

УДК 534.1:629.764.7

## О ВНУТРЕННИХ РЕЗОНАНСАХ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В КОНИЧЕСКИХ БАКАХ

И. А. ЛУКОВСКИЙ, А. В. СОЛОДУН, А. Н. ТИМОХА

Институт математики НАН Украины, Киев  
01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3  
alexander.timokha@ntnu.ru

Получен 21.07.2012

Используя условие возникновения внутренних резонансов для установившихся колебаний жидкости в конических баках, которые возникают при резонансном возбуждении первой собственной частоты, в работе определяется набор геометрических входных параметров (угол полураствора и глубина), для которых за счет внутренних резонансов может возбуждаться ряд высших собственных форм. Сформулированы рекомендации относительно дальнейшего развития нелинейных модальных методов для баков указанной геометрии.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** конический бак, колебания жидкости, резонансное возбуждение

Використовуючи умову виникнення внутрішніх резонансів для усталених рухів рідини в конічних баках, що виникають при резонансному збудженні першої власної частоти, в роботі визначається набір геометричних вхідних параметрів (кут розчину та глибина), для яких за рахунок внутрішніх резонансів може збудюватись ряд вищих власних форм. Сформульовано рекомендації щодо подальшого розвитку нелінійних модальних методів для баків вказаної геометрії.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** конічний бак, коливання рідини, резонансне збудження

Employing the secondary (internal) resonance condition for steady-state sloshing in a conical tank that appears due to resonant excitation of the lowest natural frequency, the paper establishes a set of input geometric parameters (semi-apex angle and liquid depth) for which the secondary resonance phenomenon can lead to amplification of higher modes. A series of recommendation regarding the forthcoming development of nonlinear modal methods for the indicated tank shape are formulated.

**KEY WORDS:** conical tank, liquid oscillation, resonant excitation

### ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих работах авторов [4, 10] развивались нелинейные асимптотические модальные методы, которые сводят задачу описания гидродинамического отклика жидкости в конических баках к построению и анализу малоразмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (модальных систем), относительно обобщенных координат, характеризующих возмущенное движение жидкости. Практическая важность такого рода исследований связывается, прежде всего, с задачей описания силового взаимодействия между жидкостью и мегалитровыми водонапорными башнями с коническими баками, которое происходит вследствие ветровых нагрузок или сейсмических воздействий. Прикладные инженерные аспекты этой проблемы, а также типичные геометрические и физические параметры можно найти в работах [6, 13].

Общая идеология нелинейных модальных методов, а также история их возникновения детально изложена в монографиях [1, 2]. Достаточно

полный обзор этих методов можно также найти в недавних статьях [4, 11, 12], где основное внимание уделено *асимптотике третьего порядка* Нариманова–Моисеева, которая получила наиболее широкое распространение при практической реализации нелинейных модальных методов. Как проиллюстрировано в [12] на случае кругового вертикального цилиндрического бака, для осесимметричных сосудов такая асимптотика неизбежно приводит к нелинейным модальным системам, связывающим бесконечное число обобщенных координат второго и третьего порядка малости. Это увеличивает вероятность возникновения комбинаторных внутренних резонансов в системе, когда порождаемые квадратичными и кубическими нелинейными членами, возникают супергармоники, близкие к одной из собственных частот.

Феномену внутренних резонансов в задачах об установившихся резонансных колебаниях жидкости посвящена обширная литература. Детальный её обзор можно найти в главах 8 и 9 книги [7]. На возможность возникновения внутренних резонансов для сосудов кругового сечения, когда собственные формы колебания жидкости (в цилиндриче-

ской системе координат  $(r, \theta, x)$  можно представить в виде

$$\phi_{m,n}(r, x, \theta) = f_{m,n}(r, x) \frac{\sin}{\cos}(m\theta), \quad (1)$$

