

УДК 532.59

НЕСТАЦІОНАРНИЙ РУХ ТОЧКОВОГО ВИХОРА В ШАРІ СТРАТИФІКОВАНОЇ РІДИНИ СКІНЧЕНОЇ ТОВЩИНИ

О. Г. СТЕЦЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 18.05.2012

Розв'язана лінійна задача про нестационарний рух зі стану спокою плоского точкового вихора в шарі стратифікованого середовища скінченої товщини з експоненціальним розподілом густини. Розглянуто режим руху, коли з початкового моменту вихор рухається горизонтально з постійною швидкістю. Розв'язок одержано у вигляді квадратур. Проаналізовано особливості формування амплітудної картини збуреного руху та зміни величини потужності, яка затрачується вихором на випромінювання енергії внутрішніх хвиль.

Решена линейная задача о нестационарном движении из состояния покоя плоского точечного вихря в слое стратифицированной среды конечной толщины с экспоненциальным распределением плотности. Рассмотрен режим движения, когда с начального момента вихрь движется горизонтально с постоянной скоростью. Решение получено в виде квадратур. Проанализированы особенности формирования амплитудной картины возмущенного движения и изменения величины мощности, затрачиваемой вихрем на излучение энергии внутренних волн.

The linear problem of non-stationary movement of two-dimensional vortex from the state of rest in the layer of stratified medium of finite thickness, a density of which changes in accordance with exponential law, is solved. A horizontal motion of a vortex with constant velocity from the initial moment of time is studied. The solution is provided in quadrature. The peculiarities of formation of the amplitude pattern of disturbed motion and a change of a power being utilized by the vortex for emitting the energy of the internal waves are analyzed.

ВСТУП

Вимушений рух двовимірних точкових вихорів належить до класу задач, які мають важливе значення в гідродинаміці руху підводних об'єктів. Результати досліджень такого типу рухів є базовими при розв'язанні задач динаміки руху плоских профілів довільної форми, зокрема, підводних крил. Детальний аналіз робіт цього напрямку з відповідною бібліографією проведено в роботах [1, 2]. Переважна більшість виконаних досліджень відносяться до схем шаруватої стратифікації, а відповідні розв'язки одержані в лінійній постановці.

Стаціонарні режими руху точкових вихорів у середовищах з неперервною стратифікацією досліджувались у роботах [3–9]. В роботах [3–5] розглянуті вільні точкові вихори в баротропній рідині, густина якої змінюється по квадратичному закону $\rho(z) = \rho_0 z^2$, за умови нехтування впливом на процес руху та взаємодії вихорів генерованих ними внутрішніх хвиль (ВХ).

Вимушений рівномірний рух точкового вихора вперше розглянуто в [6] для необмеженого лінійно стратифікованого середовища. Розв'язок відповідної задачі одержано методом асимптотичного зрощування при переході від вихрового до потенціального обтікання вихора. В роботі [7] одержано лінійне рівняння, яке описує збурений рух середовища з довільною стійкою стратифікацією при

русі плоского точкового вихора і містить в явній формі параметри вихора (інтенсивність і координати розташування). Це дозволяє при розв'язанні задач цього класу ефективно використовувати методи інтегральних перетворень, що в подальшому і було зроблено в роботах [7–9].

Нестационарний рух точкових вихорів вивчено значно менше і то, головним чином, для схем шаруватої стратифікації. В [2] представлено розв'язок задачі динаміки горизонтального руху плоского вихроджерела з інтенсивністю, яка змінюється по гармонічному закону, біля границі розділення середовищ з різними густинами. В роботах [10, 11] при розв'язанні задач нестационарного руху зі стану спокою плоских профілів довільної форми під вільною поверхнею глибокого середовища та біля границі розділення двохшарового необмеженого середовища спеціально знаходився розв'язок відповідних задач для точкового вихора. Нестационарний рух зі стану спокою точкового вихора в двохшаровому середовищі з верхнім шаром скінченої товщини розглянуто в роботі [12]. Такого роду дослідження для випадку неперервної стратифікації виконано лише в роботі [13], де одержано відповідне лінійне рівняння нестационарного руху збуреного середовища, яке містить в явному вигляді параметри рухомого вихора. З використанням методу інтегральних перетворень у ній розв'язана задача генерації поля внутрішніх хвиль при вер-

тикальному русі у шарі скінченої товщини лінійно стратифікованого середовища протягом скінченого інтервалу часу вихрової пари з постійною інтенсивністю вихорів.

В даній роботі в лінійній постановці розв'язана задача про нестационарний рух зі стану спокою плоского точкового вихора в шарі скінченої товщини стратифікованої рідини з експоненціальним законом зміни густини середовища, для якого виконується умова постійності частоти Брента-Вайсяля. При цьому використовується загальна схема наближення Бусинеска в системі рівнянь Ейлера для ідеального середовища. Досліджено особливості формування збуреного гідродинамічного поля в такому середовищі та величину потужності, яка затрачується вихором у процесі руху на випромінювання ВХ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається нестационарний рух зі стану спокою плоского точкового вихора інтенсивності $\Gamma(t)$ в шарі скінченої товщини H з неперервною стратифікацією, якій відповідає експоненціальний закон зміни густини середовища $\rho_0(z) = \rho_{00}e^{-\beta z}$, $\beta > 0$. Розв'язок задачі знаходиться в нерухомій системі координат, вибраній так, що її початок має місце на нижній границі середовища, вісь Oz направлена вгору і в початковий момент часу проходить через центр вихора, який існує на горизонті $z_0(0) = h$. Додатний напрямок горизонтальної вісі Oy направлено в бік, протилежний напрямку горизонтального руху вихора.

Лінійна система рівнянь, яка описує нестационарний рух збуреного середовища, викликаний рухом вихора, після введення функції течії $\psi(y, z, t)$ такої, що горизонтальна $v(y, z, t)$ і вертикальна $w(y, z, t)$ складові швидкості визначаються як

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

зводиться до рівняння [13]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta \psi - \frac{N^2}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \Gamma(t) \delta [y - y_0(t)] \delta [z - z_0(t)] \}, \quad (1)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – двовимірний оператор Лапласа; $N = \left[-\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0}{dz} \right]^{\frac{1}{2}}$ – частота Брента-Вайсяля; g – прискорення падіння; $y_0(t)$ і $z_0(t)$ визначають

задану траєкторію руху вихора; $\delta [y - y_0]$, $\delta [z - z_0]$ – дельта-функції Дірака.

