

УДК 532.465

# ПОЛУНЕЯВНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕГИДРОСТАТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В $\sigma$ -СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

А. НЕСТЕРОВ

*Worley Parsons Engineering Pty Ltd., Dubai, UAE*

Получено 31.10.2011

Представлен метод численного расчета негидростатических течений со свободной поверхностью в  $\sigma$ -системе координат, который основан на разделении давления на гидростатическую составляющую и поправку к ней, вычисляемые поэтапно на каждом шаге интегрирования. Эта поправка давления находится путем решения системы линейных уравнений с 25-диагональной матрицей, получающейся в результате подстановки дискретного выражения для поля скорости в дискретное уравнение неразрывности. Применение предложенного метода показало хорошие результаты сравнения с приближенными аналитическими решениями задачи про волновые колебания в прямоугольном сосуде, с лабораторными измерениями распространения волн над подводной преградой, а также с измерениями процесса перемешивания двух жидкостей различной плотности.

Представлений метод чисельного розрахунку негідростатичних течій з вільною поверхнею в  $\sigma$ -системі координат, заснований на поділі тиску на гідростатичну складову та поправку до неї, які обчислюються поступово на кожному кроці інтегрування. Ця поправка тиску знаходиться шляхом розв'язку системи лінійних рівнянь з 25-діагональною матрицею, яка одержується в результаті підстановки дискретного виразу для поля швидкості в дискретне рівняння нерозривності. Застосування запропонованого методу показало гарні результати порівняння з наближеними аналітичними розв'язками задачі про хвильові коливання у прямокутному резервуарі, з лабораторними вимірами розповсюдження хвиль над підводною перешкодою, а також із експериментальними дослідженнями процесу перемішування двох рідин різної щільності.

A numerical method for free-surface non-hydrostatic flow computation in  $\sigma$ -coordinate system is presented. The method is based on the idea of the splitting of the pressure into a hydrostatic component and a correction term evaluated in a subsequent manner at each integration step. This correction term is computed by solving a system of linear equations with 25-diagonal matrix, which is obtained by substituting a discrete formulation for the velocity field into the discrete continuity equation. Application of the proposed approach has shown a fairly good agreement with the approximate analytical solution of the short waves evolution in a rectangular basin problem, experimental data on waves propagation over a submerged bar in a flume, and experimental data on mixing of two fluids of different densities.

## ВВЕДЕНИЕ

В задачах моделирования течений со свободной поверхностью часто используется так называемое приближение гидростатики [1]. Это приближение значительно более эффективно с вычислительной точки зрения по сравнению с решением полной системы уравнений движения, в то время как точность решений в большинстве случаев остается удовлетворительной. Однако в настоящее время растет интерес именно к тем задачам, к которым гидростатическое приближение неприменимо. В частности, это задачи, относящиеся к распространению коротких поверхностных волн; обтеканию подводных препятствий; течению и переносу веществ вблизи водосбросов; переносу и взбалтыванию придонных наносов при землечерпательных и мелиоративных работах. Такие инженерные задачи, как правило, решаются путем применения соответствующих специфических моделей. Как следствие, разработка численной модели, которая позволила бы решать вышеупомя-

нутые задачи, оставаясь при этом эффективным средством расчета гидростатических течений, является актуальной проблемой настоящего.

Помимо физики описываемых процессов, существующие модели течений со свободной поверхностью отличаются друг от друга системами координат и численными реализациями. В то время как ранние модели использовали, как правило,  $z$ -систему координат, уравнения более поздних моделей часто записаны в так называемой  $\sigma$ -системе. Популярность последней обязана развитию гидростатических моделей, таких как [9]. Численная же реализация решения негидростатической системы уравнений, записанной в  $\sigma$ -системе координат, значительно осложнена даже в случаях моделирования двумерных течений (в вертикальной плоскости), как видно на примерах [19, 21]. Позднее в [18] был представлен алгоритм трехмерной модели, основанный на решении уравнения Пуассона, записанного в  $\sigma$ -системе координат. Однако этот алгоритм не имеет преимуществ при расчете гидростатических течений, поскольку решать систему линейных уравнений с 19-диагональной ма-

трицей, возникающей в результате дискретизации уравнения Пуассона, необходимо на каждом шаге интегрирования.

С целью повышения эффективности моделей в применении к гидростатическим задачам, рядом авторов, включая [13, 21], было предложено представлять давление в виде суммы гидростатической компоненты и поправки к ней. В частности, в [13] подробно изложен алгоритм расчета, разработанный для  $z$ -системы, в котором эта поправка находилась путем подстановки дискретных выражений для поправки поля скорости в дискретное уравнение неразрывности, и последующего решения системы линейных уравнений с 7-диагональной матрицей. Позднее подобный метод был применен в [14] для модели, которая также использовала численные  $z$ -слои по вертикали, но неструктурированные треугольные сетки по горизонтали. Разделение давления на гидростатическую компоненту и поправку к ней осуществляется и в некоторых  $\sigma$ -моделях. Например, в [17] была представлена негидростатическая версия популярной модели океанических течений POM (Princeton Ocean Model), в которой для расчета уровня поверхности применялся метод расщепления на моды [9], а поправка давления находилась путем решения дискретного уравнения Пуассона, следуя [18].

В данной работе предложен новый метод расчета негидростатических течений со свободной поверхностью, по сути являющийся применением основной идеи метода [13] к уравнениям, записанным в  $\sigma$ -системе координат.

## 1. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

В локальной системе координат  $(x_*, y_*, z_*)$ , привязанной к географическим координатам, в которой ось  $z_*$  направлена противоположно силе притяжения Земли, а оси  $x_*$  и  $y_*$  направлены вдоль параллели и меридиана соответственно, исходные уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу, имеют вид [14]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t_*} + u \frac{\partial u}{\partial x_*} + v \frac{\partial u}{\partial y_*} + w \frac{\partial u}{\partial z_*} - \bar{f}v + \hat{f}w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_*} + \mathcal{F}_{x_*}, \\ \frac{\partial v}{\partial t_*} + u \frac{\partial v}{\partial x_*} + v \frac{\partial v}{\partial y_*} + w \frac{\partial v}{\partial z_*} + \bar{f}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_*} + \mathcal{F}_{y_*}, \\ \frac{\partial w}{\partial t_*} + u \frac{\partial w}{\partial x_*} + v \frac{\partial w}{\partial y_*} + w \frac{\partial w}{\partial z_*} - \hat{f}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_*} - g + \mathcal{F}_{z_*}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_*} + \frac{\partial v}{\partial y_*} + \frac{\partial w}{\partial z_*} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $t_*$  – время;  $(u, v, w)$  – вектор скорости;  $p$  – дав-

ление;  $g$  – гравитационное ускорение;  $\rho$  – плотность;  $(\mathcal{F}_{x_*}, \mathcal{F}_{y_*}, \mathcal{F}_{z_*})$  – проекции силы вязкости (в общем случае турбулентной) на оси координат;  $\bar{f} = 2\Omega \sin \phi$  и  $\hat{f} = 2\Omega \cos \phi$  – коэффициенты проекций кориолисовой силы, зависящие от угловой скорости вращения Земли  $\Omega$  и долготы  $\phi$ .

