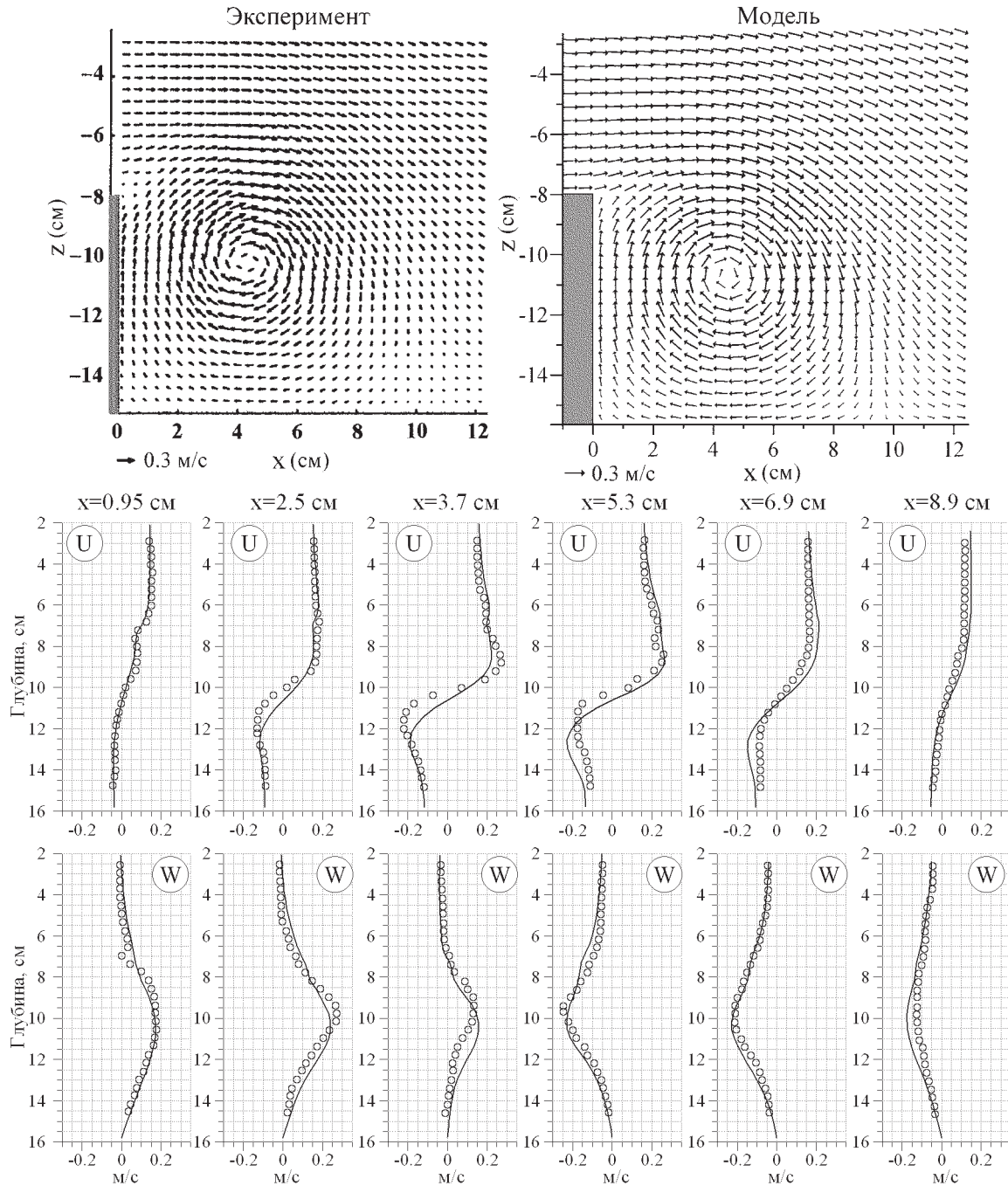


Рис. 8. Образование вихря за препятствием:
 — — модель, ооо — измерения

перепад скорости составлял до 60 см/с на расстоянии менее 3 см. Поэтому для достижения удовлетворительной точности численной модели разрешение верхней σ -подобласти было увеличено до 40 слоёв, в то время как разрешение нижней σ -подобласти оставалось 20 слоёв. Горизонтальное разрешение также было увеличено до 3 мм. Это

привело к значительно лучшим результатам сравнения результатов численного моделирования и экспериментальных данных, показанного на рис. 9.