Граничні умови, з врахуванням наближення "твердої стінки" на вільній поверхні мають вигляд

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad \text{і } z = 1. \quad (2)$$

Початкові умови приймаються нульовими:

$$\psi(y, z, 0) = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(y, z, 0) = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (3)$$

В безрозмірній формі, де в якості лінійного масштабу взято H , масштабу часу – $\frac{H}{U}$ (тут U – характерна швидкість руху вихора), масштабів для функції течії і інтенсивності вихора – UH , рівняння (1) набирає вигляду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta \psi - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \Gamma(t) \delta [y - y_0(t)] \delta [z - z_0(t)] \}. \quad (4)$$

Тут $\lambda = HN^2/g = \alpha^2 Fr$, $\alpha = HN/U$ – густинне число Фруда, $Fr = U^2/gH$ – динамічне число Фруда. Граничні і початкові умови після обезрозмірювання не змінюють свого вигляду (2), (3).

2. МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Розв'язок рівняння (4) знаходиться у вигляді інтегральних представлень Фур'є по поздовжній координаті y і Лапласа по часу t :

$$\psi(y, z, t) = -\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{st} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \bar{\psi} dk. \quad (5)$$

Для знаходження функції-образу $\bar{\psi}(k, z, s)$ необхідно розв'язати звичайне диференціальне рівняння

$$\bar{\psi}'' - \lambda \bar{\psi}' - k^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) \bar{\psi} = \int_0^{\infty} \Gamma(t) e^{-st - ik y_0(t)} \delta [z - z_0(t)] dt \quad (6)$$

з граничними умовами

$$\bar{\psi} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad \text{і } z = 1. \quad (7)$$

Використання методу варіації сталих інтегрування для знаходження частинного розв'язку рівняння (6) дозволяє одержати наступний розв'язок

для $\bar{\psi}(k, z, s)$:

$$\bar{\psi}(k, z, s) = \frac{1}{2M_*} \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}\lambda[z-z_0(\tau)]} \Phi d\tau, \quad (8)$$

де

$$M_* = \left[\frac{1}{4}\lambda^2 + k^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\Phi(k, z, s, \tau) = \Gamma(\tau) e^{-s\tau - ik y_0(\tau)} \Pi(k, z, s, \tau),$$

$$\Pi(k, z, s, \tau) = \Pi_1(k, z, s, \tau) + \Pi_2(k, z, s, \tau),$$

$$\Pi_1(k, z, s, \tau) = e^{-M_*[z+z_0(\tau)]} - e^{-M_*|z-z_0(\tau)|},$$

$$\Pi_2(k, z, s, \tau) = \frac{\Pi_{2*} e^{-M_*}}{e^{M_*} - e^{-M_*}},$$

$$\Pi_{2*}(k, z, s, \tau) = e^{M_*[z+z_0(\tau)]} + e^{-M_*[z+z_0(\tau)]} - e^{M_*[z-z_0(\tau)]} - e^{-M_*[z-z_0(\tau)]}.$$

Оскільки $\Phi(\tau)$ містить множник $e^{-s\tau}$, підінтегральна функція представлення (5) відмінна від нуля лише при $t > \tau$. Тоді шуканий розв'язок для $\psi(y, z, t)$ після виділення його дійсної частини представляється як

$$\psi(y, z, t) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{Im} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} ds \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_\psi dk, \quad (9)$$

$$G_\psi = \frac{\Gamma \Pi}{M_*} e^{\frac{1}{2}\lambda[z-z_0(\tau)] + s(t-\tau) + ik[y-y_0(\tau)]}.$$

Відповідні представлення мають місце для вертикальної складової швидкості та амплітуди вертикальних зміщень $\eta = \int_0^t w(\tau) d\tau$:

$$w(y, z, t) = \frac{1}{8\pi^2} \text{Re} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} ds \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_w dk, \quad (10)$$

$$\eta(y, z, t) = \frac{1}{8\pi^2} \text{Re} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} ds \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_\eta dk, \quad (11)$$

де

$$G_w = k G_\psi, \quad G_\eta = \frac{k}{s} G_\psi.$$

На основі загального розв'язку (9)–(11) досліджуються збурені гідродинамічні поля для конкретних нестационарних режимів руху вихора.

3. ПОТУЖНІСТЬ, ЯКА ВИТРАЧАЄТЬСЯ ВИХОРОМ НА ГЕНЕРАЦІЮ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ

Для визначення величини потужності випромінюваної вихором енергії ВХ використовується під-

хід, який застосовувався для стаціонарних режимів руху джерела маси [14] та точкового вихора [15].

Розмірна система рівнянь, з якої безпосередньо отримується рівняння (1) для функції течії, в рівнянні кількості руху в z -напрямку містить силове джерело, потужність і характер руху якого визначається параметрами вихора:

$$\rho_0(z) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

$$\rho_0(z) \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = \rho_0(z) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \Gamma(t) H [y - y_0(t)] \delta [z - z_0(t)] \}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d\rho_0}{dz} w = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (15)$$

Тут p – збурений тиск; ρ – збурена густина; $H [y - y_0(t)]$ – одинична функція Хевісайда.

Якщо рівняння (12)–(15) домножити відповідно на $v, w, -g\rho (d\rho_0/dz)^{-1}$ і p і потім додати їхні ліві і праві частини, то в результаті отримуємо рівняння

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} (p\vec{V}) = \rho_0(z) w \frac{\partial}{\partial t} \{ \Gamma(t) H [y - y_0(t)] \delta [z - z_0(t)] \}, \quad (16)$$

де $E = \frac{1}{2} \rho_0(z) (v^2 + w^2) - \frac{1}{2} g \left(\frac{d\rho_0}{dz} \right)^{-1}$ – енергія

збуреного руху у виділеній точці. В безрозмірній формі, де масштабом для збуреного тиску p взято $\rho_{00} U^2$, для енергії $E - \rho_{00} U^2$, і для $\rho_0 - \rho_{00}$, рівняння для E не змінює свого вигляду.