Уравнения (1), описывающие гидродинамику водоемов, размеры которых значительно меньше планетарных, следуют из уравнений движения, записанных во вращающейся сферической системе координат, к которым применен ряд упрощений, подробно обсуждаемых, например, в [1, 2, 4, 9].

Система уравнений (1) должна быть решена в области, которая ограничена свободной поверхностью  $z_* = \eta(x_*, y_*, t_*)$  сверху и дном  $z_* = -H(x_*, y_*)$  снизу. Поэтому вместо  $z_*$ -системы координат широко используется так называемая  $\sigma$ -система координат [9,18], которая связана с  $z_*$ -системой соотношениями:

$$x = x_*, \quad y = y_*, \quad \sigma = (z_* - \eta)/D, \quad t = t_*, \quad (2)$$

где  $D = H + \eta$  – полная глубина. Суть такой трансформации заключается в том, что  $\sigma \in [-1, 0]$  во всей области решения. Учитывая, что

$$\frac{\partial \{D, \eta\}}{\partial \xi} = \frac{\partial \{D, \eta\}}{\partial \xi_*} + \underbrace{\frac{\partial \{D, \eta\}}{\partial \sigma}}_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial \{D, \eta\}}{\partial \xi_*},$$

где  $\xi$  означает одно из  $t, x, y$ , можно показать, что операторы дифференцирования трансформируются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_*} = \frac{\partial}{\partial \xi} - J_\xi \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial z_*} = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad (3)$$

$$\text{где } J_\xi = \frac{1}{D} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \sigma \frac{\partial D}{\partial \xi} \right). \quad (4)$$

С тем, чтобы негидростатическая модель оставалась эффективным средством расчета гидростатических течений, в [13, 21] и других работах было предложено представлять давление  $p$  в виде суммы гидростатической  $p_h$  и негидростатической  $p_{nh}$  компонент. В общем виде, согласно [9],  $p_{nh}$  выражается как:

$$p_h(x, y, \sigma, t) = p_a + g\rho_0(\eta - z) + \int_z^\eta \rho'(x, y, \zeta, t) d\zeta, \quad (5)$$

где  $p_a$  – давление воздуха над поверхностью, а отклонение плотности  $\rho'$  от постоянного значения  $\rho_0$  считается малым ( $|\rho'| \ll \rho_0$ ).

В результате трансформаций (3), пренебрегая слагаемыми порядка  $|p_{nh}\rho'|/(\rho\rho_0)$ , система уравнений (1) приобретает консервативный вид, подобный [9], но с учетом слагаемых, содержащих

$q = p_{nh}/\rho_0$  и уравнения для вертикальной компоненты скорости  $W$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial DU}{\partial t} + \frac{\partial DU^2}{\partial x} + \frac{\partial DUV}{\partial y} + \frac{\partial \omega U}{\partial \sigma} - D(\bar{f}V - \hat{f}W) = \\ = -D\left(g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} - J_x \frac{\partial q}{\partial \sigma}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\nu}{D} \frac{\partial U}{\partial \sigma}\right) + F_x + B_x, \\ \frac{\partial DV}{\partial t} + \frac{\partial DUV}{\partial x} + \frac{\partial DV^2}{\partial y} + \frac{\partial \omega V}{\partial \sigma} + D\bar{f}U = \\ = -D\left(g\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y} - J_y \frac{\partial q}{\partial \sigma}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\nu}{D} \frac{\partial V}{\partial \sigma}\right) + F_y + B_y, \\ \frac{\partial DW}{\partial t} + \frac{\partial DUW}{\partial x} + \frac{\partial DVW}{\partial y} + \frac{\partial \omega W}{\partial \sigma} - D\hat{f}U = \\ = -\frac{\partial q}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\nu}{D} \frac{\partial W}{\partial \sigma}\right) + F_\sigma. \end{cases} \quad (6)$$

Так же, как в [9], в уравнениях (6) вводится преобразованная "вертикальная" компонента скорости  $\omega$ , которая связана с  $W$  соотношением:

$$\omega = W - D(J_x U + J_y V + J_t). \quad (7)$$

Компоненты бароклинной силы  $B_x$ ,  $B_y$  формулируются так же, как в [9]. Касательные напряжения и, как следствие, компоненты силы вязкости  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_\sigma$  формулируются в упрощенном виде [9] с коэффициентом горизонтальной вязкости, описываемым параметризацией Смагоринского, и коэффициентом вертикальной вязкости, вычисляемым согласно  $k/\epsilon$  модели турбулентности [10].

Уравнение неразрывности в  $\sigma$ -системе координат имеет вид [9,18]:

$$\frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (8)$$

которое также можно переписать в иной форме без производных по времени:

$$\frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \sigma}(J_x DU + J_y DV) = 0. \quad (9)$$

## 2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

### 2.1. Краткий обзор алгоритма расчета

В данной модели применяются разнесенные сетки [5]. Пространственное расположение переменных, показанное на рис. 1, является таким же, как в [9]. Компоненты скорости  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $\omega$  и коэффициенты  $J_x$ ,  $J_y$  задаются на соответствующих гранях численной ячейки  $(i, j, k)$ ;  $q$ ,  $\rho$  и другие скаляры  $C$  задаются в ее центре.

А. Нестеров

Алгоритм расчета следует идее, предложенной в [13], и разделяется на следующие этапы.

1. Вычисление адвективных и кориолисовых слагаемых, а также горизонтальной вязкости и бароклинной сил по явным схемам (см. [9,18, 21, 19,5,16]), включая уравнение для  $W$ .

2. Вычисление слагаемых вертикальной вязкости по неявной схеме [12, 13]. При этом компоненты баротропной силы учитываются, исходя из полунявных дискретизаций вида:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{i-1/2,j} \approx (1-\theta) \frac{\eta_{i,j}^n - \eta_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \theta \frac{\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x}, \quad (10)$$

где фактор неявности  $\theta \in (1/2, 1]$  обеспечивает безусловную устойчивость схемы по отношению к волновому числу Курранта  $\sqrt{gD}\Delta t/\Delta x$ ,  $\Delta t$  – шаг интегрирования по времени.

3. Нахождение "гидростатического" уровня поверхности  $\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}$  из системы линейных уравнений с 5-диагональной матрицей [11, 12, 13] и соответствующая коррекция поля скорости.

4. Вычисление поправки давления  $q$  и соответствующая коррекция полей скорости и уровня поверхности.

Этапы 1–3 подробно описаны в упомянутой литературе. Предметом обсуждения данной работы является составление системы линейных уравнений для  $q$  путем подстановки дискретных выражений для негидростатической поправки скорости в дискретное уравнение неразрывности.

