

УДК 532.528

ІДЕЇ Г. В. ЛОГВИНОВИЧА ТА РОЗРАХУНКИ ВИДОВЖЕНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ СУПЕРКАВЕРН

І. Г. НЕСТЕРУК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ
03680 Київ – 180, МСП, ул. Желябова, 8/4
inesteruk@yahoo.com

Отримано 07.12.2012

В лютому 2013 року ми відзначили 100 років з дня народження Г. В. Логвиновича – видатного вченого, життя і наукова діяльність якого тісно пов'язані з Україною та Інститутом гідромеханіки НАН України. В статті показано, що запропоновані ним принципи незалежності розширення каверни, формули та ідеї і досі залишаються потужними засобами дослідження видовжених стаціонарних і нестаціонарних тривимірних каверн. Проаналізовані різні диференціальні та інтегро-диференціальні рівняння, що дозволяють розраховувати форму каверн та опір кавітаторів з використанням моделі ідеальної рідини.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: суперкавітація, принцип незалежності, диференціальні рівняння, інтегро-диференціальні рівняння, теорія тонкого тіла

В феврале 2013 года мы отметили 100-летие со дня рождения Г. В. Логвиновича – выдающегося ученого, жизнь и творчество которого тесно связаны с Украиной и Институтом гидромеханики НАН Украины. В статье показано, что предложенные им принцип независимости расширения каверны, формулы и идеи до настоящего времени остаются эффективными инструментами исследования удлиненных стационарных и нестационарных каверн. Проанализированы разные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, позволяющие рассчитывать форму каверн и сопротивление кавитаторов с использованием модели идеальной жидкости.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: суперкавитация, принцип независимости, дифференциальные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения, теория тонкого тела

In February 2013 we celebrate the 100th jubilee of Georgiy Logvinovich - the outstanding scientist whose life and creative activity are closely connected with Ukraine and the Institute of Hydromechanics of National Academy of Sciences of Ukraine. In the paper was shown that his principle of independence, formulae and ideas still remain the effective tools for investigations of the long steady and unsteady cavities. Different differential and integral-differential equations for the calculations of the cavity shape and the cavitator drag were analyzed.

KEY WORDS: supercavitation, principle of independence, differential equations, integral-differential equations, slender body theory

ВСТУП

Суперкавітаційний режим обтікання може значно зменшувати опір тіл, що рухаються у воді з великими швидкостями, за рахунок зменшення площі контакту з водою. Ця ідея розвивалась численними дослідниками в багатьох країнах. Україна може пишатися значними успіхами вітчизняних вчених у теоретичних, експериментальних та прикладних дослідженнях цього складного явища, школою академіка Г. В. Логвиновича. 2013 року ми відзначаємо 100 років з дня народження цього видатного вченого, життя і наукова діяльність якого тісно пов'язані з Україною та Інститутом гідромеханіки НАН України.

Запропоновані ним принципи незалежності розширення каверни [1–3], інші формули та ідеї і досі залишаються потужним засобом дослідження видовжених нестаціонарних тривимірних каверн. Спробуємо продемонструвати це в даній публікації, яка не претендує на повний аналіз більш як

півстолітньої історії розрахунків осесиметричних кавітаційних течій. Зупинемось лише на головних, з нашої точки зору, результатах, так чи інакше пов'язаних з ідеями Г. В. Логвиновича.

1. ПРИНЦИП НЕЗАЛЕЖНОСТІ РОЗШИРЕННЯ Г. В. ЛОГВИНОВИЧА І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ РАДІУСА НЕСТАЦІОНАРНОЇ СУПЕРКАВЕРНИ

Сформульований Г. В. Логвиновичом ще 1959 р. (див., наприклад, [1, 2]) принцип незалежності розширення полягає в тому, що кожний переріз видовженої тривимірної суперкаверни еволюціонує незалежно від її поведінки в інших перерізах. Відповідно зміни радіуса каверни залежать лише від різниці тисків всередині кавітаційної порожнини та далеко від неї та початковими умовами в момент створення заданого перерізу каверни. В своїх статтях [1, 2] та відомій монографії

[3] Г.В.Логвинович наводить експериментальні та теоретичні свідчення справедливості цього принципу.

Варто відзначити, що того ж 1959 р. була опублікована стаття С.С. Григоряна [4], де було отримане рівняння для радіуса $R(x_a, t_a)$ тонкої осесиметричної нестационарної каверни в абсолютній системі координат x_a, t_a (рідина на нескінченості нерухома):

$$\frac{\partial^2 R^2}{\partial t_a^2} \ln R + \frac{1}{4R^2} \left(\frac{\partial R^2}{\partial t_a} \right)^2 = \sigma, \quad (1)$$

де σ – число кавітації, всі довжини віднесені до довжини L системи кавітатор-каверна, а безрозмірний час t_a отриманий множенням фізичного часу на L та діленням на характерне значення швидкості руху U_∞ .

В диференціальному рівнянні (1) еволюція заданого перерізу каверни не залежить від інших, тому його можна розглядати і як одне з перших теоретичних свідчень принципу незалежності розширення, і як перше співвідношення, що разом зі сформульованими С.С. Григоряном початковими умовами неперервності радіуса та його похідної в точці сходу каверни (див. [4]) дозволяло розраховувати форму тонкої осесиметричної нестационарної каверни в коректній математично замкненій постановці (без використання емпіричних констант або залежностей).