было обращено внимание в работах [5,14]. В этих работах, в частности, было установлено, что для вертикального кругового цилиндрического бака критическими безразмерными глубинами (отношениями глубина–радиус бака), когда возникают внутренние резонансы при резонансном возбуждении первой основной частоты, являются 0.831 (для двух собственных форм, отвечающих  $\phi_{2,2}$ ), 0.279 (для  $\phi_{3,2}$ ), 0.455 для  $(\phi_{3,3})$  и 0.748 (для  $\phi_{3,4}$ ). Как видно, это практически реализуемые глубины. Это обозначает, что при построении нелинейных модальных систем нельзя пренебрегать обобщёнными координатами, отвечающими собственным формам  $\phi_{2,2}$ ,  $\phi_{3,2}$ ,  $\phi_{3,3}$  и  $\phi_{3,4}$  при переходе от бесконечномерной модальной системы Нариманова–Моисеева к ее конечномерному приближению. Более того, для глубин, близких к указанным значениям, результаты, полученные с помощью нелинейной асимптотической модальной системы типа Нариманова–Моисеева, должны быть подкреплены результатами экспериментов, поскольку сама асимптотика Нариманова–Моисеева предполагает, что гидродинамическая система не претерпевает внутренних резонансов.

Несмотря на то, что сам вопрос возникновения внутренних резонансов для конических баков поднимался авторами в работе [10], ответа на вопрос, при каких значениях глубин заполнения и углов раствора такие резонансы возможны, не получил должного ответа. На него предполагается ответить в данной работе путем анализа соотношений между собственными частотами колебаний жидкости. Высокоточное определение таких частот стало возможным благодаря развитию численно-аналитических методов решения соответствующей спектральной краевой задачи [3, 8, 9]. Базируясь на результатах анализа, мы укажем критические значения глубин заполнения усеченного конического бака для трёх типичных углов раствора и, используя эту информацию, укажем, какие именно обобщенные координаты, в дополнении к семи из работы [4], должны быть обязательно использованы для учёта влияния вторичных резонансов.

## 1. ТЕОРИЯ

Рассмотрим волновые движения идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей аб-

солютно жёсткий конический бак с углом полураствора  $\theta_0$ . Гидростатическое положение жидкости под действием силы тяжести совпадает с областью  $Q_0$ , изображенной на рис. 1. Вектор сил гравитации  $\vec{g}$  направлен вниз вдоль оси конуса. Смачиваемые боковые стенки сосуда обозначены через  $S_1$ , дно бака – через  $S_2$ , невозмущённая (гидростатическая) свободная поверхность жидкости – через  $\Sigma_0$ . Начало декартовой системы координат  $Oxyz$  размещено в условной вершине конуса  $O$ , причем ось  $Ox$  направлена вертикально вверх.

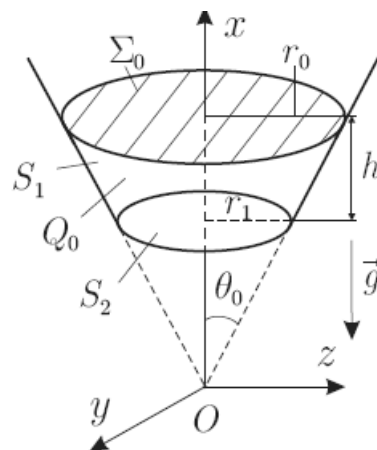


Рис. 1. Схема гидростатического положения жидкости в вертикальных круговых усечённых конических баках

В качестве характерного линейного размера выбран радиус  $r_0$ . Соотношение между радиусом невозмущённой свободной поверхности и основанием усеченного конуса ( $r_1 := r_1/r_0$ ) становится геометрической характеристикой глубины заполнения бака. В частности, предел  $r_1 \rightarrow 1$  влечет за собой  $h \rightarrow 0$ . В то же время, при фиксированном  $r_1$  глубина  $h$  стремится к нулю, если  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ .

Собственные формы колебаний жидкости суть собственные функции спектральной краевой задачи с параметром в краевом условии (см., например, [1,2])

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0, \quad \vec{r} \in Q_0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0, \quad \vec{r} \in S_0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= \varkappa \phi, \quad \vec{r} \in \Sigma_0, \quad \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} dS = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Как было отмечено во введении, данная задача имеет решение вида (1), причём  $\varkappa$ , именуемый частотным параметром, связан с собственной частотой соотношением

$$\varkappa_{m,n} = \sigma_{m,n}^2/g. \quad (3)$$

Целые индексы  $m \geq 0$  связываются с угловым волновым числом, а возрастающий целый индекс  $n \geq 1$  упорядочивает стоячие волны, соответствующие (1), в порядке уменьшения длины волны в радиальном направлении. За исключением осесимметричных собственных форм ( $m = 0$ ), каждой собственной частоте системы  $\sigma_{m,n}$  соответствуют две собственные формы, а полученные нелинейные модальные уравнения допускают ряд упрощений, связанных с тригонометрической угловой компонентой в представлении собственных форм (1).

Асимптотика третьего порядка Нариманова–Моисеева предполагает, что основной, доминантный вклад в динамику жидкости вносят лишь две первые собственные формы колебания жидкости  $\phi_{1,1} \sin \theta$  и  $\phi_{1,1} \cos \theta$ , обладающие одной и той же минимальной собственной частотой  $\sigma_{1,1}$ . Говорят, что эти моды имеют первый порядок малости. Обусловленные тригонометрической угловой компонентой в (1) члены второго порядка малости по отношению к доминантным формам связываются с собственными формами  $\phi_{0,n}$ ,  $\phi_{2,n} \sin 2\theta$  и  $\phi_{2,n} \cos 2\theta$ ,  $n \geq 1$ . Аналогично, собственные формы  $\phi_{1,n} \sin \theta$ ,  $\phi_{1,n} \cos \theta$ ,  $n \geq 2$  и  $\phi_{3,n} \sin 3\theta$ ,  $\phi_{3,n} \cos 3\theta$ ,  $n \geq 1$  характеризуются третьим, высшим для данной асимптотики порядком малости. Асимптотика Нариманова–Моисеева пренебрегает вкладом собственных форм, которые имеют асимптотический порядок больший, чем три. Последнее означает, что вклад собственных форм  $\phi_{m,n} \sin m\theta$ ,  $\phi_{m,n} \cos m\theta$ ,  $m \geq 4$  не учитывается.

Асимптотика Нариманова–Моисеева обязательно требует учёта бесконечного числа собственных форм колебаний. Однако полная нелинейная модальная система, описывающая колебания жидкости в осесимметричных баках, базирующаяся на асимптотике Нариманова–Моисеева и вовлекающая бесконечное число обобщённых координат, соответствующих собственным формам второго и третьего порядка малости, построена лишь недавно и только для вертикального цилиндрического бака [12]. Подобные полные модальные системы отсутствуют для других баков осесимметричной формы.

Базовой задачей, которая исследуется с помощью нелинейных модальных систем, является задача описания установившихся (периодических) режимов движения жидкости в том случае, когда колебания бака совершаются по синусоидальному закону с частотой  $\omega$  и эта частота близка к  $\sigma_{1,1}$ . Для осесимметричных баков простой гармонический анализ резонансных решений показывает, что первые две собственные формы характе-

ризуются доминантным вкладом первой тригонометрической компоненты разложения Фурье периодических (установившихся) решений. Доминантными компонентами для форм второго и третьего порядка будут соответственно  $\cos 2\omega t$ ,  $\sin 2\omega t$  и  $\cos 3\omega t$ ,  $\sin 3\omega t$ . Если  $2\omega$  окажется равной одной из собственных частот, соответствующих формам второго порядка малости, т.е. частотам  $\sigma_{2,i}$  или  $\sigma_{0,i}$ ,  $i \geq 1$ , то может возникнуть так называемый внутренний (вторичный) резонанс второго порядка. Аналогично, внутренний резонанс третьего порядка может возникнуть в случае, когда  $3\omega$  совпадает с одной из собственных частот  $\sigma_{3,i}$ ,  $i \geq 1$  или  $\sigma_{1,i}$ ,  $i \geq 2$ .