### 2.2. Уравнение для негидростатической поправки давления внутри расчетной области

Для простоты будем рассматривать постоянный в  $\sigma$ -системе размер численной ячейки  $\{\Delta x, \Delta y, \Delta \sigma\} = \text{const}$ . Выражения (4) для  $\xi = x$  и  $\xi = y$  дискретизируются в виде:

$$\begin{aligned} J_{x,i,j,k} &= [\eta_{i,j}^n - \eta_{i-1,j}^n + \sigma_k (D_{i,j}^n - D_{i-1,j}^n)] / (\Delta x D_{i-\frac{1}{2},j}^n), \\ J_{y,i,j,k} &= [\eta_{i,j}^n - \eta_{i,j-1}^n + \sigma_k (D_{i,j}^n - D_{i,j-1}^n)] / (\Delta y D_{i,j-\frac{1}{2}}^n). \end{aligned} \quad (11)$$

Будем дискретизировать уравнение неразрывности (8) как:

$$\begin{aligned} & \left( D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,k}^{n+1} - D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,k}^{n+1} \right) / \Delta x + \\ & + \left( D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,k}^{n+1} - D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,k}^{n+1} \right) / \Delta y + \\ & + \left( \omega_{i,j,k}^{n+1} - \omega_{i,j,k+1}^{n+1} \right) / \Delta \sigma + \left( \eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n \right) / \Delta t = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $D_{i\pm 1/2,j}^{n+1} = (D_{i\pm 1,j}^{n+1} + D_{i,j}^{n+1})/2$ ;  $D_{i,j\pm 1/2}^{n+1} = (D_{i,j\pm 1}^{n+1} + D_{i,j}^{n+1})/2$ .

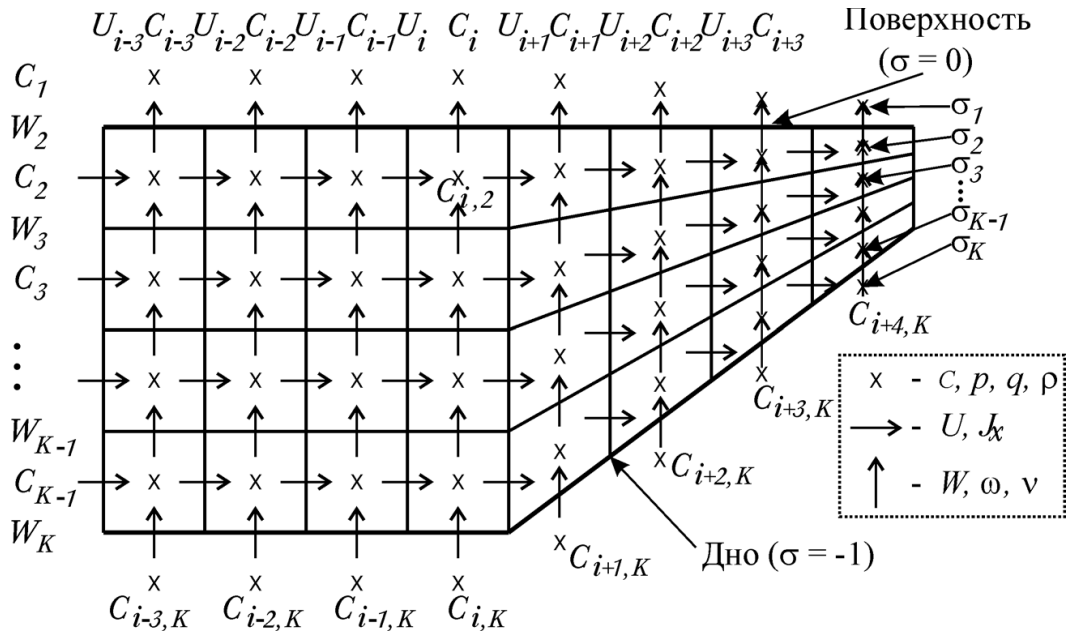


Рис. 1. Пространственное расположение дискретных переменных в разнесенных сетках

Дискретизируем далее (7) как:

$$\begin{aligned} \omega_{i,j,k}^{n+1} = & W_{i,j,k}^{n+1} - (1 + \sigma_k) (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n) / \Delta t - 1/4 \times \\ & \times \left\{ J_{x_{i,j,k}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,k}^{n+1} + J_{x_{i,j,k-1}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,k-1}^{n+1} + \right. \\ & + J_{x_{i+1,j,k}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,k}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,k-1}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,k-1}^{n+1} + \\ & + J_{y_{i,j,k}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,k}^{n+1} + J_{y_{i,j,k-1}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,k-1}^{n+1} + \\ & \left. + J_{y_{i,j+1,k}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,k}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,k-1}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,k-1}^{n+1} \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Отметим, что  $J_x$  и  $J_y$  вычисляются на шаге  $n$ , так как в противном случае результирующая система уравнений была бы нелинейной. Подставляя выражение (13) в (12), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,k}^{n+1} - D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x} + \\ & + \frac{D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,k}^{n+1} - D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{W_{i,j,k}^{n+1} - W_{i,j,k+1}^{n+1}}{\Delta \sigma} = \frac{1}{4\Delta\sigma} \times \\ & \times \left\{ J_{x_{i,j,k-1}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,k-1}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,k-1}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,k-1}^{n+1} - \right. \\ & - J_{x_{i,j,k+1}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,k+1}^{n+1} - J_{x_{i+1,j,k+1}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,k+1}^{n+1} + \\ & + J_{y_{i,j,k-1}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,k-1}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,k-1}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,k-1}^{n+1} - \\ & \left. - J_{y_{i,j,k+1}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,k+1}^{n+1} - J_{y_{i,j+1,k+1}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,k+1}^{n+1} \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Уравнение (14) также можно получить непосредственной дискретизацией уравнения

неразрывности в форме (9). Произведем теперь поправку "гидростатического решения"  $\tilde{D}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i+1,j,k}^{n+1}, \tilde{D}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{W}_{i,j,k}^{n+1}$ , полученного без учета слагаемых, содержащих  $q$  в (6), путем добавления таковых в полуявной форме:

$$D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,k}^{n+1} = \tilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i,j,k}^{n+1} - D_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{\theta \Delta t}{\Delta x} (q_{i,j,k}^{n+1} - q_{i-1,j,k}^{n+1}) + \quad (15)$$

$$+ D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,k}}^n \frac{\theta \Delta t}{4\Delta\sigma} (q_{i,j,k-1}^{n+1} - q_{i,j,k+1}^{n+1} + q_{i-1,j,k-1}^{n+1} - q_{i-1,j,k+1}^{n+1}),$$

$$D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,k}^{n+1} = \tilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} - D_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{\theta \Delta t}{\Delta y} (q_{i,j,k}^{n+1} - q_{i,j-1,k}^{n+1}) + \quad (16)$$

$$+ D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j+1,k}}^n \frac{\theta \Delta t}{4\Delta\sigma} (q_{i,j,k-1}^{n+1} - q_{i,j,k+1}^{n+1} + q_{i,j-1,k-1}^{n+1} - q_{i,j-1,k+1}^{n+1}),$$

$$W_{i,j,k}^{n+1} = \tilde{W}_{i,j,k}^{n+1} - \frac{\theta \Delta t}{D_{i,j}^n \Delta\sigma} (q_{i,j,k-1}^{n+1} - q_{i,j,k}^{n+1}), \quad (17)$$