Точність рівняння Григоряна (1) виявилась обмеженою, оскільки він користувався наближеним виразом для потенціалу течії. Спроби її покращання належать Ю.Л.Якимову [5], але подальші дослідження показали, що суттєве збільшення точності розрахунків у рамках моделі ідеальної рідини можна досягти лише з використанням інтегро-диференціальних рівнянь (див. наступний розділ).

Інженерна практика вимагала простих методів розрахунку форми каверни за диском (або кавітаторами у формі нетонкого конуса). Відповідне рівняння можна отримати з (1), якщо зауважити, що для видовженої каверни перший член у лівій частині має порядок $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$ і перевищує для малих значень параметра тонкості ε (відношення максимального радіуса каверни R_m до L), другий член цього рівняння порядку ε^2 . При цьому функція $\ln R$ міняється повільно, тому її можна замінити сталою, значення якої відповідає експериментальним даним. Подібне рівняння було запропоноване в [6]:

$$\mu \frac{\partial^2 R^2}{\partial t_a^2} + 2 \frac{\Delta p(x_a, t_a)}{\rho} = 0, \quad (2)$$

де Δp – різниця тисків у каверні і на нескінченості; ρ – густина рідини. Для безрозмірної функції μ з напівемпіричних міркувань пропонувались значення $\mu \approx 2$ або різні формули, зокрема (див. [7]):

$$\mu = \frac{1}{2} \ln \frac{1.5}{\sigma}. \quad (3)$$

Рівняння (2) успішно використовувалось Г.В. Логвиновичем та вченими Інституту гідродинаміки НАН України (Ю.М. Савченко, В.В. Серебряковим, В.М. Буйволом, В.М. Семененко, В.Т. Савченко, С.І. Путіліним, Ю.Д. Власенко та іншими) і ЦАГІ (Л.А. Епштейном, Е.В. Паришевим, Ю.Ф. Журавльовим, Е.М. Капанкіним, С.І. Гульневим, А.А. Болдиревим та іншими) для розрахунків форми видовжених стаціонарних та нестационарних просторових каверн та розв'язання практичних задач (див., наприклад, [8–17]). Зокрема, рівняння (2) застосовується в комп'ютерних програмах розрахунків форми тонких нестационарних каверн, розроблених в Інституті гідромеханіки НАН України [10, 11], воно використовувалось також в теоріях та обчисленнях малих збурень форми тонкої каверни [13–16].

2. ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ТА ЙОГО АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК

Розвиток чисельних методів з використанням моделі ідеальної рідини (див., наприклад, [18–28]) та CFD методів, що використовують моделі в'язкої двофазної течії, не знімає актуальності розрахунків форми осесиметричних каверн у постановці тонкого тіла, особливо у нестационарному випадку.

Рівняння для потенціалу стаціонарного обтікання тонкого тіла потоком ідеальної нестисливої рідини були отримані в монографіях [29, 30]. Зокрема, в [30] методом зрощування асимптотичних розвинень у ньому були виділені члени різного порядку малості. В статті [31] цей метод був узагальнений на нестационарний випадок і було отримано наступний вираз для потенціалу у зв'язаній з центром донного перерізу кавітатора циліндричній системі координат x, r :

$$\Phi(x, r, t, \varepsilon) = x + \varepsilon^2 \ln \varepsilon A(x, t) + \varepsilon^2 \{A(x, t) \ln r_* + B(x, t)\} + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon); \quad (4)$$

$$r_* = \frac{r}{\varepsilon}; \quad A(x, t) = F \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \tau \frac{\partial F}{\partial t} \right);$$

$$B(x, t) = -A(x, t) \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^{l(t)} \frac{\partial A(\xi, t)}{\partial \xi} \operatorname{sign}(x - \xi) \ln |x - \xi| d\xi; \quad (5)$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{l(t)} \frac{\partial A_i(\xi, t)}{\partial \xi} \operatorname{sign}(x - \xi) \ln |x - \xi| d\xi.$$

$$F(x, t) = \frac{R(x, t)}{\varepsilon}; \quad l(t) = \frac{l'(t)}{L'}.$$

Інтегрування у формулі (5) відбувається по всій довжині системи кавітатор–каверна–замикатель l , позначення зі штрихом використовуються для фізичних (розмірних) величин.

Підставляючи вираз (4) в інтеграл Коші-Лагранжа, можна отримати [31]:

$$\varepsilon^2 \ln \varepsilon Z(A) + \varepsilon^2 [Z(A) \ln F + Z(B) + 0.5A^2F^{-2}] + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon) = \pm x \operatorname{Fr}^{-2}(t) - 0.5Cp(x, t); \quad (6)$$

$$Z(U) \equiv \tau \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + SU, \quad \Phi(x, r, t) = \frac{\Phi'(x, r, t)}{L'U'_\infty(t)},$$

$$x = \frac{x'}{L'}, \quad r = \frac{r'}{L'}, \quad R(x, t) = \frac{R'(x, t)}{L'},$$

$$\tau(t) = \frac{L'}{t'_x U'_\infty(t)}, \quad t = \frac{t'}{t'_x},$$

$$S(t) = \frac{L'}{U'^2_\infty(t)} \frac{dU'_\infty}{dt'}, \quad \operatorname{Fr}(t) = \frac{U'_\infty(t)}{\sqrt{g'L'}},$$

$$Cp(x, t) = \frac{2[p'(x, t) - p'_\infty(0, t)]}{\rho'U'^2_\infty(t)},$$

де t'_x – характерний час нестационарності, наприклад, період пульсацій. Нелінійне інтегро-диференціальне рівняння (6) зв'язує невідомий радіус тонкого тіла (або каверни) з розподілом тиску на поверхні $Cp(x, t)$. В диференціальних рівняннях Григоряна та Якімова [4, 5] врахована лише частина членів порядку ε^2 .