Потужність випромінюваної енергії $W(t)$, масштабом розмірності якої вибрано $\rho_{00} U^3 H$, визначається інтегруванням рівняння (16) по всій площі S шару рідини. В результаті

$$W = \iint_S \rho_0 w \frac{\partial}{\partial t} \{ \Gamma(t) H [y - y_0(t)] \delta [z - z_0(t)] \} dy dz.$$

Враховуючи особливості інтегрування виразів з дельта-функціями, одержаний розв'язок можна представити у вигляді

$$W(t) = W_1 + W_2 + W_3 + W_4, \quad (17)$$

де

$$W_1 = \rho_0 [z_0(t)] \frac{d\Gamma}{dt} \int_{y_0(t)}^\infty w [y, z_0(t), t] dy,$$

$$W_2 = -\rho_0[z_0(t)]\Gamma(t)y_0'(t)w[y_0(t), z_0(t)],$$

$$W_3 = \Gamma(t)z_0'(t) \int_{y_0(t)}^{\infty} \frac{d\rho_0}{dz}[z_0(t)]w[y, z_0(t), t]dy,$$

$$W_4 = \Gamma(t)z_0'(t) \int_{y_0(t)}^{\infty} \rho_0[z_0(t)] \frac{dw}{dz}[y, z_0(t), t]dy.$$

Тут символ ($'$) означає похідну по часу.

4. ПРИКЛАД НЕСТАЦІОНАРНОГО РУХУ ВИХОРА

Розглядається схема руху, коли в початковий момент часу $t = 0$ вихор інтенсивності Γ_0 , який знаходиться на горизонті $z = h$, починає рухатись з постійною швидкістю U у від'ємному напрямку горизонтальної вісі координат, не змінюючи при цьому горизонту руху і своєї інтенсивності. Для такої схеми руху в безрозмірних величинах

$$v_0(t) = v_0(\tau) = 1; \quad y_0(t) = -t; \quad y_0(\tau) = -\tau;$$

$$z_0(t) = z_0(\tau) = h; \quad \Gamma(t) = \Gamma(\tau) = \Gamma_0.$$

У цьому випадку в (9) інтегрування по τ виконується явно, в результаті чого отримується таке представлення для функції течії:

$$\psi(y, z, t) = -\frac{\Gamma_0 e^{\frac{\lambda}{2}(z-h)}}{8\pi^2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} G_1(k, z, t) dk, \quad (18)$$

$$G_1(k, z, s, t) = \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{\Pi_h (e^{ikt} - e^{st})}{M_*(ik - s)} ds,$$

де

$$\Pi_h(k, z, s) = \Pi_{h1}(k, z, s) + \Pi_{h2}(k, z, s),$$

$$\Pi_{h1}(k, z, s) = e^{-M_*(z+h)} - e^{-M_*|z-h|},$$

$$\Pi_{h2}(k, z, s) = \frac{\Pi_{h2*} e^{-M_*}}{e^{M_*} - e^{-M_*}},$$

$$\Pi_{h2*}(k, z, s) = e^{M_*(z+h)} + e^{-M_*(z+h)} - e^{M_*(z-h)} - e^{-M_*(z-h)}.$$

Для обчислення інтегралів у комплексній s -площині використовується математичний апарат теорії лишків. Підінтегральна функція в (18) задовольняє в цій площині умовам лемми Жордана а також має там особливі точки – полюси: $s^{(1)} = ik$ і нескінченна система $s_n^{(2)} = \pm i\theta_n, \theta_n = \alpha|k| \left[k^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 + (\pi n)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, n = 1, 2, 3, \dots$, яка одержується з рівняння

$$e^{M_*} + e^{-M_*} = 0,$$

та $\pm s^{(3)} = \pm 2\lambda|k|i / (\lambda^2 + 4k^2)^{\frac{1}{2}}$ – точки розгалуження, які впливають з умови $M_* = 0$.

З огляду на можливість знаходження полюсів $s_n^{(2)}$ на уявній вісі між точками розгалуження, область однозначності підінтегральної функції доцільно виділити шляхом виконання двох розрізів в s -площині вздовж прямих, які ідуть від точок $\pm s^{(3)}$ до $s = \infty$ паралельно дійсній вісі в області $\text{Re } s < 0$. На протилежних берегах розрізів, як неважко переконатися, підінтегральна функція не змінює свого значення. Використання теореми Коші для замкнутого контура, який обходить всі особливі точки по колам нескінченно малого радіуса, а коло нескінченно великого радіуса замикається в області $\text{Re } s < 0$, приводить до наступного розв'язку для $\psi(y, z, t)$:

$$\psi(y, z, t) = \frac{\Gamma_0 e^{\frac{\lambda}{2}(z-h)}}{4\pi} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_w). \quad (19)$$

Тут

$$\psi_1(y, z, t) = -\int_0^{\infty} \Pi_{h1} \cos[k(y+t)] dk,$$

$$\psi_2(y, z, t) = -\int_0^{\infty} \Pi_{h2} \cos[k(y+t)] dk,$$

$$\psi_w(y, z, t) = \frac{8}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\pi n z) \sin(\pi n h) \Pi_{hw},$$

де

$$\Pi_{h1}(k, z) = \frac{1}{M_+} \left(e^{-M_+(z+h)} - e^{-M_+|z-h|} \right),$$

$$\Pi_{h2}(k, z) = \frac{\Pi_{h2*} e^{-M_+}}{M_+ (e^{M_+} - e^{-M_+})},$$

$$\Pi_{h*}(k, z) = e^{M_+(z+h)} + e^{-M_+(z+h)} - e^{M_+(z-h)} - e^{-M_+(z-h)},$$

$$\Pi_{hw}(y, t) = \int_0^{\infty} \frac{\theta_n^3 \Pi_{w*}}{k^2(k^2 - \theta_n^2)} dk,$$

$$\Pi_{w*}(k, y, t) = k \cos[k(y+t)] - k \cos(\theta_n t) \cos(ky) - \theta_n \sin(\theta_n t) \sin(ky);$$

$M_+ = \left(\frac{1}{4}\lambda^2 + k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Складова $\psi_w(y, z, t)$ описує n – модове поле внутрішніх хвиль, генерованих рухомим вихором.