где  $\theta \in (1/2, 1]$  – фактор невязности для повышения точности аппроксимации и

$$\tilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i,j,k}^{n+1} = \tilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i,j,k}^{n+1} - D_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{(1-\theta)\Delta t}{\Delta x} (q_{i,j,k}^n - q_{i-1,j,k}^n) +$$

$$+ D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,k}}^n \frac{(1-\theta)\Delta t}{4\Delta\sigma} (q_{i,j,k-1}^n - q_{i,j,k+1}^n + q_{i-1,j,k-1}^n - q_{i-1,j,k+1}^n),$$

$$\tilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} = \tilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} - D_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{(1-\theta)\Delta t}{\Delta y} (q_{i,j,k}^n - q_{i,j-1,k}^n) +$$

$$+ D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j+1,k}}^n \frac{(1-\theta)\Delta t}{4\Delta\sigma} (q_{i,j,k-1}^n - q_{i,j,k+1}^n + q_{i,j-1,k-1}^n - q_{i,j-1,k+1}^n),$$

$$\widetilde{W}_{i,j,k}^{n+1} = \widetilde{W}_{i,j,k}^{n+1} - \frac{(1-\theta)\Delta t}{D_{i,j}^n \Delta \sigma} (q_{i,j,k-1}^n - q_{i,j,k}^n).$$

Отметим, что схема приближается ко 2-му порядку точности по времени, если  $D$  меняется незначительно, а  $\theta$  выбрано близким к  $1/2$ . Схема также имеет 2-й порядок точности по пространству. Подставляя выражения (17) в (14), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} q_{i,j,k}^{n+1} & \left\{ \frac{D_{i-\frac{1}{2},j}^n + D_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x^2} + \frac{D_{i,j-\frac{1}{2}}^n + D_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y^2} + \frac{2}{D_{i,j}^n \Delta \sigma^2} + \right. \\ & \left. + S_{x_{i,j,k-1}}^n + S_{x_{i,j,k+1}}^n + S_{x_{i+1,j,k-1}}^n + S_{x_{i+1,j,k+1}}^n + \right. \\ & \left. + S_{y_{i,j,k-1}}^n + S_{y_{i,j,k+1}}^n + S_{y_{i,j+1,k-1}}^n + S_{y_{i,j+1,k+1}}^n \right\} + \\ & + q_{i-1,j,k}^{n+1} \left\{ -D_{i-\frac{1}{2},j}^n / \Delta x^2 + S_{x_{i,j,k-1}}^n + S_{x_{i,j,k+1}}^n \right\} + \\ & + q_{i+1,j,k}^{n+1} \left\{ -D_{i+\frac{1}{2},j}^n / \Delta x^2 + S_{x_{i+1,j,k-1}}^n + S_{x_{i+1,j,k+1}}^n \right\} + \\ & + q_{i,j-1,k}^{n+1} \left\{ -D_{i,j-\frac{1}{2}}^n / \Delta y^2 + S_{y_{i,j,k-1}}^n + S_{y_{i,j,k+1}}^n \right\} + \\ & + q_{i,j+1,k}^{n+1} \left\{ -D_{i,j+\frac{1}{2}}^n / \Delta y^2 + S_{y_{i,j+1,k-1}}^n + S_{y_{i,j+1,k+1}}^n \right\} + \\ & + q_{i,j,k-1}^{n+1} \left\{ -1 / (D_{i,j}^n \Delta \sigma^2) + \right. \\ & \left. + D_{i+\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i+1,j,k}}^n - J_{x_{i+1,j,k-1}}^n) / (4\Delta x \Delta \sigma) - \right. \\ & \left. - D_{i-\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i,j,k}}^n - J_{x_{i,j,k-1}}^n) / (4\Delta x \Delta \sigma) + \right. \\ & \left. + D_{i+\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j+1,k}}^n - J_{y_{i,j+1,k-1}}^n) / (4\Delta y \Delta \sigma) - \right. \\ & \left. - D_{i,j-\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j,k}}^n - J_{y_{i,j,k-1}}^n) / (4\Delta y \Delta \sigma) \right\} + \\ & + q_{i,j,k+1}^{n+1} \left\{ -1 / (D_{i,j}^n \Delta \sigma^2) + \right. \\ & \left. + D_{i+\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i+1,j,k+1}}^n - J_{x_{i+1,j,k}}^n) / (4\Delta x \Delta \sigma) - \right. \\ & \left. - D_{i-\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i,j,k+1}}^n - J_{x_{i,j,k}}^n) / (4\Delta x \Delta \sigma) + \right. \\ & \left. + D_{i+\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j+1,k+1}}^n - J_{y_{i,j+1,k}}^n) / (4\Delta y \Delta \sigma) - \right. \\ & \left. - D_{i,j-\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j,k+1}}^n - J_{y_{i,j,k}}^n) / (4\Delta y \Delta \sigma) \right\} + \\ & + q_{i-1,j,k-1}^{n+1} \left\{ -D_{i-\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i,j,k}}^n + J_{x_{i,j,k-1}}^n) / (4\Delta x \Delta \sigma) \right\} + \\ & + q_{i+1,j,k-1}^{n+1} \left\{ D_{i+\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i+1,j,k}}^n + J_{x_{i+1,j,k-1}}^n) / (4\Delta x \Delta \sigma) \right\} + \\ & + q_{i-1,j,k+1}^{n+1} \left\{ D_{i-\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i,j,k}}^n + J_{x_{i,j,k+1}}^n) / (4\Delta x \Delta \sigma) \right\} + \\ & + q_{i+1,j,k+1}^{n+1} \left\{ -D_{i+\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i+1,j,k}}^n + J_{x_{i+1,j,k+1}}^n) / (4\Delta x \Delta \sigma) \right\} + \\ & + q_{i,j-1,k-1}^{n+1} \left\{ -D_{i,j-\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j,k}}^n + J_{y_{i,j,k-1}}^n) / (4\Delta y \Delta \sigma) \right\} + \\ & + q_{i,j+1,k-1}^{n+1} \left\{ D_{i,j+\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j+1,k}}^n + J_{y_{i,j+1,k-1}}^n) / (4\Delta y \Delta \sigma) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + q_{i,j-1,k+1}^{n+1} \left\{ D_{i,j-\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j,k}}^n + J_{y_{i,j,k+1}}^n) / (4\Delta y \Delta \sigma) \right\} + \\ & + q_{i,j+1,k+1}^{n+1} \left\{ -D_{i,j+\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j+1,k}}^n + J_{y_{i,j+1,k+1}}^n) / (4\Delta y \Delta \sigma) \right\} + \\ & + q_{i,j,k-2}^{n+1} \left\{ -S_{x_{i,j,k-1}}^n - S_{x_{i+1,j,k-1}}^n - S_{y_{i,j,k-1}}^n - S_{y_{i,j+1,k-1}}^n \right\} + \\ & + q_{i,j,k+2}^{n+1} \left\{ -S_{x_{i,j,k+1}}^n - S_{x_{i+1,j,k+1}}^n - S_{y_{i,j,k+1}}^n - S_{y_{i,j+1,k+1}}^n \right\} + \\ & + q_{i-1,j,k-2}^{n+1} \left\{ -S_{x_{i,j,k-1}}^n \right\} + q_{i+1,j,k-2}^{n+1} \left\{ -S_{x_{i+1,j,k-1}}^n \right\} + \\ & + q_{i-1,j,k+2}^{n+1} \left\{ -S_{x_{i,j,k+1}}^n \right\} + q_{i+1,j,k+2}^{n+1} \left\{ -S_{x_{i+1,j,k+1}}^n \right\} + \\ & + q_{i,j-1,k-2}^{n+1} \left\{ -S_{y_{i,j,k-1}}^n \right\} + q_{i,j+1,k-2}^{n+1} \left\{ -S_{y_{i,j+1,k-1}}^n \right\} + \\ & + q_{i,j-1,k+2}^{n+1} \left\{ -S_{y_{i,j,k+1}}^n \right\} + q_{i,j+1,k+2}^{n+1} \left\{ -S_{y_{i,j+1,k+1}}^n \right\} = \\ & = - \left( \widetilde{D}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \widetilde{U}_{i+1,j,k}^{n+1} - \widetilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \widetilde{U}_{i,j,k}^{n+1} \right) / (\Delta x \Delta t) - \\ & - \left( \widetilde{D}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \widetilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1} - \widetilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \widetilde{V}_{i,j,k}^{n+1} \right) / (\Delta y \Delta t) - \\ & - \left( \widetilde{W}_{i,j,k}^{n+1} - \widetilde{W}_{i,j,k+1}^{n+1} \right) / (\Delta \sigma \Delta t) + 1 / (4\Delta \sigma \Delta t) \times \\ & \times \left[ J_{x_{i,j,k-1}}^n \widetilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \widetilde{U}_{i,j,k-1}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,k-1}}^n \widetilde{D}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \widetilde{U}_{i+1,j,k-1}^{n+1} - \right. \\ & \left. - J_{x_{i,j,k+1}}^n \widetilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \widetilde{U}_{i,j,k+1}^{n+1} - J_{x_{i+1,j,k+1}}^n \widetilde{D}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \widetilde{U}_{i+1,j,k+1}^{n+1} + \right. \\ & \left. + J_{y_{i,j,k-1}}^n \widetilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \widetilde{V}_{i,j,k-1}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,k-1}}^n \widetilde{D}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \widetilde{V}_{i,j+1,k-1}^{n+1} - \right. \\ & \left. - J_{y_{i,j,k+1}}^n \widetilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \widetilde{V}_{i,j,k+1}^{n+1} - J_{y_{i,j+1,k+1}}^n \widetilde{D}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \widetilde{V}_{i,j+1,k+1}^{n+1} \right], \quad (18) \end{aligned}$$