Пусть частота возбуждения  $\omega$  близка к первой собственной частоте колебаний жидкости  $\sigma_{1,1}$ , т.е.  $\omega \approx \sigma_{1,1}$ .

Необходимыми условиями внутреннего резонанса второго порядка являются следующие условия:

$$2\omega \approx \sigma_{0,n}, \quad n \geq 1, \quad (4)$$

$$2\omega \approx \sigma_{2,n}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Аналогично, для собственных форм третьего порядка  $\psi_{3,n}$ ,  $n \geq 1$  и  $\psi_{1,n}$ ,  $n \geq 2$ , возникновение внутренних резонансов связывается с соотношениями

$$3\omega \approx \sigma_{3,n}, \quad n \geq 1, \quad (6)$$

$$3\omega \approx \sigma_{1,n}, \quad n \geq 2. \quad (7)$$

Предметом наших исследований будет поиск набора входных параметров, глубины  $h$  (или  $r_1$ ) и углов полураствора  $\theta_0$  конической полости, для которых выполнено одно из соотношений частот (4)–(7) при условии

$$\omega \approx \sigma_{1,1}. \quad (8)$$

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для численного анализа необходимого условия внутреннего резонанса построим функции  $i_{m,n}(\theta_0, h)$ , зависящие от двух входных геометрических параметров:

$$i_{0,n}(\theta_0, h) = \frac{\sigma_{0,n}}{2\sigma_{1,1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa_{0,n}}{2\kappa_{1,1}}}, \quad n \geq 1, \quad (9)$$

$$i_{2,n}(\theta_0, h) = \frac{\sigma_{2,n}}{2\sigma_{1,1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa_{2,n}}{2\kappa_{1,1}}}, \quad n \geq 1, \quad (10)$$

$$i_{3,n}(\theta_0, h) = \frac{\sigma_{3,n}}{3\sigma_{1,1}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{3,n}}{2\kappa_{1,1}}}, \quad n \geq 1, \quad (11)$$