Складова розв'язку $\psi_1(y, z, t)$ в рухомій системі координат, пов'язаній з вихором, при $\lambda \rightarrow 0$ з точністю до множника $\frac{1}{2}$ співпадає з розв'язком задачі про стаціонарний рух точкового вихора біля

твердої горизонтальної стінки в однорідному середовищі. В роботі [6] показано, що задача стаціонарного руху точкового вихора в необмеженому середовищі має два представлення розв'язку, один з яких в однорідному середовищі (центр вихора знаходиться в початку системи координат) представляється як

$$\psi_{s1}(y/z) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k|y|}}{k} \cos(kz) dk, \quad (20)$$

а другий співпадає з точністю до вказаного множника з першою складовою в $\psi_1(y, z, t)$ при $\lambda \rightarrow 0$ в рухомій системі координат, коли центр вихора також знаходиться в початку координат. Розрахунки картини обтікання вихора показали, що побудову ближнього поля для функції течії помітно ефективніше (з точки зору обчислювальної процедури) виконувати з використанням розв'язку (20). Тому в одержаному розв'язку (19) замість складової $\psi_1(y, z, t)$ використовується надалі рівнозначне представлення

$$\psi_{1*}(y, z, t) = -\frac{\Gamma_0 e^{\frac{\lambda}{2}(z-h)}}{2\pi} \int_0^\infty \Pi_{h1*} e^{-M_+|y+t|} dk,$$

$$\Pi_{h1*}(k, z) = \frac{1}{M_+} \{ \cos[k(z+h)] - \cos[k(z-h)] \},$$

яке при $\lambda \rightarrow 0$ дає з точністю до множника $\frac{1}{2}$ відповідний розв'язок для стаціонарного руху вихора біля стінки в однорідному середовищі, коли обтікання окремого вихора в необмеженому однорідному середовищі описується представленням (20). З розв'язку для $\psi(y, z, t)$ одержуються відповідні представлення для складових збуреної швидкості та амплітуд вертикальних зміщень:

$$w(y, z, t) = \frac{\Gamma_0 e^{\frac{\lambda}{2}(z-h)}}{4\pi} (w_1 + w_2 + w_w), \quad (21)$$

$$\eta(y, z, t) = \frac{\Gamma_0 e^{\frac{\lambda}{2}(z-h)}}{4\pi} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3), \quad (22)$$

де $w_1(y, z, t) = -\text{sign}(y) \int_0^\infty \Pi_{w1} e^{-M_+|y+t|} dk,$

$$\Pi_{w1}(k, z) = \cos[k(z+h)] - \cos[k(z-h)],$$

$$w_2(y, z, t) = -\int_0^\infty k \Pi_{h2} \sin[k(y+t)] dk,$$

$$w_3(y, z, t) = \frac{8}{\alpha^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \sin(\pi n z) \sin(\pi n h) \Pi_w,$$

$$\Pi_w(y, t) = \int_0^\infty \frac{\theta_n^3 \Pi_{w*}}{k(k^2 - \theta_n^2)} dk,$$

$$\Pi_{w*}(k, y, t) = k \sin[k(y+t)] - k \cos(\theta_n t) \sin(ky) + \theta_n \sin(\theta_n t) \cos(ky),$$

$$\eta_1 = \int_0^\infty \frac{1}{M_+} \Pi_{w1} [e^{-M_+|y+t|} - e^{-M_+|y|}] dk,$$

$$\eta_2 = \int_0^\infty \Pi_{h2} \{ \cos[k(y+t)] - \cos(ky) \} dk,$$

$$\eta_w = -\frac{8}{\alpha^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \sin(\pi n z) \sin(\pi n h) \Pi_{\eta_w},$$

$$\Pi_{\eta_w}(y_1, t) = \int_0^\infty \frac{\theta_n^3 \Pi_{\eta*}}{k(k^2 - \theta_n^2)} dk,$$

$$\Pi_{\eta*}(k, y_1, t) = \frac{k}{\theta_n} [\sin(ky) \sin(\theta_n t) + \cos(ky) [\cos(\theta_n t) - 2] + \cos[k(y+t)]] .$$

Одержаний розв'язок для амплітуд містить складові, які для скінчених y при $t \rightarrow \infty$ дають поле "заморожених" збурень, що протирічить фізиці руху рідкого середовища. Ці збурення забезпечують нульову початкову умову для поля амплітуд. Оскільки їх необхідно відняти від одержаного розв'язку, це означає, що для даної схеми руху початкові умови для амплітуд, на відміну від збурених функцій течії і швидкості, є ненульові. Фізично коректний розв'язок для $\eta(y, z, t)$, таким чином, випливає з (22) після вилучення там з $\eta_1(y, z, t)$, складової з $e^{-k|y|}$, а з $\eta_2(y, z, t)$ і $\eta_w(y, z, t)$ відповідно складових з $\cos(ky)$.

Потужність випромінюваної енергії для даної схеми руху на підставі (17) і (21) представляється виразом

$$W(t) = \frac{2\Gamma_0^2}{\pi\alpha^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \sin^2(\pi n h) \int_0^\infty \frac{\theta_n^3 \Pi_W}{k(k^2 - \theta_n^2)} dk, \quad (23)$$

$$\Pi_W(k, t) = k \cos(\theta_n t) \sin(kt) + \theta_n \sin(\theta_n t) \cos(kt).$$

Для побудови і аналізу збурених рухомим вихором гідродинамічних полів у даній схемі руху зручно представити їх у рухомій системі координат такій, що її центр рухається горизонтально разом з вихором. Відповідні представлення одержуються після заміни горизонтальної координати y на $y_1 - t$. В цій системі координат амплітуда вертикального зміщення з розв'язку (22), після віднімання в ньо-

му "заморожених" складових, визначається як

$$\eta(y_1, z, t) = \frac{\Gamma_0 e^{\frac{\lambda}{2}(z-h)}}{4\pi} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_w), \quad (24)$$

де

$$\eta_1(y_1, z, t) = \int_0^\infty \frac{1}{M_+} \Pi_{w1} e^{-M_+ |y_1|} dk,$$

$$\eta_2(y_1, z, t) = \int_0^\infty \Pi_{h2} \cos(ky_1) dk,$$

$$\eta_w(y_1, z, t) = -\frac{8}{\alpha^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \sin(\pi n z) \sin(\pi n h) \Pi_{\eta w},$$

$$\Pi_{\eta w}(y_1, t) = \int_0^\infty \frac{\theta_n^3 \Pi_{\eta*}}{k(k^2 - \theta_n^2)} dk,$$

$$\Pi_{\eta*}(k, y_1, t) = \frac{k}{\theta_n} \sin[k(y_1 - t)] \sin(\theta_n t) + \cos[k(y_1 - t)] \cos(\theta_n t) + \cos(ky_1).$$

5. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Для ілюстрації характеру гідродинамічної картини обтікання вихора на підставі одержаного розв'язку виконані чисельні розрахунки амплітудних картин і потужності випромінюваної вихором енергії в рухомій системі координат для різних значень визначальних параметрів α , λ , горизонту руху та інтервалу часу руху, але при постійному значенні інтенсивності вихора $\Gamma_0 = 0.5$. В силу лінійності задачі зміна амплітуд і збуреної швидкості пропорційна зміні Γ_0 , а зміна потужно-

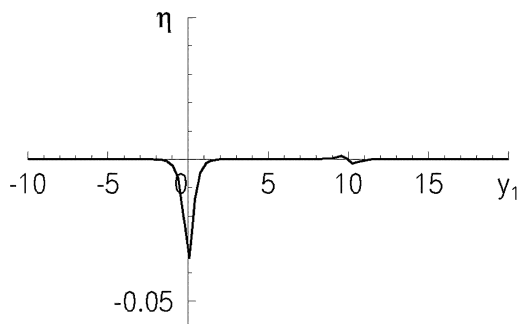


Рис. 1. Амплітудна картина при $\lambda = 10^{-5}$, $\alpha = 10^{-2}$, $z = 0.2$, $t = 10$

сті випромінюваної енергії пропорційна Γ_0^2 . Розрахунки виконані в діапазоні зміни t від 10 до 100, що дозволили виконати аналіз особливостей формування збурених гідродинамічних полів.

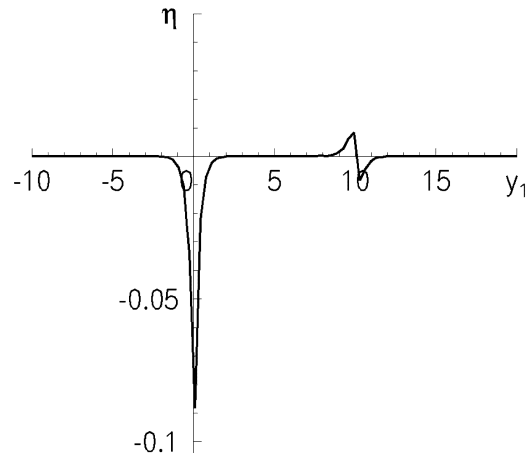


Рис. 2. Амплітудна картина при $\lambda = 10^{-5}$, $\alpha = 10^{-2}$, $z = 0.4$, $t = 10$

Для випадку слабкої стратифікації характерна картина амплітуд збурень представлена на рис. 1 і 2 для горизонту руху вихора $h = 0.4$ і $\lambda = 10^{-5}$, $\alpha = 10^{-2}$ відповідно для двох розрахункових горизонтів $z = 0.2$ і $z = 0.4$ в момент часу $t = 10$. Як видно, інтенсивніші збурення мають місце на горизонті руху вихора. Розрахунки амплітудних картин для інших горизонтів підтверджують цю закономірність. Інакше може бути лише при наявності в околі вихора "атмосфери" вихрової пари, особливості утворення якої проаналізовані у [8, 9]. Тут ці випадки не розглядаються. Тому надалі розрахунки амплітудних картин виконані лише для одного горизонту руху вихора $h = 0.4$. Для початкового періоду часу характерною особливістю гідродинамічної картини руху в збуреному середовищі є наявність двох характерних областей за вихором. Це область безпосередньо в околі вихора і область, яка еволюціонує в околі точки старту. В околі вихора достатньо швидко формується течія, подібна стаціонарній картині його обтікання. В околі точки старту в початковий період руху утворюється зона з початковими зміщеннями частинок середовища, від якої в бік вихора та в протилежному напрямку поширюються асиметричного характеру одне відносно другого збурення. Між цими характерними областями знаходиться проміжна область, в якій формується гідродинамічна картина, що з часом (при $t \rightarrow \infty$) прямує до відповідного стаціонарного вигляду. На рис. 3 представлена амплітудна картина на горизонті руху вихора при $t = 50$. З порівняння амплітудних картин для цих двох моментів часу випливає, що в околі рухомого вихора вже при $t = 10$ практично має місце сформована стаціонарна картина його обтікання,

яка в подальшому не змінюється. В той самий час структура області в околі точки старту (на рис. 1 і 2 це зони в околі $y = 10$, а на рис. 3 – зона в околі $y = 50$) продовжує інтенсивно змінюватись. Характер цієї еволюції нагадує нестационарний процес генерації поля внутрішніх хвиль від перемішаної в початковий момент циліндричної області. Однак, на відміну від цього процесу, поширення збурень, утворених вихором в початковий період руху в околі точки старту, має, як вище відмічено, асиметричний характер відносно цієї точки.

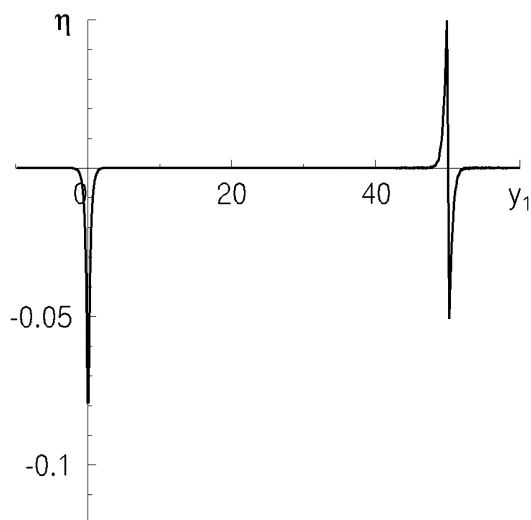


Рис. 3. Амплітудна картина при $\lambda = 10^{-5}$, $\alpha = 10^{-2}$, $z = 0.4$, $t = 50$