где для краткости введены обозначения

$$S_{x_{i,j,k}}^n = \frac{D_{i-\frac{1}{2},j}^n (J_{x_{i,j,k}}^n)^2}{16\Delta \sigma^2}; \quad S_{y_{i,j,k}}^n = \frac{D_{i,j-\frac{1}{2}}^n (J_{y_{i,j,k}}^n)^2}{16\Delta \sigma^2}.$$

Линейное уравнение (18), в которое входят 25 неизвестных  $q$  с 5-ти слоев:  $k-2, k-1, k, k+1, k+2$ , справедливо для  $k = 3, \dots, K-2$ .

Неизвестные  $q_{i,j,0}^{n+1}$ , входящие в уравнения для слоя  $k = 2$ , можно исключить явным образом, применив граничное условие для компонент скорости  $U$  и  $V$  у поверхности:

$$\frac{U_{i,j,1}^{n+1} - U_{i,j,2}^{n+1}}{\widetilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \Delta \sigma} = \frac{\tau_{x_{i,j}}^{n+1}}{\nu_{i-\frac{1}{2},j,2}^{n+1}}, \quad \frac{V_{i,j,1}^{n+1} - V_{i,j,2}^{n+1}}{\widetilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta \sigma} = \frac{\tau_{y_{i,j}}^{n+1}}{\nu_{i,j-\frac{1}{2},2}^{n+1}}, \quad (19)$$

где  $\tau_x$  и  $\tau_y$  – компоненты удельной (деленной на плотность воды) силы трения у поверхности;  $\nu$  – коэффициент вертикальной вязкости.

Рассмотрим теперь придонный слой  $k = K-1$ . Принимая во внимание, что  $\sigma_{K-1} = -1 + \Delta \sigma / 2$  и  $\omega = 0$  на дне, из (12) и (13) следует, что уравнение неразрывности у дна имеет вид:

$$\frac{D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,K-1}^{n+1} - D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,K-1}^{n+1}}{\Delta x} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+\frac{1}{2},K-1}^{n+1} - D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j-\frac{1}{2},K-1}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{W_{i,j,K-1}^{n+1}}{\Delta \sigma} = \frac{1}{4\Delta \sigma} \times \\
 & \times \left\{ J_{x_{i,j,K-1}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,K-1}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,K-1}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,K-1}^{n+1} + \right. \\
 & + J_{x_{i,j,K-1}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,K-1}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,K-1}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,K-1}^{n+1} + \\
 & + J_{y_{i,j,K-1}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,K-1}^{n+1} + J_{y_{i,j+\frac{1}{2},K-1}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+\frac{1}{2},K-1}^{n+1} + \\
 & \left. + J_{y_{i,j,K-1}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,K-1}^{n+1} + J_{y_{i,j+\frac{1}{2},K-1}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+\frac{1}{2},K-1}^{n+1} \right\}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Подставляя выражение (17) в (20) аналогично процедуре, описанной выше, получаем уравнение для  $q$  со слоя  $k = K - 1$ .

Чтобы система уравнений оказалась замкнутой, ее необходимо дополнить граничными условиями.

### 2.3. Граничные условия у дна

В отличие от  $z$ -системы координат, в которой непосредственная подстановка  $W = 0$  у дна исключает необходимость рассмотрения  $q$  со слоя  $k = K$  (см., например, [13]), в  $\sigma$ -системе координат неизвестные  $q_{i,j,K}^{n+1}$  входят в уравнения для слоев  $k = K - 1$  и  $k = K - 2$ , и исключить  $q_{i,j,K}$  из них явным образом не удастся. Поэтому условие  $\omega_{i,j,K}^{n+1} = 0$ , которое уже учитывалось при выводе уравнения для  $k = K - 1$ , является основой для дополнительного уравнения.