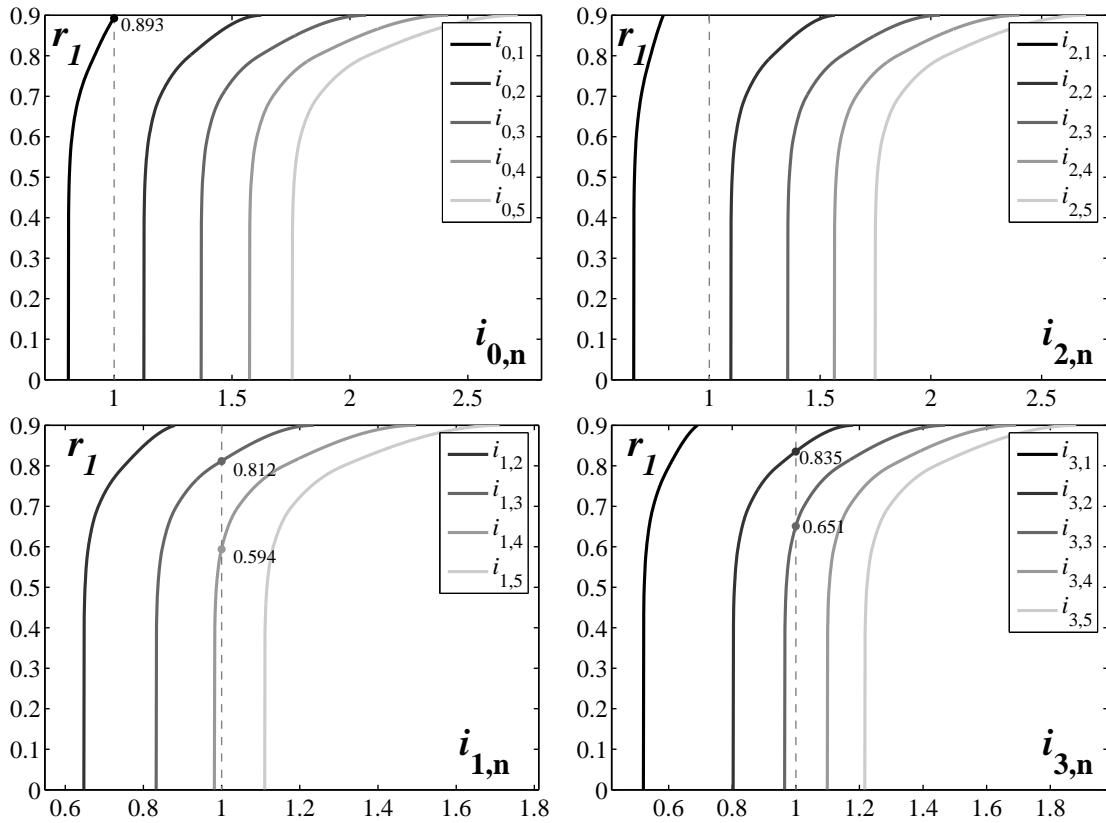


Рис. 2. Графики зависимостей  $i_{m,n}$  от безразмерного параметра  $r_1 := r_1/r_0$  (соотношение радиусов дна и свободной поверхности). Угол полураствора  $\theta_0 = 30^\circ$ . Значение  $r_1$  отложено вдоль вертикальной оси. Критическими значениями, где основной резонанс совпадает с соответствующим внутренним резонансом, являются  $r_1 = 0.8116$ ,  $r_1 = 0.5939$ ,  $r_1 = 0.8926$ ,  $r_1 = 0.835$  и  $r_1 = 0.651$

$$i_{1,n}(\theta_0, h) = \frac{\sigma_{1,n}}{3\sigma_{1,1}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\varkappa_{1,n}}{2\varkappa_{1,1}}}, \quad n \geq 2. \quad (12)$$

Эти функции не содержат частоты возбуждения  $\omega$ . Однако легко видеть, что близость значения одной из этих функций к единице, т.е. условие

$$i_{m,n} \approx 1, \quad (13)$$

эквивалентно выполнению условия внутреннего резонанса по собственным формам, соответствующим индексам  $(m, n)$ .

На рис. 2–4 приведены зависимости  $i_{0,n}$ ,  $i_{1,n}$ ,  $i_{2,n}$  и  $i_{3,n}$  от безразмерного параметра  $r_1 := r_1/r_0$  (случай  $r_1 = 0$  соответствует неусеченному конусу, а  $r_1 \rightarrow 1$  отвечает условию мелкой воды) для трех фиксированных углов полураствора  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$  и  $\theta_0 = 60^\circ$ . Значения  $i_{m,n}$  отложены вдоль горизонтальной оси, а значения безразмерного параметра  $r_1$  – вдоль вертикальной оси.

Как видно из приведённых рисунков, нестрогое равенство в необходимых условиях внутреннего резонанса выполняется для всех рассматриваемых углов полураствора. Так, для угла полу-

раствора  $\theta_0 = 30^\circ$  (рис. 2), анализируя внутренние резонансы второго порядка, необходимо выделить обязательный учёт собственных форм (0,2) и (2,2) для немалых глубин, а для малых глубин важными становятся формы (0,1) и (2,1). При этом строгое равенство  $i_{0,1} = 1$  при  $r_1 = 0.8926$  означает, что первая осесимметричная форма претерпевает вторичный резонанс вместе с основным резонансом. Что касается внутренних резонансов третьего порядка, то здесь ситуация еще более сложная. Несомненно, немалый вклад в гидродинамический отклик будут вносить формы (3,1), (3,2) и (3,3), причем для  $r_1 = 0.651$  собственные формы (3,3) должны характеризоваться резонансным поведением совместно с основным резонансом.