Розв'язок інтегро-диференціального рівняння (6) знайдено в [32] у вигляді асимптотичного ряду

$$F^2(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) f_i(x, t);$$

$$1 \equiv \mu_1 \gg \mu_2 \gg \dots \gg \mu_i \gg \dots,$$

$$A(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) A_i(x, t);$$

$$B(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) B_i(x, t);$$

$$A_i(x, t) = 0.5 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \tau \frac{\partial f_i}{\partial t} \right);$$

$$B_i(x, t) = -A_i(x, t) \ln 2 -$$

Підстановка цих розвинень в (6) і виділення членів різного порядку малості дає рівняння першого, другого та $i + 1$ наближень:

$$\varepsilon^2 \ln \varepsilon Z(A_1) = \pm x \operatorname{Fr}^{-2}(t) - 0.5 Cp(x, t), \quad (7)$$

$$Z(A_2) = -0.5 Z(A_1) \ln f_1 - Z(B_1) - 0.5 A_1^2 f_1^{-1}; \quad (8)$$

$$Z(A_{i+1}) = H_{i+1}(A_1, \dots, A_i, f_1, \dots, f_i) - Z(B_i),$$

$$\mu_i(\varepsilon) = (\ln \varepsilon)^{1-i},$$

де H_{i+1} – нелінійні функціонали.

Таким чином, інтегруючи лінійне диференціальне рівняння першого порядку (7), можна знайти $A_1(x, t)$. Після цього можна знайти функції $B_1(x, t)$ та $f_1(x, t)$. Тоді права частина рівняння (8) стає відомою і з нього можна знайти A_2 , а потім f_2 та B_2 . Процес можна продовжувати як завгодно довго, збільшуючи відповідно точність розв'язку, але нелінійний функціонал H_{i+1} сильно ускладнюється при збільшенні номера i .

Нестационарні суперкавітаційні течії зручно досліджувати в абсолютній системі координат x_a, r_a , в якій незбурена рідина є нерухомою, а тверде тіло пересувається вертикально. Якщо початок абсолютної системи координат знаходиться на поверхні незбуреної рідини, а напрямком осі x_a протилежний вектору швидкості кавітатора, то рівняння першого наближення (7) набуває наступного вигляду (див. [32]):

$$\frac{\partial^2 R^2}{\partial t_a^2} = \frac{1}{\ln \varepsilon} \left[\sigma_0 \pm \frac{2x_a}{\operatorname{Fr}_0^2} - p_k(t_a) \right], \quad (9)$$

$$\sigma_0 = \frac{2[p'_{at} - p'_K(t_0)]}{\rho'U'^2_\infty(t_0)}, \quad \operatorname{Fr}_0 = \frac{U'_\infty(t_0)}{\sqrt{g'L'}},$$

$$p_k(t_a) = \frac{2[p'_K(t_a) - p'_K(t_0)]}{\rho'U'^2_\infty(t_0)},$$

$$t_x' = \frac{L'}{U'_\infty(t_0)}, \quad \tau(t_a) = \frac{U'_\infty(t_0)}{U'_\infty(t_a)} \equiv \frac{1}{U(t_a)},$$

де t_0 – деякий фіксований момент часу, тиск на поверхні незбуреної рідини p'_{at} вважається сталим. Відповідно до рівняння (9) еволюції заданого перерізу каверни залежать від інших перерізів лише через величину $\ln \varepsilon$, що змінюється дуже повільно (в багатьох випадках ε можна вважати сталою величиною, що дорівнює параметру тонкості кавітатора). Тому рівняння першого наближення (9) є ще одним підтвердженням принципу незалежності

розширення Г.В. Логвиновича. Варто відзначити, що (9) переходить у співвідношення (2) після заміни $\ln \varepsilon$ на $-\mu$.

Рівняння першого наближення (7) або (9) має досить обмежену точність порядку $|\ln \varepsilon|^{-1}$ і, наприклад, для $\varepsilon=0.1$ вона становить лише 44%, а для $\varepsilon=0.01$ – лише 22%. Разом з тим, більше як тридцятилітній досвід його використання для розрахунків стаціонарних і нестаціонарних каверн, суперкавітаційного опору та форми осесиметричних тіл із заданим розподілом тиску на поверхні показав, що всі основні якісні особливості осесиметричних течій з невідомими частинами поверхонь можуть бути успішно проаналізовані з використанням принципу незалежності Г.В.Логвиновича. Огляд результатів використання рівняння першого наближення (9) та виявлених фізичних ефектів наведений в подальших розділах.

Суттєве покращання точності може бути одержане лише з використанням інтегродиференціального рівняння (6), тобто з врахуванням як членів порядку $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$, так і членів порядку ε^2 . Варто зауважити, що принцип незалежності розширення для цього рівняння не діє (через наявність інтегрального члена $B(x, t)$). Так само він перестає бути справедливим вже в другому наближенні (8) (через наявність інтегрального члена $B_1(x, t)$). Слід відзначити, що для плоских течій з видовженою вільною поверхнею не існує старшого члена порядку $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$, тому рівняння для форми каверни є інтегродиференціальним (див., наприклад [33]), і принципом незалежності розширення користуватись не можна.