### 2.4. Граничные условия у поверхности

Поправка давления  $q$  входит в уравнения (6) в виде производных 1-го порядка. Кроме того, изменение уровня, обусловленное „негидростатической“ поправкой поля скорости, заранее неизвестно. Поэтому у поверхности необходимо задавать два условия. Этими условиями являются (см. [4]):

- кинематическое условие для скорости;
- динамическое условие для давления.

Первое из этих условий выражается формулой:

$$W|_{\sigma=0} = D(J_x U + J_y V + J_t)|_{\sigma=0}, \quad (21)$$

связывающей изменение уровня и скорость. С учетом (13), оно дискретизируется как:

$$\begin{aligned}
 W_{i,j,2}^{n+1} & = (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n) / \Delta t + \\
 & + \left\{ J_{x_{i,j,1}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,1}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,1}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,1}^{n+1} + \right. \\
 & \left. + J_{x_{i,j,2}}^n D_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i,j,2}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,2}}^n D_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} U_{i+1,j,2}^{n+1} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + J_{y_{i,j,1}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,1}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,1}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,1}^{n+1} + \\
 & \left. + J_{y_{i,j,2}}^n D_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j,2}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,2}}^n D_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} V_{i,j+1,2}^{n+1} \right\} / 4. \quad (22)
 \end{aligned}$$

В уравнение (22) теперь входит еще одна неизвестная – уровень  $\eta_{i,j}^{n+1}$ . Для составления дополнительного уравнения воспользуемся вторым условием, которое заключается в том, что разность давлений в воде и воздухе у поверхности должна быть равна силе поверхностного натяжения [4]. Если капиллярные явления не будут предметом рассмотрения, то последней можно пренебречь, и граничное условие можно полагать в виде

$$q|_{\sigma=0} = q_s(x, y, t). \quad (23)$$

Будем далее считать давление воздуха у поверхности и, как следствие,  $q_s(x, y, t)$  известными. Отметим, что динамическое условие для давления (23) должно задаваться на заранее неизвестном уровне  $z = \eta_{i,j}^{n+1}$ . Представим

$$\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n = (\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n) + \Delta \eta_{nh,i,j}^{n+1}, \quad (24)$$

где  $\Delta \eta_{nh,i,j}^{n+1}$  – отклонение уровня от "гидростатического" уровня  $\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}$  (см. этап 3, § 2.1) вследствие поправки поля скорости (17). Поправка давления  $q$ , входящая в (17), вообще говоря, является суммой двух компонент: давления, которое не зависит от уровня, и гидростатического давления  $g \Delta \eta_{nh,i,j}^{n+1}$ , обусловленного изменением уровня, который в свою очередь обусловлен поправкой поля скорости (17). Поэтому условие (23) в дискретном виде на шаге  $n + 1$  следует записывать как

$$\frac{q_{i,j,1}^{n+1} + q_{i,j,2}^{n+1}}{2} - \theta g \Delta \eta_{nh,i,j}^{n+1} = q_{s,i,j}. \quad (25)$$

Подставляя (24) в (22) и выражая  $\Delta \eta_{nh,i,j}^{n+1}$  из (25), получаем граничное уравнение для  $q$  у поверхности, не содержащее  $\eta$  в явном виде:

$$W_{i,j,2}^{n+1} = \frac{\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{q_{i,j,1}^{n+1} + q_{i,j,2}^{n+1} - 2q_{s,i,j}}{2g\theta\Delta t} + \left\{ \dots \right\} / 4, \quad (26)$$

где выражение в скобках такое же, как в (22).

В уравнение (26) входят компоненты скорости  $U$  и  $V$  со слоя  $k = 1$ . Применяя (19) таким же образом, как и при составлении уравнений для  $q$  со слоя  $k = 2$ , и подставляя (17), в конечном итоге получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 q_{i,j,1}^{n+1} & \left\{ 1/(D_{ij}^n \Delta \sigma^2) + 1/(2g\theta\Delta \sigma \Delta t^2) + \right. \\
 & \left. + D_{i-\frac{1}{2},j}^n \left[ (J_{x_{i,j,2}}^n)^2 + J_{x_{i,j,1}}^n J_{x_{i,j,2}}^n \right] / (4\Delta \sigma)^2 + \right.
 \end{aligned}$$

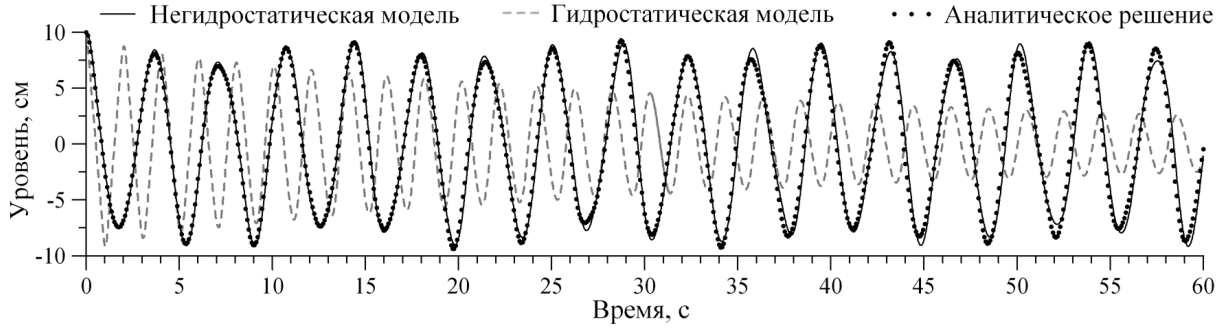


Рис. 2. Сравнение рассчитанного и аналитического уровней поверхности: одномерные волны