В процессе калибровки модели установлено, что шероховатость дна оказывает значительное влияние на вихрь, образующийся над передним

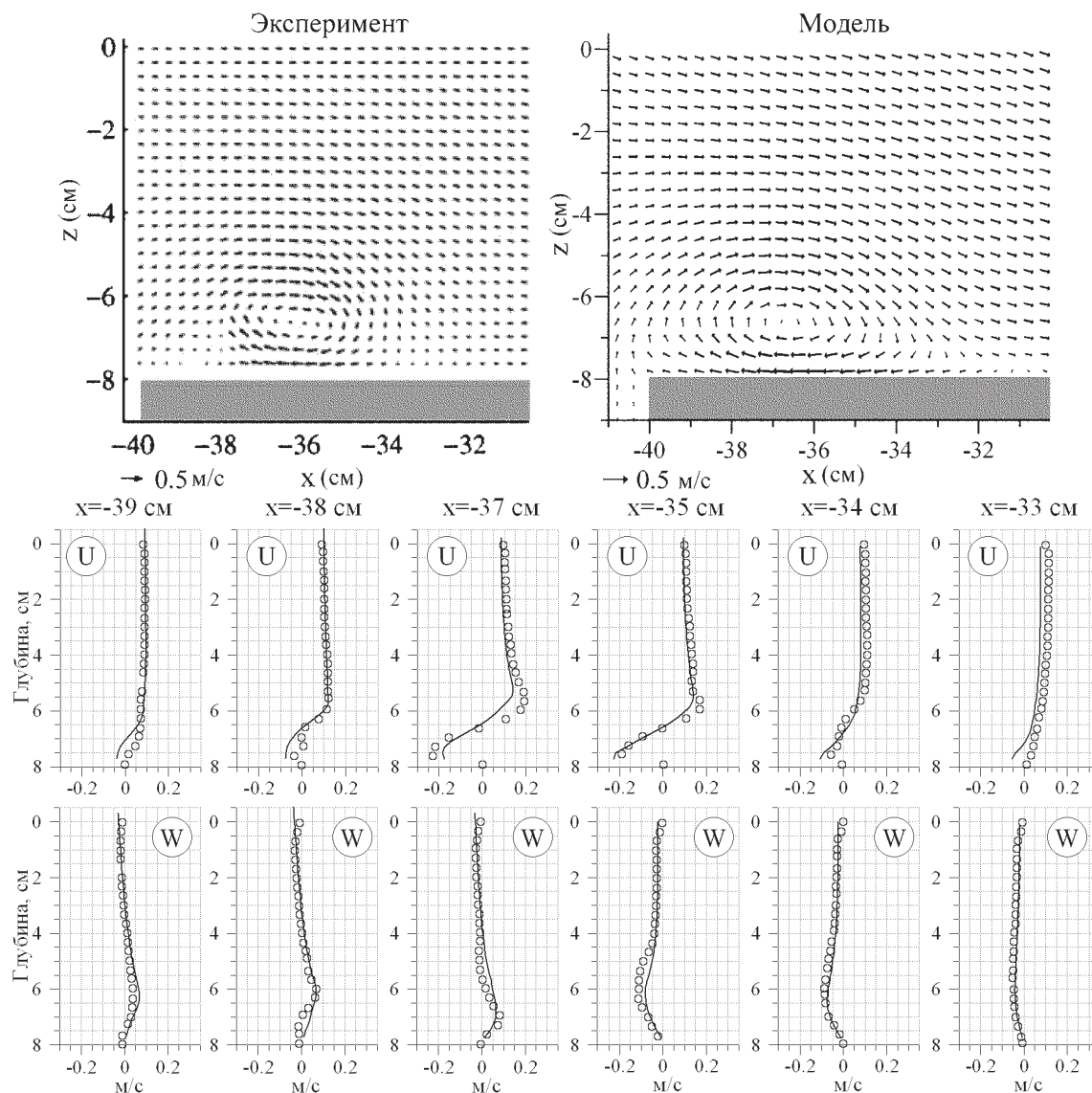


Рис. 9. Образование вихря над передним уступом препятствия:
 — — модель, $\circ \circ \circ$ — измерения