Проміжна область між ближньою до вихора областю протяжністю близько двох товщин шару середовища і зоною збурень в околі старту має протягом певного початкового інтервалу руху значно менші величини амплітуд зміщення точок середовища. Як видно, для даного режиму руху в початковий період руху амплітудні збурення в околі вихора після першого етапу зростання починають зменшуватись, прямуючи до свого стаціонарного вигляду. В області точки старту процес зростання амплітуд збурень продовжується протягом тривалішого періоду. Це підтверджується порівнянням амплітудних картин рис. 2 та 3, де спостерігається вже незначне зменшення максимуму амплітуд в околі вихора в період часу між $t = 10$ і $t = 100$ і помітне зростання відповідних максимумів у зоні точки старту. Однак з часом збурення в області точки старту, досягнувши своїх максимальних значень, затухатимуть за рахунок дисперсійних ефектів стратифікованого середовища. В цілому ця область існує протягом достатньо тривалого періоду часу. Про швидке набуття гідроди-

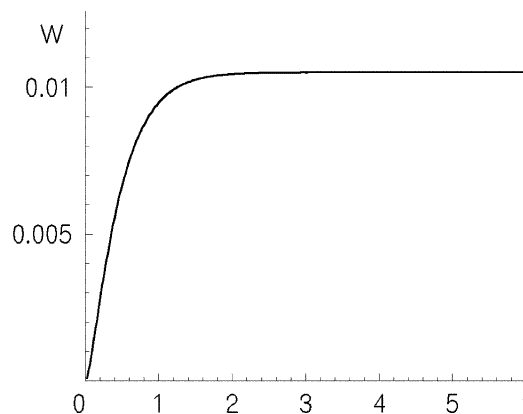


Рис. 4. Потужність випромінюваної енергії при $\lambda = 10^{-5}$, $\alpha = 0,01$, $h = 0.5$

намічної картини в області, близькій до вихора, вигляду, відповідного стаціонарному режиму руху, свідчить також характер зміни величини потужності, яка затрачується на генерацію внутрішніх хвиль (тобто, випромінюється в навколишнє середовище). З рис. 4 можна зробити висновок, що вже при t , децю більшому від 2, величина $W(t)$ виходить на постійне значення для розглянутого варіанту з $\alpha = 0.01$. Одержане постійне значення $W(t)$ відповідає енергії внутрішніх хвиль, які випромінюються в область позаду вихора і беруть участь у формуванні відповідного стаціонарного гідродинамічного поля.

При посиленні стратифікації картина збурень за вихором змінюється. З амплітудних картин на горизонті руху вихора при $\lambda = 10^{-3}$, $\alpha = 0.1$, представлених на рис. 5 і 6 для різних моментів часу, видно, що головні зміни відбуваються в околі вихора та в області старту. В околі вихора амплітуда збурень зростає при зростанні α . Суттєві зміни відбуваються в зоні стартової точки. Тут з часом формується область чітко виражених хвильових рухів, які поширюються в протилежних напрямках. Зі збільшенням величини параметра α для однакових інтервалів часу після старту збільшується ширина цієї області та значення амплітуд, а також розширюється видимий спектр присутніх там внутрішніх хвиль. Про це можна судити з порівняння рис. 5 і 6 з рис. 7 і 8 відповідно, на яких наведена амплітудна картина також на горизонті руху вихора при $\lambda = 0,1$, $\alpha = 1$ і $t = 100$. При цьому незмінним залишається асиметричний характер поширення ВХ від області збурень в околі точки старту. Порівняння амплітудних картин на рис. 5–8 чітко показує, що з часом збурення від цієї складової розв'язку, після досягнення сво-

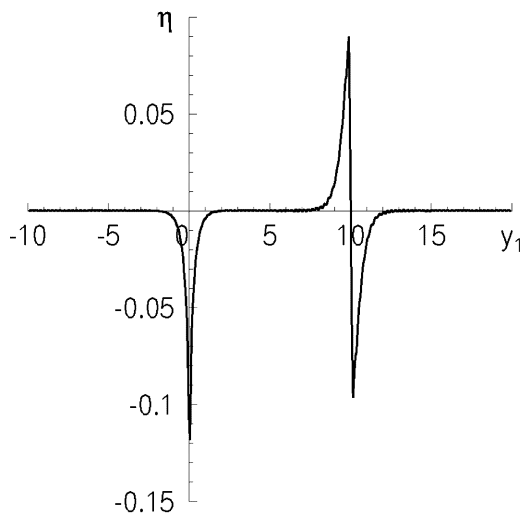


Рис. 5. Амплітудна картина при $\lambda = 10^{-3}, \alpha = 0.1, z = 0.4, t = 10$

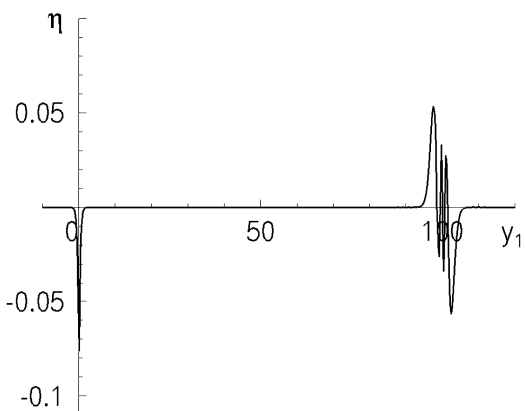


Рис. 6. Амплітудна картина при $\lambda = 10^{-3}, \alpha = 0.1, z = 0.4, t = 100$

го максимуму, затухають.

Аналіз приведених амплітудних картин показує, що при наявності стратифікації середовища в околі вихора в початковий період руху має місце зростання амплітуд, причому воно тим інтенсивніше, чим більше величина α . З часом, однак, характер такої зміни набуває протилежного характеру і амплітуди починають зменшуватись, прямуючи до своїх значень, відповідних стаціонарному режиму руху. Як видно з наведених результатів, вже при $\alpha = 0.1$ на горизонті руху вихора $h = 0.4$ в зоні $y_1 \rightarrow 0$ помітною робиться зміна амплітуд збурення в бік їхнього зростання. Це відбувається за рахунок зростання вкладу у розв'язок складової $\eta_w(y, z, t)$ та зміни локальної густини середовища на горизонті руху вихора. При $\alpha = 1$ ампліту-

ди збурення, що набули стаціонарного значення, більші порівняно з режимом руху при $\alpha = 0.1$ приблизно на 50 відсотків. Якщо розглядати за-