$$\begin{aligned}
 & +D_{i+\frac{1}{2},j}^n \left[ (J_{x_{i+1,j,2}}^n)^2 + J_{x_{i+1,j,1}}^n J_{x_{i+1,j,2}}^n \right] / (4\Delta\sigma)^2 + \\
 & +D_{i,j-\frac{1}{2}}^n \left[ (J_{y_{i,j,2}}^n)^2 + J_{y_{i,j,1}}^n J_{y_{i,j,2}}^n \right] / (4\Delta\sigma)^2 + \\
 & +D_{i,j+\frac{1}{2}}^n \left[ (J_{y_{i,j+1,2}}^n)^2 + J_{y_{i,j+1,1}}^n J_{y_{i,j+1,2}}^n \right] / (4\Delta\sigma)^2 \Big\} + \\
 & +q_{i-1,j,1}^{n+1} \left\{ \left( D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,\frac{3}{2}}}^n J_{x_{i,j,2}}^n \right) / (8\Delta\sigma^2) \right\} + \\
 & +q_{i+1,j,1}^{n+1} \left\{ \left( D_{i+\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i+1,j,\frac{3}{2}}}^n J_{x_{i+1,j,2}}^n \right) / (8\Delta\sigma^2) \right\} + \\
 & +q_{i,j-1}^{n+1} \left\{ \left( D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j,\frac{3}{2}}}^n J_{y_{i,j,2}}^n \right) / (8\Delta\sigma^2) \right\} + \\
 & +q_{i,j+1}^{n+1} \left\{ \left( D_{i,j+\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j+1,\frac{3}{2}}}^n J_{y_{i,j+1,2}}^n \right) / (8\Delta\sigma^2) \right\} + \\
 & +q_{i,j,2}^{n+1} \left\{ -1/(D_{i,j}^n \Delta\sigma^2) + 1/(2g\theta\Delta\sigma\Delta t^2) + \right. \\
 & + \left( D_{i+\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i+1,j,\frac{3}{2}}}^n - D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,\frac{3}{2}}}^n \right) / (2\Delta x\Delta\sigma) + \\
 & + \left( D_{i,j+\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j+1,\frac{3}{2}}}^n - D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j,\frac{3}{2}}}^n \right) / (2\Delta y\Delta\sigma) \Big\} + \\
 & +q_{i-1,j,2}^{n+1} \left\{ \frac{D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,\frac{3}{2}}}^n}{2\Delta x\Delta\sigma} \right\} + q_{i+1,j,2}^{n+1} \left\{ \frac{-D_{i+\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i+1,j,\frac{3}{2}}}^n}{2\Delta x\Delta\sigma} \right\} + \\
 & +q_{i,j-1,2}^{n+1} \left\{ \frac{D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j,\frac{3}{2}}}^n}{2\Delta y\Delta\sigma} \right\} + q_{i,j+1,2}^{n+1} \left\{ \frac{-D_{i,j+\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j+1,\frac{3}{2}}}^n}{2\Delta y\Delta\sigma} \right\} + \\
 & +q_{i,j,3}^{n+1} \left\{ -\frac{D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,\frac{3}{2}}}^n J_{x_{i,j,2}}^n + D_{i+\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i+1,j,\frac{3}{2}}}^n J_{x_{i+1,j,2}}^n}{8\Delta\sigma^2} - \right. \\
 & \left. -\frac{D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j,\frac{3}{2}}}^n J_{y_{i,j,2}}^n + D_{i,j+\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j+1,\frac{3}{2}}}^n J_{y_{i,j+1,2}}^n}{8\Delta\sigma^2} \right\} + \\
 & +q_{i-1,j,3}^{n+1} \left\{ -\left( D_{i-\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i,j,\frac{3}{2}}}^n J_{x_{i,j,2}}^n \right) / (8\Delta\sigma^2) \right\} + \\
 & +q_{i+1,j,3}^{n+1} \left\{ -\left( D_{i+\frac{1}{2},j}^n J_{x_{i+1,j,\frac{3}{2}}}^n J_{x_{i+1,j,2}}^n \right) / (8\Delta\sigma^2) \right\} + \\
 & +q_{i,j-1,3}^{n+1} \left\{ -\left( D_{i,j-\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j,\frac{3}{2}}}^n J_{y_{i,j,2}}^n \right) / (8\Delta\sigma^2) \right\} + \\
 & +q_{i,j+1,3}^{n+1} \left\{ -\left( D_{i,j+\frac{1}{2}}^n J_{y_{i,j+1,\frac{3}{2}}}^n J_{y_{i,j+1,2}}^n \right) / (8\Delta\sigma^2) \right\} = \\
 & = \frac{q_{s,i,j}^{n+1}}{g\theta\Delta\sigma(\Delta t)^2} - \frac{\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n}{\Delta\sigma(\Delta t)^2} + \frac{\tilde{W}_{i,j,2}^{n+1}}{\Delta\sigma\Delta t} - \\
 & - \frac{1}{2\Delta\sigma\Delta t} \left\{ J_{x_{i,j,\frac{3}{2}}}^n \tilde{D}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i,j,2}^{n+1} + J_{x_{i+1,j,\frac{3}{2}}}^n \tilde{D}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \tilde{U}_{i+1,j,2}^{n+1} + \right. \\
 & \left. + J_{y_{i,j,\frac{3}{2}}}^n \tilde{D}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j,2}^{n+1} + J_{y_{i,j+1,\frac{3}{2}}}^n \tilde{D}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \tilde{V}_{i,j+1,2}^{n+1} \right\} - \\
 & - \frac{1}{4\Delta t} \left\{ \frac{J_{x_{i,j,1}}^n (D_{i-\frac{1}{2},j}^n)^2 \tau_{x_{i,j}}^{n+1}}{\nu_{i-\frac{1}{2},j,2}^{n+1}} + \frac{J_{x_{i+1,j,1}}^n (D_{i+\frac{1}{2},j}^n)^2 \tau_{x_{i+1,j}}^{n+1}}{\nu_{i+\frac{1}{2},j,2}^{n+1}} + \right. \\
 & \left. + \frac{J_{y_{i,j,1}}^n (D_{i,j-\frac{1}{2}}^n)^2 \tau_{y_{i,j}}^{n+1}}{\nu_{i,j-\frac{1}{2},2}^{n+1}} + \frac{J_{y_{i,j+1,1}}^n (D_{i,j+\frac{1}{2}}^n)^2 \tau_{y_{i,j+1}}^{n+1}}{\nu_{i,j+\frac{1}{2},2}^{n+1}} \right\}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

## 2.5. Боковые граничные условия

Подстановка условия  $U_{i,j,k}^{n+1} = 0$  либо  $V_{i,j,k}^{n+1} = 0$ , что соответствует непроницаемой боковой границе, непосредственно в (14) позволяет избежать рассмотрения фиктивных ячеек для  $q$  с внешней стороны границы. Что касается открытых границ, то можно задавать значение  $q$ , однако последнее, как правило, на практике неизвестно. Можно задавать и другие условия. Возникающие при этом сложности связаны либо с согласованием граничных условий для скорости, уровня и давления, либо же с обусловленностью системы уравнений для  $q$ .

## 2.6. Решение системы уравнений для $q$

Полученная система линейных уравнений (18), дополненная граничными условиями, является несимметричной из-за граничных условий у поверхности и дна. В данной работе было протестировано несколько итеративных методов, описанных в [6]; наиболее успешным (с точки зрения скорости сходимости) из которых оказался метод Bi-CGStAB (BiConjugate Gradient Stabilized). При этом применялся предобуславливатель, основанный на LU декомпозиции.