Аналогичный вывод можно сделать для собственных форм (3,2) при  $r_1 = 0.835$ , а также для собственных форм (1,3) при  $r_1 = 0.8116$  и (1,4) при  $r_1 = 0.5939$ . В целом, для данного угла полураствора можно сделать вывод о том, что асимптотика Нариманова–Моисеева применима для  $r_1/r_0 \lesssim 0.5$ , однако ряд высших форм второго и треть-

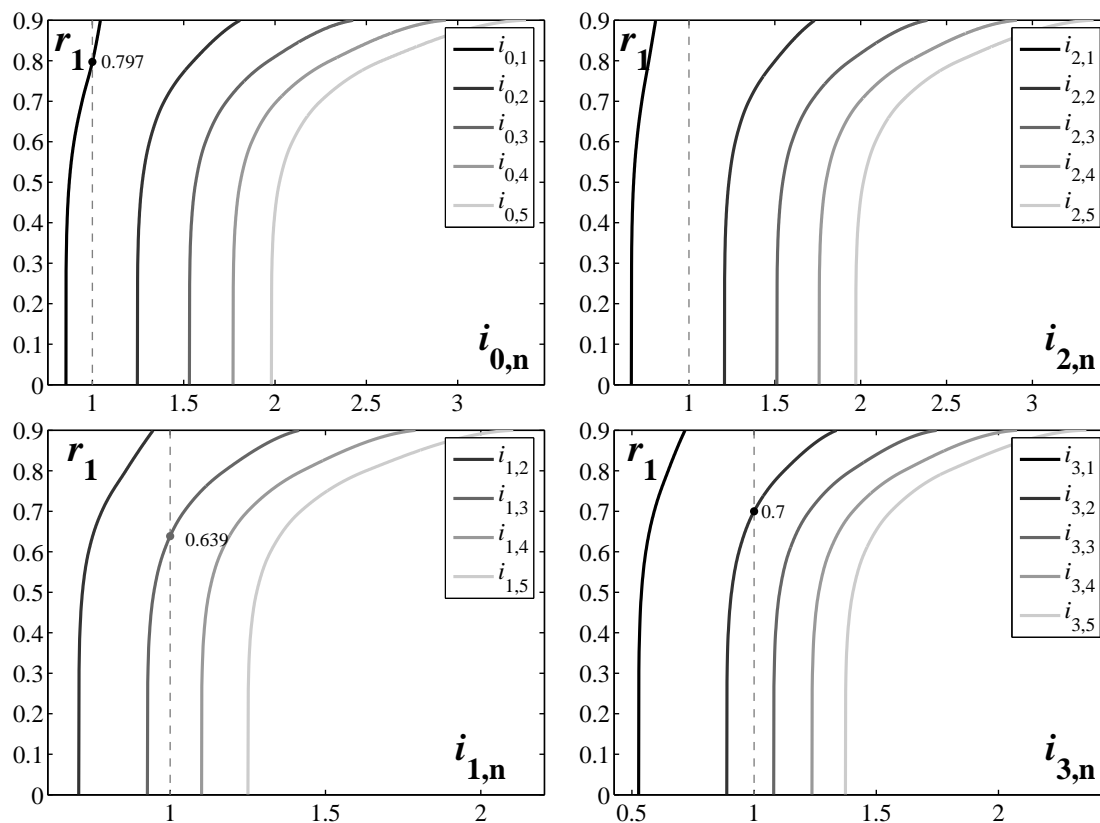


Рис. 3. Графики зависимостей  $i_{m,n}$  от безразмерного параметра  $r_1 := r_1/r_0$  (соотношение радиусов дна и свободной поверхности). Угол полураствора  $\theta_0 = 45^\circ$ . Значение  $r_1$  отложено вдоль вертикальной оси. Критическими значениями, где основной резонанс совпадает с соответствующим внутренним резонансом, являются  $r_1 = 0.6386$ ,  $r_1 = 0.7972$  и  $r_1 = 0.7$

го порядка, в частности, (0,1), (0,2), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (1,3) и (1,4), обязательно должны быть включены в выводимые модальные системы.