уступом препятствия, однако оказывает относительно малое влияние на вихрь позади препятствия. Шероховатость дна $z_0 = 0.5/30$ мм снова привела к наилучшим результатам сравнения, как в первой рассмотренной задаче про накат волны на уступ шельфа (см. п. 3.1). Меньшие значения z_0 приводили к большим скоростям у дна (порядка 50 см/с при полном отсутствии придонного трения), в то время как большие значения z_0 приводили к уменьшению интенсивности этого вихря, вплоть до его полного вырождения. Использование ламинарной вязкости также привело к существенному завышению рассчитанных величин скорости, тем самым подтверждая, что режим потока

вблизи препятствия является турбулентным с подсеточным масштабом вихрей порядка нескольких миллиметров.

Интересно отметить то, что сплюснутая форма вихря у переднего уступа, наблюдавшегося в эксперименте, была воспроизведена предложенной двухсигменной моделью лучше, чем численной моделью [3]. Последняя показала образование вихрей приблизительно круглой формы как за препятствием, так и над его передним уступом.

Также следует отметить, что большие перепады скорости предположительно приводят к порождению вихрей меньшего масштаба, что объясняет малые флуктуации измеренных профилей ско-

рости, заметные на рис. 8 и 9. Однако для их аккуратного экспериментального измерения и воспроизведения численной моделью понадобилось бы на порядок более высокое разрешение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена численная модель расчёта негидростатических течений со свободной поверхностью в двойной σ -системе координат и её применение к моделированию распространения поверхностных волн над уступами. Сравнение результатов моделирования наката солитона на искусственный шельф прямоугольной формы с лабораторными измерениями показало, что предложенная модель достаточно хорошо воспроизводит расщепление первичного солитона и образование вторичной, третичной и отражённых волн. Несмотря на неизбежную численную вязкость, модель также показала способность к относительно длительному сохранению формы солитона при его распространении в водоёмах с плоским дном, довольно аккуратно совпадающей с аналитической формой солитона в идеальной жидкости и результатами других численных моделей.

Разработанная модель также была применена к изучению структуры потока вблизи уступов препятствия прямоугольной формы, погруженного в гидравлический лоток, при прохождении волны над ним. Модель хорошо воспроизвела вихри, порождённые волной, которые наблюдались в лабораторных экспериментах. Сплюснутая форма вихря у наветренного уступа препятствия была воспроизведена предложенной двухсигменной моделью лучше по сравнению с предыдущими работами.

В процессе калибрования модели установлено, что в обоих рассмотренных задачах шероховатость дна и вязкость оказывали значительное влияние на скорость потока, в особенности вблизи наветренных уступов над их мелководной стороной, что, в свою очередь, оказывало заметное влияние на трансформацию формы волн, амплитуду и, как следствие, фазовую скорость. Значение шероховатости $z_0 = 0.5/30$ мм в целом привело к наиболее хорошим совпадениям результатов моделирования с экспериментальными данными как в первой, так и во второй задачах.

Одним из направлений дальнейших исследований является применение разработанной модели к изучению стратифицированных течений и внутренних волн, для которых использование неподвижной во времени нижней σ -подобласти может оказаться предпочтительным по сравнению с оди-

нарной σ -системой. Также предметом дальнейших исследований и последующего усовершенствования является применение более подходящей модели турбулентности.

Автор выражает искреннюю благодарность докт. физ-мат. наук профессору В.С. Мадеричу за ценные замечания и предложения, которые были учтены при подготовке этой публикации.