3. СТАЦІОНАРНЕ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО НАБЛИЖЕННЯ ТА ПРИНЦИП НЕЗАЛЕЖНОСТІ РОЗШИРЕННЯ

В стаціонарному випадку рівняння першого наближення набуває дуже простого вигляду:

$$\frac{d^2 R^2}{dx^2} = \frac{-Cp(x) \pm 2x Fr^{-2}}{\ln \varepsilon}. \quad (10)$$

Для кавітаційних течій його розв'язок отримано і проаналізовано ще в 1979 році [34]. Подвійне інтегрування (10) з врахуванням початкових умов

$$\tilde{R}(0) = 1, \quad \left. \frac{d\tilde{R}}{dx} \right|_{x=0} = \beta \quad (11)$$

(всі довжини віднесені до радіуса кавітатора в точці сходу струменів, β – похідна від радіуса в цій самій точці) приводить до простої аналітичної

формули для радіуса тонкої осесиметричної стаціонарної каверни:

$$\tilde{R}^2 = \frac{\sigma \tilde{x}^2}{2 \ln \varepsilon} \pm \frac{\tilde{x}^3}{3 Fr^2 \ln \varepsilon} + 2\beta \tilde{x} + 1. \quad (12)$$

Таким чином, в [31, 32, 34] було запропоновано математично замкнуту постановку стаціонарної задачі визначення форми тонкої осесиметричної каверни та її розв'язок, незалежний від емпіричних констант. Величину параметра ε можна легко визначити простими ітераціями.

Проаналізуємо поведінку функції $\ln \varepsilon$ для найпростішого випадку стаціонарної течії невагомої рідини. Розв'язок рівняння першого наближення (12) набуває вигляду

$$\tilde{R}^2 = \alpha \tilde{x}^2 + 2\beta \tilde{x} + 1, \quad \alpha = \frac{\sigma}{2 \ln \varepsilon}. \quad (13)$$

Каверна, що описується функцією (13), при $\sigma > 0$ має еліптичну форму, що відповідає експериментальним даним Райхардта [35], отриманим ще в 1946 році (див. також [36]).

Для випадку $\beta \geq 0$ максимальний радіус системи кавітатор–каверна–замикач досягається на каверні в точці \tilde{x}_m , де функція (13) набуває максимуму

$$\tilde{R}_m^2 = \alpha \tilde{x}_m^2 + 2\beta \tilde{x}_m + 1, \quad \tilde{x}_m = -\frac{\beta}{\alpha}. \quad (14)$$

За означенням параметра ε отримуємо

$$\varepsilon = \frac{\tilde{R}_m}{\tilde{l}_k + \tilde{l}}, \quad (15)$$

де \tilde{l}_k – відома довжина кавітатора, віднесена до його радіуса в точці сходу каверни; \tilde{l} – сумарна довжина каверни та замикача, яку за обраною несиметричною схемою замикання (типу Рябушинського) можна визначити з рівняння

$$0 = \alpha \tilde{l}^2 + 2\beta \tilde{l} + 1, \quad (16)$$

що впливає з (13). Квадратне рівняння (16) має розв'язок

$$\tilde{l} = -\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha}}{\alpha}. \quad (17)$$

Отже, системи алгебричних рівнянь (13)–(15), (17) достатньо для визначення параметра ε у випадку стаціонарної каверни в невагомої рідині при $\beta \geq 0$. Для від'ємних значень похідної від радіуса кавітатора в точці сходу каверни потреби в рівнянні (14) немає, оскільки максимальний радіус системи кавітатор–каверна–замикач досягається на кавітаторі, і величина \tilde{R}_m відома з його геометрії.

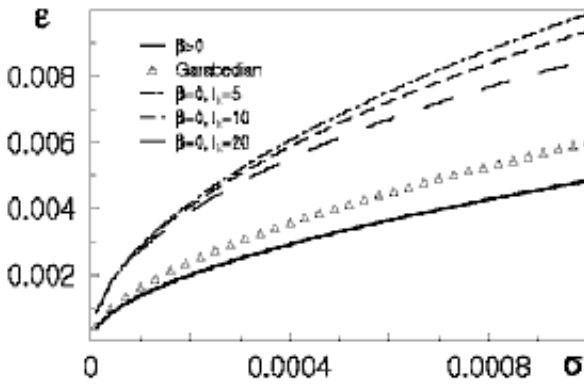


Рис. 1. Параметр тонкості при малих числах кавітації

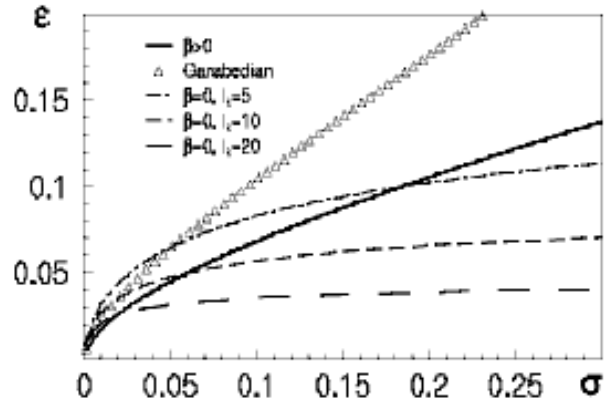


Рис. 2. Залежність параметра тонкості від числа кавітації

Розглянемо окремий випадок довгих каверн за невеликим порівняно з радіусом міделя каверни кавітатором (коли $\tilde{l}_k \ll \tilde{l}$, $\tilde{R}_m \gg 1$), що має місце лише при $\beta > 0$. Тоді система рівнянь (13)–(15), (17) спрощується. Зокрема, з рівнянь (14) випливає

$$\tilde{R}_m^2 \approx -\frac{\beta^2}{\alpha} = -\frac{2\beta^2 \ln \varepsilon}{\sigma}, \quad (18)$$