Качественно ситуация не претерпевает существенных изменений для угла полураствора  $\theta_0 = 45^\circ$  (рис. 3). Для этого угла полураствора внутренний резонанс имеет место при  $r_1 = 0.6386$  (моды (1,3)),  $r_1 = 0.7972$  (мода (0,3)) и  $r_1 = 0.7$  (моды (3,1)). Однако для усечённых баков с пропорцией  $r_1/r_0 \lesssim 0.6$  сохраняются выводы, сформулированные для угла полураствора  $\theta_0 = 30^\circ$ . В то же время для угла полураствора  $\theta_0 = 60^\circ$  рис. 4 демонстрирует два безразмерных значения параметра  $r_1$ , для которых можно ожидать внутренний резонанс одновременно с основным. Эти значения  $r_1 = 0.67$  (внутренний резонанс второго порядка, собственная форма (0,1)) и  $r_1 = 0.3196$  (внутренний резонанс третьего порядка, две моды с индексом (3,1)). Кроме того, из-за близости соответствующих  $i_{m,n}$  к единице, должны учитываться при выводе модальных систем Нариманова–Моисеева формы второго порядка (0,1), (0,2), (2,1), (2,2), а

также формы третьего порядка (3,2), (1,2) и (1,3).

## ВЫВОДЫ

Нами численно проанализированы соотношения между собственными частотами колебания жидкости в усеченном коническом баке, которые выражают условие возникновения внутренних резонансов второго и третьего порядка в рамках асимптотики Нариманова–Моисеева. На основе такого численного анализа для углов полураствора конуса  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$  были определены соотношения между радиусами дна и невозмущенной свободной поверхности, для которых, в связи с внутренними резонансами, ряд высших обобщённых координат второго и третьего порядков может давать значительный вклад в гидродинамический отклик. Число таких критических значений растёт с уменьшением угла полураствора, однако даже для угла  $\theta_0 = 30^\circ$  эти критические значения связываются с достаточно малыми глубинами жидкости в усе-