1. *Филлиппс О.М.* Динамика верхнего слоя океана.– М.: Мир, 1969.– 268 с.
2. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. В 2-х томах.– М.: Мир, 1984.– 398 (Т. 1), 416 (Т. 2) с.
3. *Chang K.-A., Hsu T.-J., Liu P.L.-F.* Vortex generation and evolution in water waves propagating over a submerged rectangular obstacle. Part I. Solitary waves. // *Coastal Engineering.*– 2001.– **44(1)**.– P. 13–36.
4. *Beji S., Battjes J.A.* Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar. // *Coastal Engineering.*– 1994.– **23**.– P. 1–16.
5. *Pelinovsky E., Choi B.H., Talipova T., Woo S.B., Kim D.C.* Solitary wave transformation on the underwater step: Asymptotic theory and numerical experiments. // *Applied Mathematics and Computation.*– 2010.– **217**.– P. 1704–1718.
6. *Seabra-Santos F.J., Renouard D.P., Temperville A.M.* Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle. // *J. Fluid Mech.*– 1987.– **176**.– P. 117–134.
7. *Griffies S.M., Böning C., Bryan F.O., Chassignet E.P., Gerdes R., Hasumi H., Hirst A., Treguier A.-M., Webb D.* Developments in ocean climate modelling. // *Ocean Dynamics.*– 2000.– **2**.– P. 123–192.
8. *Нестеров А.* Полуявный метод расчёта негидростатических течений со свободной поверхностью в σ -системе координат // *Прикл. гидромеханика.*– 2012.– **14(2)**.– С. 41–52.
9. *Casulli V.* A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows. // *Int. J. for numerical methods in fluids.*– 1999.– **30**.– P. 425–440.
10. *Канарская Ю., Мадерич В.* Численная негидростатическая модель стратифицированных течений // *Прикл. гидромеханика.*– 2002.– **3(76)**.– С. 12–21.
11. *Kanarska Y., Maderich V.* A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows. // *Ocean Dynamics.*– 2003.– **53**.– P. 176–185.
12. *Fringer O.-B., Gerritsen M., Street R.L.* An unstructured-grid, finite-volume, nonhydrostatic, parallel coastal ocean simulator. // *Ocean Modelling.*– 2006.– **14**.– P. 139–173.
13. *Lin P., Li C.W.* A σ -coordinate three-dimensional numerical model for surface wave propagation. // *Int. J. for numerical methods in fluids.*– 2002.– **38**.– P. 1045–1068.
14. *Namin M.M., Lin B., Falconer R.A.* An implicit numerical algorithm for solving non-hydrostatic free-surface flow problems. // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*– 2002.– **35**.– P. 341–356.
15. *Stansby P.K., Zhou J.G.* Shallow-water flow solver with non-hydrostatic pressure: 2D vertical plane problems. // *Int. J. for Numer. Meth. in Fluids.*– 1998.– **28**.– P. 541–563.

16. Кошебуцкий В., Мадерич В., Нестеров А., Хелинг Р. Моделирование распространения тепла во внутренних водах и прибрежных областях морей // Прикл. гидромеханика.– 2004.– **6(78)**.– С. 34–44.
17. Нестеров А., Мадерич В. Моделирование гидродинамики и процессов переноса в Днепро-Бугском эстуарии // Морской гидрофиз. журнал.– 2008.– **6**.– С. 66–77.
18. Beckers J.-M. Application of a 3D model to the Western Mediterranean. // J. of Marine Systems.– 1991.– **1**.– P. 315–332.
19. DHI Water and Environment. MIKE3 Flow Model: Hydrodynamic Module. Scientific Documentation.– Hørsholm, Denmark: Danish Hydraulic Institute (www.dhigroup.com), 2011.– 50 p.
20. Liu P.L.-F., and Cheng Y. A numerical study of the evolution of a solitary wave over a shelf. // Physics of Fluids.– 2001.– **13(6)**.– P. 1660–1667.
21. Blumberg A.F., Mellor G.L. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation. // Three-Dimensional Coastal Ocean Models.– 1987, N. Heaps (Ed.), Washington D.C., Am. Geoph. Union.– P. 1–16.
22. Smagorinsky J. General circulation experiments with primitive equations. 1. The basic experiment. // Monthly Weather Rev.– 1963.– **91**.– P. 99–164.
23. Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J.M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H. Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2-nd Ed.– SIAM: siam.org/books, 2006.– 105 p.
24. Beji S., Battjes J.A. Experimental investigation of wave propagation over a bar. // Coastal Engineering.– 1993.– **19**.– P. 151–162.
25. Lin P. A numerical study of solitary wave interaction with rectangular obstacles. // Coastal Engineering.– 2004.– **51**.– P. 35–51.
26. Chang K.-A., Hsu T.-J., Liu P.L.-F. Vortex generation and evolution in water waves propagating over a submerged rectangular obstacle. Part II. Cnoidal waves. // Coastal Engineering.– 2005.– **52(3)**.– P. 257–283.