а співвідношення (15), (17) дають

$$\varepsilon \approx \frac{\tilde{R}_m}{\tilde{l}}, \quad (19)$$

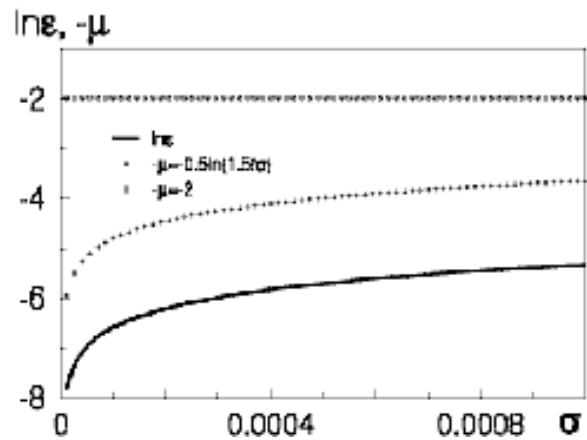
$$\tilde{l} \approx -\frac{2\beta}{\alpha} = -\frac{4\beta \ln \varepsilon}{\sigma}. \quad (20)$$

Остаточно з формул (18)–(20) випливає рівняння для визначення параметра ε :

$$-8\varepsilon^2 \ln \varepsilon = \sigma. \quad (21)$$

З рівняння (21) видно, що в цьому випадку видовження каверни не залежить від форми кавітатора, а є лише функцією числа кавітації, що добре збігається з теоретичними результатами Гарабедяна [37] та експериментом [38]. Для визначення функції $\varepsilon(\sigma)$ достатньо розв'язати алгебричне рівняння (21). Результати розрахунку наведені на рис. 1 та 2 суцільними лініями для різних діапазонів чисел кавітації. Для порівняння маркерами представлена формула Гарабедяна [37], що зв'язує видовження каверни $\lambda = 0.5/\varepsilon$ з числом кавітації і добре описує експериментальні результати для малих чисел кавітації і великих чисел Фруда (див., наприклад, [9]):

$$\lambda^2 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{1}{\sigma}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{-\ln \sigma}}. \quad (22)$$


 Рис. 3. Функції $\ln \varepsilon$ та $-\mu$ при малих числах кавітації

З рис. 1 та 2 видно цілком задовільне узгодження результатів, особливо для показаних на рис. 1 малих чисел кавітації, де зростає точність формул (21) та (22).

На рис. 3 та 4 суцільною лінією представлена залежність $\ln \varepsilon$ від числа кавітації, розрахована за допомогою рівняння (21). Видно, що ця функція змінюється досить повільно, але не може вважатися сталою, оскільки при прямуванні числа кавітації до нуля $\ln \varepsilon \rightarrow -\infty$ (таке прямування, звичайно, має місце лише у випадку малих порівняно з каверною кавітаторів, що розглядається, і несправедливе при $\beta < 0$). Цікаво відзначити, що в показаній на рис. 3 області дуже малих чисел кавітації точність рівняння першого наближення зростає через збільшення модуля величини $\ln \varepsilon$ (в цьому випадку вага відкинутих в інтегродиференціальному рівнянні (6) членів порядку ε^2 мала порівняно із залишеними членами порядку $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$).

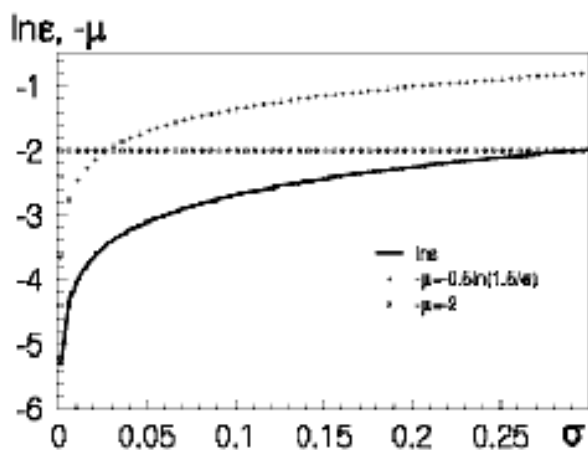


Рис. 4. Функціональні залежності $\ln \varepsilon$ та $-\mu$ від числа кавітації

Проаналізуємо також диференціальне рівняння (2), що відрізняється від форми (9) рівняння першого наближення лише тим, що замість $\ln \varepsilon$ використовується напівемпірична функція $-\mu$. На рис. 3 та 4 маркерами представлені розрахунки функції $-\mu$ за формулою (3) та значення $\mu = 2$. Очевидними є значні розбіжності між $\ln \varepsilon$ та функціями $-\mu$. Особливо впадає у вічі, що вони не зменшуються в області дуже малих чисел кавітації (рис. 3), де точність рівняння першого наближення зростає. Тим більше, в цій області не можна користуватись значенням $\mu \approx 2$.

Привертають до себе увагу також значні розбіжності між формулою (3) та рекомендованим тим же автором значенням $\mu \approx 2$. Наприклад, для найбільш поширеної області $0.01 < \sigma < 0.1$ вони сягають 40% (див. рис. 4), в інших діапазонах чисел кавітації неузгодження можуть перевищувати 100% (див. рис. 3 та 4). На жаль, в роботах В.В. Серебрякова немає чітких вказівок на те, якою з формул в якій саме області слід користуватися і на яку точність при цьому можна розраховувати.