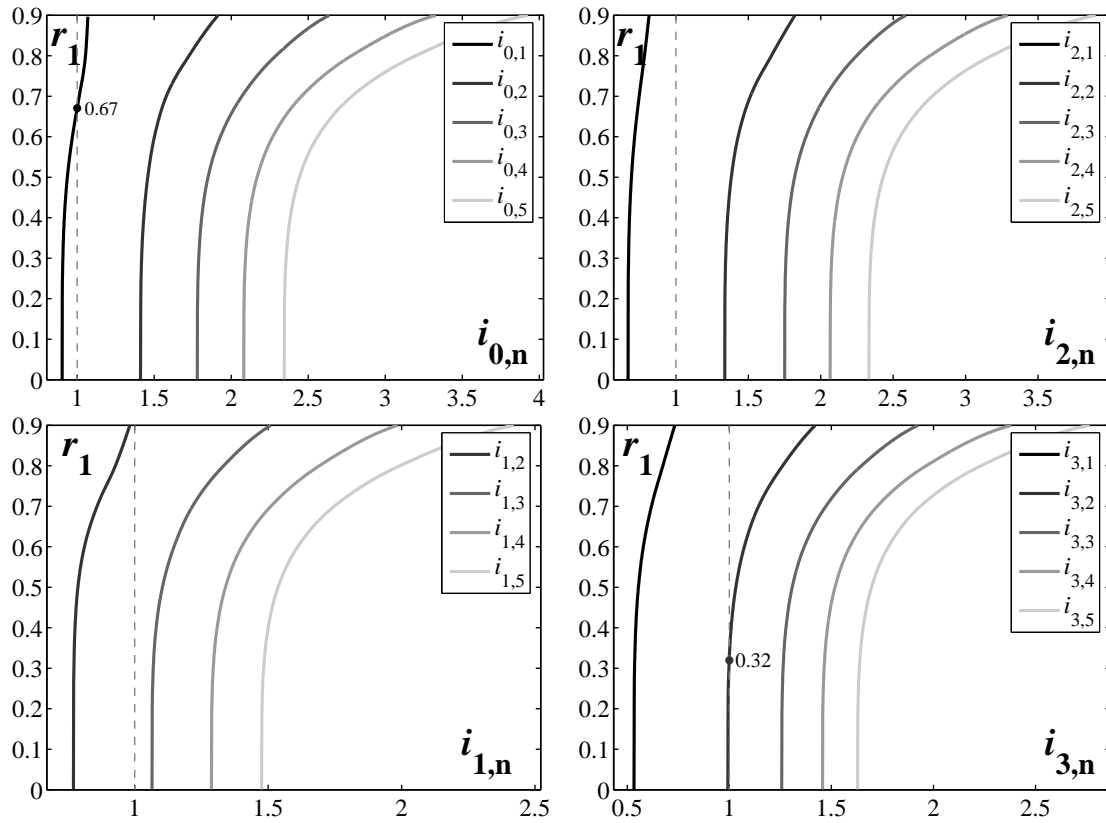


Рис. 4. Графики зависимостей  $i_{m,n}$  от безразмерного параметра  $r_1 := r_1/r_0$  (соотношение радиусов дна и свободной поверхности). Угол полураствора  $\theta_0 = 60^\circ$ . Значение  $r_1$  отложено вдоль вертикальной оси. Критическими значениями, где основной резонанс совпадает с соответствующим внутренним резонансом, являются  $r_1 = 0.67$  и  $r_1 = 0.3196$

ченном баке.

Для всех исследуемых углов полураствора мы отмечаем важность собственных форм с индексами (0,1), (0,2), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (1,2), (1,3) и (1,4), которые обязательно должны быть учтены при построении приближённых нелинейных модальных систем типа Нариманова–Моисеева. В этом смысле, построенная ранее семимодовая нелинейная модальная система [4] может оказаться недостаточно точной при описании установившихся резонансных движений жидкости и, вероятно, требует уточнения и дополнения путем включения ряда форм второго и третьего порядка малости.

Работа выполнена при частичной поддержке НДР № 0112 U 001015.

1. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику тел с полостями, частично заполненными жидкостью. – Киев: Наук. думка, 1990. – 296 с.
2. Луковский И. А. Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. – Киев: Наук. думка, 2010. – 408 с.

3. Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н. Собственные частоты колебаний жидкости в усеченных конических баках // Акустический вестник. – 2006. – Том 9, № 3. – С. 18–34.
4. Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н. Нелинейная асимптотическая модальная теория резонансных колебаний жидкости в срезанных конических баках // Акустический вестник. – 2011. – Том 14, № 4. – С. 128–134.
5. Bryant P.J. Nonlinear progressive free waves in a circular basin // J. Fluid Mech. – 1989. – **205**. – P. 453–467.
6. El Damatty A.A., Saafan M.S., Sweedan A.M.I. Experimental study conducted on a liquid-filled combined conical tank model // Thin-Walled Structures. – 2005. – **43**. – P. 1398–1417.
7. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Sloshing. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – 608 p.
8. Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovskiy I., Solodun O., Timokha A. Natural sloshing frequencies in truncated conical tanks // Engineering Computations. – 2008. – **25**, № 6. – P. 518–540.
9. Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovskiy I., Solodun O., Timokha A. Multimodal method for linear liquid sloshing in a rigid tapered conical tank // Engineering Computations. – 2012. – **29**, № 2. – P. 198–220.
10. Gavrilyuk I., Lukovskiy I., Timokha A. Linear and nonlinear sloshing in a circular conical tank // Fluid Dynamic Research. – 2005. – **35**. – P. 399–429.

11. Lukovsky I., Timokha A. Combining Narimanov-Moiseev and Lukovsky-Miles schemes for nonlinear liquid sloshing // J. Numerical & Appl. Math.– 2011.– № 2 (105).– P. 69–82.
12. Lukovsky I., Ovchynnykov D., Timokha A. Asymptotic nonlinear multimodal method for liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank. Part 1: Modal equations // Nonlinear Oscillations.– 2011.– 4.– P. 482–495.
13. Moslemi M., Kianoush M.R., Pogorzelski W. Seismic response of liquid-filled elevated tanks // Engineering Structures.– 2011.– 33.– P. 2074–2084.
14. Takahara, H., Kimura, K. Frequency response of sloshing in an annular cylindrical tank subjected to pitching excitation // Journal of Sound and Vibration.– 2012.– 331.– P. 3199–3212.