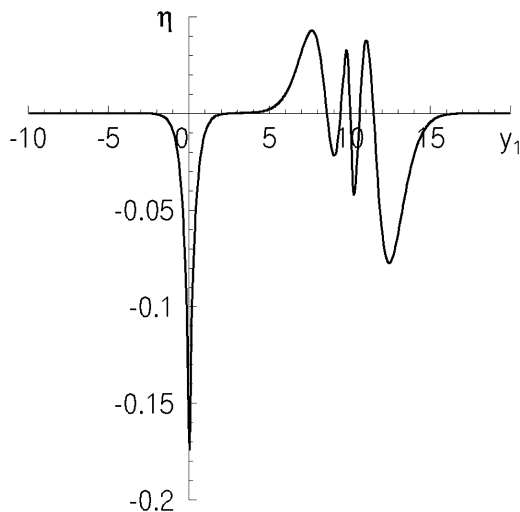


Рис. 7. Амплітудна картина при $\lambda = 0.1, \alpha = 1, z = 0.4, t = 10$

дачу руху підводного крила в середовищі з такою стратифікацією, то динаміка його руху в цьо-

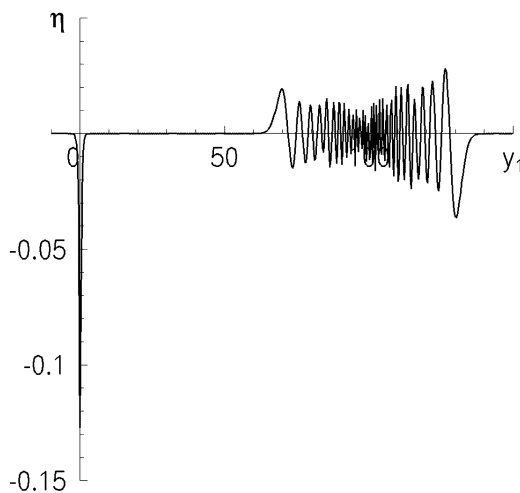


Рис. 8. Амплітудна картина при $\lambda = 0, \alpha = 1, z = 0.4, t = 100$

му випадку може істотно змінитись. Слід відмітити, однак, що наведена оцінка має місце для сильно стратифікованих середовищ, відповідних яким у реальних морях і океанах Землі не існує. Значення α , розраховані для рухомих об'єктів навіть для максимальних локальних градієнтів густини в реальних морях, змінюються в діапазоні $0.005 < \alpha < 0.02$. Для такого діапазону впливом

стратифікації на динаміку рухомих підводних об'єктів можна знехтувати. Стратифікація зі значеннями $\alpha > 0.1$, коли починає спостерігатись її вплив на динаміку руху тіл, може мати місце лише для деяких технологічних середовищ а також, можливо, на поверхнях інших планет, де присутні подібні до Землі моря, заповнені іншою рідиною.

В області старту при збільшенні величини α більш чітко формується область внутрішніх хвиль, які поширюються в обидва боки від точки старту і мають модову структуру, як це впливає із вигляду складової розв'язку $\eta_w(y, z, t)$. Це добре видно з представленої на рис. 8 амплітудної картини, де можна виокремити зони існування перших двох мод цих хвиль. Характер поширення ВХ подібний випадку генерації ВХ від початково перемішаної двовимірної області і може бути проаналізований на підставі дисперсійного співвідношення, одержаного в попередньому розділі:

$$\theta_n = \alpha k \left[k^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 + (\pi n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Зокрема, з нього визначається швидкість поширення переднього фронту n -моди внутрішніх хвиль, яка відповідає величині фазової c_ϕ (і групової c_g) швидкості для $k \rightarrow 0$. В даному випадку

$$c_{\phi n}(0) = c_{gn}(0) = \frac{\alpha}{\left[\frac{1}{4} \lambda^2 + (\pi n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

При достатньо великих значеннях t кожна із мод ВХ за рахунок різних швидкостей поширення їхніх передніх фронтів знаходиться в певній області середовища (в нерухомій системі координат це $|y| \leq c_{gn}t$) і, принаймні, перші дві-три з них можуть бути виділені безпосередньо з вигляду хвильової картини. Саме це і видно з амплітудної картини рис. 8, де при $t = 100$ і $\alpha = 1$ можна виділити перші дві моди ВХ, які поширюються від точки старту (в рухомій системі координат це відповідає точці з координатою $y_1 = t$) і визначити швидкості їхнього поширення, які відповідають наведеному вище співвідношенню. Цікаво відмітити при цьому, що амплітуди тієї частини ВХ, що поширюються від області старту в бік руху вихора, відносно менші від відповідних ВХ, які поширюються в протилежний бік. Про це можна судити з хвильової картини рис. 7 і 8.

При слабкій стратифікації (навіть при $\alpha = 0.1$) для такого ж значення часу $t = 100$, як це видно з рис. 6 і 7, структура збуреної картини руху в області точки старту ще не дає можливості виділити наявність сформованих там хвильових рухів і, тим більше, виокремлених мод ВХ.

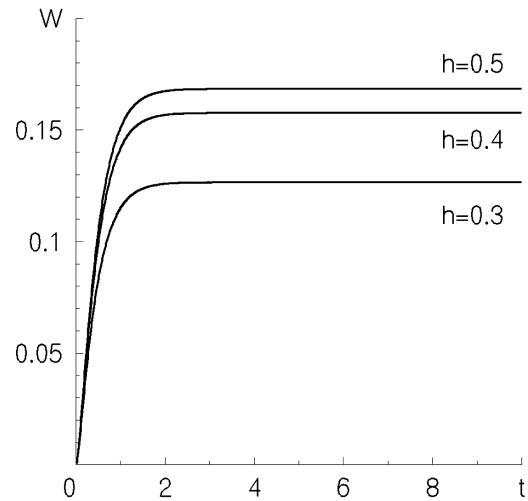


Рис. 9. Потужність випромінюваної енергії при $\lambda = 10^{-3}$, $\alpha = 0, 1$, $h = 0.5$

Характер зміни потужності випромінюваної енергії при посиленні стратифікації практично не змінюється, лише її величина зростає приблизно пропорційно значенню α , а інтервал часу виходу цієї величини на стаціонарне значення дещо зростає. Про це можна судити з порівняння відповідних кривих на рис. 5 і 9. На рис. 9 наведено зміну в часі потужності випромінювання енергії для горизонтів руху вихора $h = 0.3$, $h = 0.4$ та $h = 0.5$ при $\alpha = 0, 1$, $\lambda = 10^{-3}$. З порівняння відповідних кривих видно, що максимум випромінюваної вихором енергії має місце при $h = 0.5$.