Варто ще раз підкреслити, що залежність (3) не є універсальною навіть для стаціонарної течії невагомої рідини. Для ілюстрації цього факту достатньо розглянути випадок каверн за донним зрізом циліндра ($\beta = 0$). Тоді з рівнянь (13), (16) випливає:

$$\tilde{R}_m = 1, \quad \tilde{x}_m = 0, \quad \tilde{l} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} = \sqrt{\frac{-2 \ln \varepsilon}{\sigma}}.$$

Підстановка цих залежностей у вираз (15) дає шукане рівняння для визначення параметра ε :

$$\frac{1}{\varepsilon} = \tilde{l}_k + \sqrt{\frac{-2 \ln \varepsilon}{\sigma}}, \quad (23)$$

яке відрізняється від (21) і, зокрема, містить залежність від довжини кавітатора \tilde{l}_k .

Розв'язки рівняння (23) для значень $\tilde{l}_k = 5, 10, 20$ представлені на рис. 1, 2 штриховими лініями. З рис. 2 видно значний вплив довжини кавітатора на значення параметра ε , який стає не таким помітним лише для малих чисел кавітації (див. рис. 1), коли довжина каверни велика. В обох зображених на рис. 1 та 2 діапазонах чисел кавітації спостерігаються значні відмінності в розв'язках рівнянь (21) та (23).

В деяких випадках можна відмовитись від розрахунків величини ε за наведеними вище формулами і вважати її однаковою з параметром товщини кавітатора, тобто в якості величини ε можна взяти відношення максимального радіуса кавітатора до його довжини. Зокрема, для кінцевого кавітатора $\varepsilon = \beta$. Для підтвердження цієї тези в статті [39] були розраховані габаритні розміри каверн за різними конусами з використанням формул (12) та умови $\varepsilon = \beta$.

Оскільки точність рівняння першого наближення обмежена невеликими значеннями величини $-\ln \varepsilon$, виникає питання: чи можна шляхом вдалого підбору параметра μ в рівнянні (2) досягти хорошої точності розрахунку форми нестационарної каверни. Цей параметр не може бути вимірний в експериментах безпосередньо, а лише визначений шляхом аналізу форми каверн, яка залежить від дуже багатьох факторів. Навіть якщо вважати, що форма нестационарної каверни близька до стаціонарної в невагомій рідині, то залишається залежність від числа кавітації та форми кавітатора. Якщо додатково спростити модель і вважати каверну еліптичною і великою порівняно з розмірами кавітатора, то окрім μ потрібний ще один параметр для однозначного визначення еліпса. Як правило, його беруть з початкової умови, записуючи її у вигляді (див., наприклад, [6]):

$$R^2(x_a, t_p(x_a)) = 0, \quad \frac{\partial R^2}{\partial t_a}(x_a, t_p(x_a)) = 2\sqrt{\frac{W_0}{k\pi\mu\rho}}. \quad (24)$$

Рівняння (2) з початковими умовами (24) вимагає поряд з емпіричними сталими k, μ використовувати ще і невідомий опір кавітатора W_0 , який фактично є ще одним емпіричним параметром, оскільки математична замкнута постановка задачі дає можливість (після визначення невідомої форми каверни) знайти також опір кавітатора (див. [40, 41]).

Не дивно, що з достатньою кількістю достатньо точних емпіричних параметрів можна досить точно розраховувати форму каверни. Цим і пояснюється успішне застосування співвідношень (2), (24)

для визначення форми каверн за дисками та іншими товстими кавітаторами (див., наприклад, [8–11]).

Варто відзначити непридатність для таких кавітаторів теорії тонкого тіла. Хоча при достатньо малих числах кавітації каверна може бути досить видовженою, область поблизу точки сходу струменів з диска не описується потенціалом (4). Форма цієї області впливає на всю каверну і може бути визначена лише чисельно. Для початкової ділянки $\tilde{x} < 3$ стаціонарної каверни за диском Г.В.Логвиновичем запропоновано емпіричну формулу для радіуса каверни, [3]:

$$\tilde{R}(\tilde{x}) = (1 + 3\tilde{x})^{1/3}.$$

Зокрема, в точці $\tilde{x} = \tilde{x}_s = 2$ відповідні значення радіуса каверни та похідної від нього дорівнюють $\tilde{R}_s \approx 1.91$ та $\beta_s \approx 0.273$. Якщо при $\tilde{x} > \tilde{x}_s$ каверна є достатньо тонкою, то можна користуватись рівнянням першого наближення (зокрема, його розв'язком (13) з усіма довжинами, віднесеними до R_s , та β_s замість β). Тоді з формули (13) можна визначити максимальний радіус стаціонарної каверни за диском при великих числах Фруда:

$$\tilde{R}_m = \tilde{R}_s \sqrt{1 - \frac{2\beta_s^2 \ln \beta_s}{\sigma}} \approx 1.91 \sqrt{\frac{\sigma + 0.193}{\sigma}}. \quad (25)$$

У формулі (25) використано умову $\varepsilon = \beta_s$. Розрахунки за її допомогою відрізняються менше, ніж на 10%, від емпіричної формули Г.В. Логвиновича [3]

$$R_m \approx \sqrt{0.84 \frac{\sigma + 1}{\sigma}}$$

в діапазоні чисел кавітації $0.001 < \sigma < 0.1$.