ВИСНОВКИ

У виконаному дослідженні зроблена загальна постановка лінійної задачі про нестационарний рух зі стану спокою плоского точкового вихора в шарі скінченної товщини неперервно стратифікованого середовища з експоненційним законом зміни густини середовища по вертикалі. Розроблена відповідна математична модель з використанням рівнянь Ейлера в загальній формі наближення Бусинеска. З застосуванням методу інтегральних перетворень одержано загальне представлення розв'язку, на основі якого досліджено схему руху, коли в початковий момент часу вихор починає рівномірний горизонтальний рух. Розв'язок одержано у вигляді квадратур. Аналіз виконаних чисельних експериментів для такої схеми руху дозволяє зробити наступні висновки.

1. В початковий період часу руху вихора формуються дві характерні області збурень – в околі

самого вихора та в околі точки його старту. Картина збурень у першій області (в околі вихора) швидко прямує до стаціонарного стану, подібно до випадку нестратифікованого середовища. Еволюція збурень другої області триває протягом достатньо тривалого періоду часу і вона схожа на еволюцію внутрішніх хвиль від двовимірної перемішаної області, хоч і має асиметричний характер поширення одна відносно другої в обох своїх зонах, одна з яких поширюється в бік руху вихора, а інша – в протилежний бік. Між цими характерними областями знаходиться проміжна зона зі значно меншою інтенсивністю збурень затухаючого та хвильового характеру. З часом перша і перехідна області формують стаціонарну картину збуреного середовища за рухомим вихором, а збурення в другій області після певного періоду зростання затухають через механізм дисперсії стратифікованого середовища.

2. Особливістю формування амплітудної картини в околі вихора є те, що протягом невеликого проміжку часу амплітуди збурень зростають до певного максимуму, після чого зменшуються до незмінних у подальшому величин, значення яких тим більше, чим сильніша стратифікація.

3. Внутрішні хвилі в околі точки старту формуються в такий спосіб, що низькочастотна частина їхнього спектру формується тим швидше, чим більше значення параметра α .

4. Головними параметрами, які визначають наявність і характер генерованих рухомим вихором внутрішніх хвиль та амплітудну картину в околі вихора, є густинне число Фруда α і величина λ , причому визначальним з них є α . Для значень α , відповідних реальним морям і океанам, коли значення цього параметра, розраховані навіть для максимальних локальних градієнтів густини середовища, змінюються для реальних рухомих об'єктів в діапазоні $0.005 < \alpha < 0.02$, впливом стратифікації на динаміку руху підводних тіл можна знехтувати. Для випадку сильно стратифікованих середовищ, коли реалізуються режими руху з великими значеннями α , вплив стратифікації на динаміку руху тіла може бути істотним.

5. Величина потужності випромінюваної при русі вихора енергії протягом інтервалу часу близько двох характерних одиниць плавно наростає від нуля до певного значення, відповідного стаціонарному

режиму руху, яке зростає при посиленні стратифікації приблизно пропорційно значенню α .

В напрямку подальших досліджень нестационарних рухів вихорів представляє інтерес розглянути інші схеми руху, зокрема, з періодичними змінами їхніх визначальних параметрів.

1. Степаняц Н.А., Стурова И.В., Теодорович А.В. Линейная теория поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники, Серия "Механика жидкости и газа.– М.:– ВИНТИ, 1987.– Т. 21.– С. 92–179.
2. Басин М.Я., Шадрин И.П. Гидродинамика крыльев вблизи границы раздела сред.– Л.: Судостроение, 1980.– 304 с.
3. Arendt S.C. Vorticity in stratified fluid I: general formulation. // Geophys. Astrophys. Fluid Den.– 1993.– 68.– P. 59–83.
4. Arendt S.C. Vorticity in stratified fluid II: finite cross-section filaments and rings. // Geophys. Astrophys. Fluid Den.– 1993.– 70.– P. 161–193.
5. Arendt S.C. Two-dimensional vortex dynamics in stratified barotropic fluid. // J. Fluid Mech.– 1996.– 314.– P. 139–161.
6. Janowitz G.S. Line singularities in inbounded stratified fluid // J.Fluid Mech.– 1974.– 66, 3.– P. 455–464.
7. Стеценко О.Г. Лінійна задача про стаціонарний рух вихора у стратифікованому середовищі // Прикл. гідромеханіка.– 2004.– 6(78), 1.– С. 62–68.
8. Стеценко О.Г. Стаціонарний рух вихора біля твердої стінки у стратифікованому середовищі // Прикл. гідромеханіка.– 2006.– 8(80),4.– С. 58–64.
9. Стеценко О.Г. Стаціонарний рух точкового вихора в шарі скінченної товщини стратифікованого середовища // Прикл. гідромеханіка.– 2010.– 12(84), 1.– С. 68–75.
10. Шебалов А.Н. О волновом сопротивлении и подъемной силе плоского профиля произвольной формы при неустановившемся движении под свободной поверхностью // Прикл. гидромеханика.– 1962.– 28, № 6.– С. 1104–1111.
11. Шебалов А.Н. Неустановившееся движение плоского контура произвольной формы под поверхностью раздела жидкостей различной плотности // Тр.Лен.Корабл.Ин-та.– 1971.– № 107.– С. 52–58.
12. Стеценко О.Г. Нестационарный рух точкового вихора у двохшаровій рідині // Прикл. гідромеханіка.– 2012.– 14(86), 2.– С. 70–84.
13. Стеценко О.Г. Наведенне магнітне поле, обумовлене вертикальним рухом вихорової пари у стратифікованому середовищі // Прикл. гідромеханіка.– 2010.– 12(84), 2.– С. 70–84.
14. Городцов В.А., Теодорович В.В. Плоская задача для внутренних волн, порождаемых движущимся сингулярным источником // МЖГ.– 1981.– 6.– С. 77–83.
15. Стеценко О.Г. Динаміка стаціонарного руху вищроджерела у стратифікованому середовищі // Прикл. гідромеханіка.– 2006.– 9(80), 4.– С. 66–77.