4. ФІЗИЧНІ ЕФЕКТИ, ЩО ВДАЛОСЯ ВИЯВИТИ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРИНЦИПУ НЕЗАЛЕЖНОСТІ РОЗШИРЕННЯ Г.В. ЛОГВИНОВИЧА

Незважаючи на обмежену точність принципу незалежності розширення та рівнянь (2) і (9), вони дозволяють виявити цілу різку цікавих фізичних ефектів. Зокрема, стаціонарне рівняння першого наближення (10) використовувалось для аналізу впливу капілярних сил [40], форми штучних каверн [42, 43] та розрахунку осесиметричних тіл із заданим розподілом тиску на поверхні [44]. Було показано, що рівняння (10) справедливе також для течій стисливої рідини, [44]. Зупинемося коротко на деяких цікавих та важливих фізичних ефектах.

1. Вплив сили тяжіння на форму стаціонарної каверни може бути проаналізований з рівняння (11). Зокрема, у потоках, направлених догори, сила тяжіння збільшує розміри каверн. Таким чином, вони можуть стати нескінченими. Відповідні мінімальні числа кавітації розраховані в [34]. Якщо напрямки потоку та сили тяжіння збігаються, то розміри каверни зменшуються, можливі довільні від'ємні числа кавітації та каверни з точками перегину. Дані факти добре узгоджуються з експериментом (див., зокрема, [45]).
2. Наявність мінімальних чисел кавітації в невагомій рідині [34], обмежень на параметри нестаціонарних течій [46], існування не тільки еліптичних, а також параболічних, гіперболічних та увігнутих каверн [39].
3. Показано, що капілярні сили можуть значно зменшувати розміри каверн, особливо при малих числах кавітації, [40]. Зокрема, каверна за конусом у невагомій рідині має обмежені розміри при нульовому числі кавітації.
4. Каверни, що замикаються на корпусі конус-циліндр, мають цілу низку особливостей в залежності від довжини конічної та радіусу циліндричної частин [39]. Зокрема, вдалося пояснити стрибкоподібну зміну довжини каверни та пояснити відсутність чисельних розв'язків, виявлену в [28].
5. Показано, що піддув газу може значно збільшувати розміри каверн за конусом, роблячи її нескінченною при деякому критичному значенні інтенсивності вентиляції, [42]. Для донних каверн вентиляція зменшує довжину каверни, [43]. Так само як парові, штучні каверни мають цілу низку особливостей в залежності від довжини конічної та радіусу циліндричної частин [43].
6. Ефект глибинного змикання каверни при вході у воду [13, 17, 31]. Зокрема, було показано, час глибинного змикання практично не залежить від сталої швидкості вертикального занурення [31].
7. Втрата стабільності та пульсації вентиляційних каверн [12, 47].
8. Особливості нестаціонарних каверн для різноманітних режимів обтікання, [10, 11, 31].

ВИСНОВОК

Ідеї Г.В. Логвиновича, його принцип незалежності розширення каверни були, є і продовжують залишатись основою для розрахунків просторових течій з видовженими кавернами.

1. Логвинович Г.В. Начальное движение тела в жидкости с развитой кавитацией. // Сборник работ по гидродинамике, ЦАГИ. – 1959. – С. 3–40
2. Логвинович Г.В. Погружение тел в жидкость и движение с развитой кавитацией. // Сборник работ по гидродинамике, ЦАГИ. – 1959. – С. 119–139.
3. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка, 1969. – 208 с.
4. Григорян С.С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела // ПММ. – 1959. – Т.23, вып. 5. – С. 351–353.
5. Якимов Ю.Л. Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации // ПММ. – 1968. – Т.32, вып.3. – С. 499–501.
6. Логвинович Г.В., Серебряков В.В. О методах расчета формы тонких осесимметричных каверн. // Гидромеханика. – 1985ю – вып. 32. – С. 47–54.
7. Серебряков В.В. О методах расчета суперкавитации при высокоскоростном движении в воде. Часть 1. Несжимаемая жидкость // Прикладна гідромеханіка. – 2002. – Т.4, № 2. – С. 63–78.
8. Логвинович Г.В., Буйвол В.Н., Дудко А.С., Путилин С.И. и др. Течения со свободными поверхностями. – Киев: Наук. думка, 1985. – 296 с.
9. Савченко Ю.Н., Семенов В.Н., Путилин С.Н. Нестационарные процессы при суперкавитационном движении тел // Прикладна гідромеханіка. – 1999. – 1(73), №1. – С. 79–97.
10. Савченко Ю.Н., Семенов В.Н., Путилин С.И., Наумова Е.И. Программный комплекс компьютерного моделирования суперкавитационного движения тел в воде // Математические машины и системы. – 1999. – N 2. – С. 48–57.
11. Semenenko, V. N. and Naumova, Ye. I. 2012 Study of the supercavitating body dynamics, I. Nesteruk (ed.). *Supercavitation*. – Springer, pp. 147–176.
12. Парышев Э. В. Система нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих динамику нестационарных осесимметричных каверн // Тр. ЦАГИ. – 1978. – Вып. 1907. – С. 3–16.
13. Журавлев Ю. Ф. Методы теории возмущений в пространственных струйных течениях // Тр. ЦАГИ. – 1973. – Вып. 1532, с. 3–24.
14. Буйвол В.Н., Журавлев Ю.Ф., Капанкин Е.Н. Возмущенное движение тонких пространственных каверн. – В кн.: Неустановившиеся течения воды с большими скоростями (Тр. Междунар. симп. ИУТАМ) – М.: Наука. – 1973. – С. 153–161.
15. Буйвол В.Н. Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. – Киев: Наукова думка, 1975. – 192 с.
16. Воронин В.В., Журавлев Ю.Ф. К вопросу о деформациях тонких осесимметричных каверн // Тр. ЦАГИ. – 1985. – Вып. 2272. – С. 29–35.
17. Yuri F. Zhuravlev, Anton N. Varyukhin, Nikolay A. Shulman. Cavity at body entry into water. – 8th International Symposium on Cavitationю– 13 – 16 August 2012, Singapore.
18. Brennen C.A. A numerical solution for axisymmetric cavity flows // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol .37. – N 4. – P. 671–688.
19. Nishiyama T., Kobayashi H. Finite cavity flow of axial symmetry. – Technol. Repts Tohoku Univ. – 1969. – V. 34, № 1. – P. 173–185.
20. Тайц О. Г. Продольное обтекание тонкого тела вращения со свободной границей // ПММю – 1975. – Т. 39, № 1. – С. 185–188.
21. Chou Y. S. Axisymmetric cavity flows past slender bodies of revolution. // J. Hydronautics. – 1974. – V. 8, № 1. – P. 13–18.
22. Гузевський Л.Г. Численный анализ кавитационных течений. – Препринт 40-79. – Новосибирск: СО АН СССР, Ин-т теплофизики. – 1979. – С. 3–36.
23. Амромин Э. Л., Бушковский В. А., Дианов Д. И. Развитая кавитация за диском в вертикальной трубе. // Изв. АН СССР. МЖГ, – 1983. – № 5. – С. 181–184.
24. Кожуро Л.А. Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского // Уч. зап. ЦАГИ. – 1980. – Т. XI, № 5. – С. 109–115.
25. Альев Г.А. Отрывное обтекание кругового конуса трансзвуковым потоком воды // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1983. – № 2. – С. 152–154.
26. Васин А.Д. Расчет осесимметричных каверн за диском в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1996. – № 2. – С. 94–103.
27. Васин А.Д. Расчет осесимметричных каверн за диском в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1997. – № 4. – С. 54–62.
28. Varghese A.N., Uhlman J.S. and Kirschner I.N. 2003 High-speed bodies in partially cavitating axisymmetric flow, International Symposium on Cavitation, Cav2003, Osaka, Japan.
29. Франкль Ф.И., Карпович Е.А. Газодинамика тонких тел. – М.;Л.: Гостехиздат, 1948. – 176 с.
30. Cole J.D. 1968, Perturbation Methods in Applied Mathematics, Blaisdell Publishing Company: Waltham, Massachusetts; Toronto; London.
31. Нестерук И.Г. О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны // Изв. АН СССР, МЖГ, – 1980. – №4. – С. 38–47.
32. Нестерук И.Г. Об определении формы тонкой осесимметричной каверны на основе интегро-дифференциального уравнения // Изв. АН СССР, МЖГ, – 1985. – №5. – С. 83–90.
33. Tulin M.P. Supercavitating flows. – In Handbook of Fluid Dynamics. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1961.
34. Нестерук И.Г. К вопросу о форме тонкой осесимметричной каверны в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ, – 1979. – №6. – С. 133–136.
35. Reichardt H. The Lows of Cavitation Bubbles at Axially Symmetric Bodies in a Flow. // Ministry of Aircraft Production (Britain), Rept. and Transl. – 1946. – 7666 p.
36. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. – М.: Мир, – 1974. – 688 с.
37. Garabedian P.R. Calculation of axially symmetric cavities and jets // Pacif. J. Math. – 1956. – V.6, N 4. – P. 611–689.

38. *Егоров И. Г., Садовников Ю. М., Исаев И. И. и др.* Искусственная кавитация.– Л.: Судостроение.– 1971. – 284 с.
39. *Нестерук І.Г.* Часткова кавітація на видовжених тілах// Прикладна гідромеханіка.– 2004.– Т. 6(78), №3.– С. 64–75.
40. *Нестерук І.Г.* Некоторые задачи осесимметричных кавитационных течений // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1982. – №1. – С. 28–34.
41. *Нестерук І.Г.* К расчету сопротивления тонких осесимметричных кавитаторов. // В сб.: Аэродинамика нестационарных процессов. – Томск: Изд-во Томского университета– 1988. –С. 69–75.
42. *Манова З.І., Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д.* Оцінки впливу вентиляції на форму тонких осесимметричних каверн// Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т. 13 (85). № 2. – С. 44–50.
43. *Nesteruk, I.* Influence of ventilation on the shape of slender axisymmetric cavities// 8th International Symposium on Cavitation, CAV2012ю– Singapore.– 2012.
44. *Нестерук І.Г.* Про форму тонких тіл мінімального опору // Доповіді АН УРСР, сер. А.– 1989.– №4.– С. 57–60.
45. *Капанкин Е.Н., Нестерук И.Г.* К расчету тонкой осесимметричной вертикальной каверны в тяжелой жидкости // Труды ЦАГИ.– 1980.– Вып.– 2060. – С. 25–30.
46. *Нестерук І.Г.* Об ограничениях на параметры кавитационных течений // Прикладная математика и механика – 1986.– Т. 50.– Вып.4.– С. 584–588.
47. *Нестерук І.Г.* Число Эйлера и отрывные течения. // В сб.: Теоретические и экспериментальные исследования некоторых задач аэрогидромеханики. Московский физико-технический институт– М.– 1990.– С. 66–69.