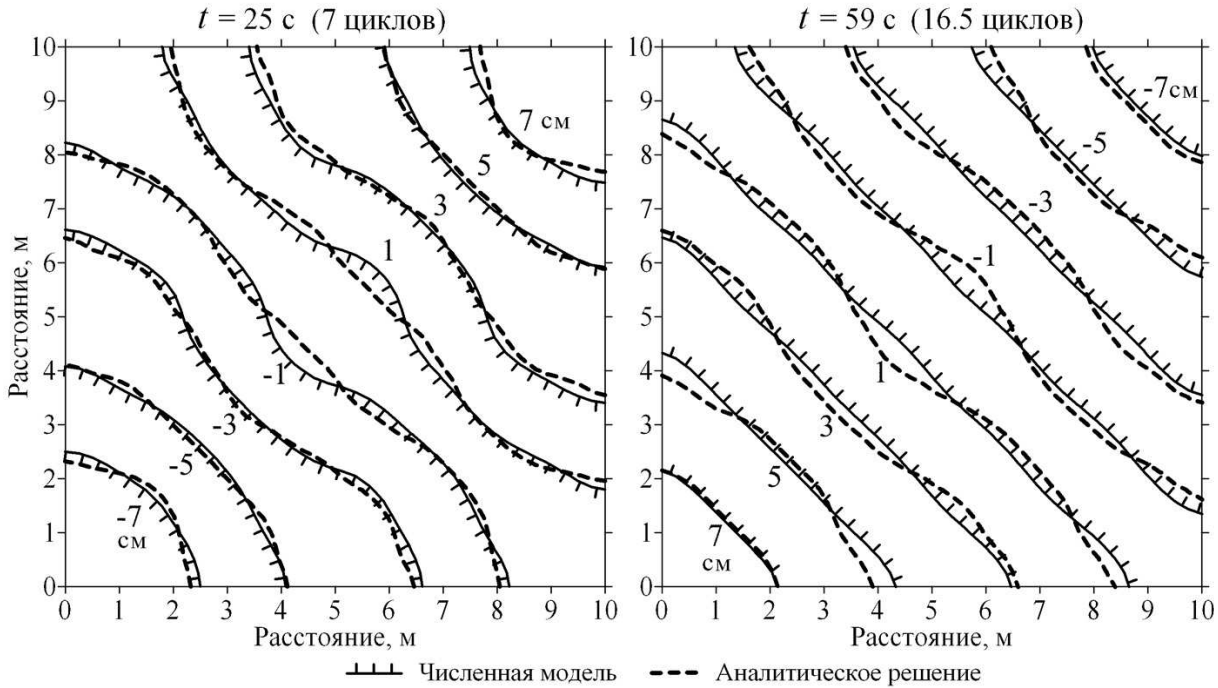


Рис. 3. Сравнение рассчитанного и аналитического уровня поверхности: двумерные волны

### 3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

#### 3.1. Короткие одномерные волны малой амплитуды в бассейне прямоугольной формы

Типичным примером течений со свободной поверхностью, для моделирования которых гидростатическое приближение неприемлемо, являются волновые колебания жидкости в бассейне, в котором глубина сравнима или превышает горизонтальные размеры. Аналитическое решение упрощенной системы уравнений (1), описывающее одномерные волны малой амплитуды, порожденные неким начальным возмущением поверхности вида  $\eta(x, 0) = f(x)$  в бассейне длиной  $L_x$  и глубиной  $H$ , известно относительно давно [3]. К упомянутым упрощениям относятся пренебрежение инерционными, вязкостными и кориолисовыми слагаемыми, а также упрощения, основанные на предположении о том, что  $|\eta| \ll H$ . Кроме того, плотность воды  $\rho$  и атмосферное давление  $p_a$  полагаются постоянными. В этом случае в [3] для уровня приводится выражение:

$$\eta(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(\sigma_k t) \cos\left(\frac{\pi x}{L_x} k\right), \quad (28)$$

где  $\sigma_k = \sqrt{g s_k \text{th}(H s_k)}$ ,  $s_k = \pi k / L_x$ .

Коэффициенты  $b_k$  определяются из разложения функции  $f(x)$  в ряд Фурье.

Сравним результаты численной модели с аналитическим решением для одномерных колебаний, порожденных линейным возмущением уровня поверхности изначально неподвижной жидкости  $f(x) = -\Delta\eta + 2\Delta\eta x/L_x$ . В этом случае коэффициенты  $b_k$  вычисляются в явном виде, а решение записывается в виде ряда:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-8\Delta\eta}{\pi^2(2n+1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{L_x}\right) \cos(\sigma_k t). \quad (29)$$

При  $x = L_x \forall t$  приближенное решение

$$\eta(L_x, t) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \frac{-8\Delta\eta}{\pi^2(2n+1)^2} \cos(\sigma_n t), \quad (30)$$

являющееся суммой  $N$  первых слагаемых ряда (29), отличается от точного не более чем на

$$|\epsilon_N(x, t)| \leq \frac{8|\Delta\eta|}{\pi^2} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{|\Delta\eta|}{2N}.$$

Для численного эксперимента были выбраны следующие параметры:  $L_x = H = 10$  м,  $\Delta\eta = 0.1$  м.



Расчетная область была разбита на  $40 \times 40$  ячеек. Сила вязкости полагалась равной нулю; на твердых границах задавалось условие скольжения. На рис. 2 приведено визуальное сравнение приближенного аналитического решения ( $N = 100$ ) с результатами численной модели при  $x = L_x$ . Как видно, решение, полученное с помощью численной негидростатической модели, хорошо совпадает с аналитическим. Небольшая разница, по всей видимости, обусловлена ошибками численной аппроксимации или же пренебрежением малыми порядками  $\Delta\eta/H$  при выводе аналитического решения.

Для сравнения также приведен результат численного расчета, выполненного в гидростатическом режиме. Как и ожидалось, полученное решение неверно. Интересно отметить, что гидростатическая модель обладает ярко выраженными диссипативными свойствами по сравнению с негидростатической моделью.

### 3.2. Короткие двумерные волны малой амплитуды в бассейне прямоугольной формы

Рассмотрим теперь случай двумерных волн в бассейне прямоугольной формы размером  $L_x \times L_y \times H$ , для которого имеет место решение [3]:

$$\eta(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} \cos(\sigma_{ij}t) \cos \frac{\pi xi}{L_x} \cos \frac{\pi yj}{L_y}, \quad (31)$$

$$\text{где } \sigma_{ij} = \sqrt{g s_{ij} \text{th}(H s_{ij})}, \quad s_{ij}^2 = \left(\frac{\pi i}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{L_y}\right)^2.$$

Коэффициенты  $b_{ij}$  определяются теперь уже из разложения функции  $\eta(x, y, 0) = f(x, y)$  в двумерный ряд Фурье. Рассмотрим колебания, вызванные начальным отклонением уровня  $f(x, y) = -\Delta\eta + \Delta\eta x/L_x + \Delta\eta y/L_y$ . В этом случае только коэффициенты  $\sigma_{i,0}$  и  $\sigma_{0,j}$  не равны нулю, а из (31) следует, что решением является ряд:

$$\eta(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-4\Delta\eta}{\pi^2(2i+1)^2} \cos \frac{\pi(2i+1)x}{L_x} \cos(\sigma_{i,0}t) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-4\Delta\eta}{\pi^2(2j+1)^2} \cos \frac{\pi(2j+1)y}{L_y} \cos(\sigma_{0,j}t). \quad (32)$$

Для численного эксперимента были выбраны следующие параметры:  $L_x = L_y = H = 10$  м,  $\Delta\eta = 0.1$  м. Расчетная область была разбита на  $40 \times 40$  ячеек. На рис. 3 показано сравнение рассчитанных и приближенных аналитических ( $N = 100$ ) контуров уровня поверхности при  $t = 25$  с и  $t = 59$  с. Контуров уровня, рассчитанного численной

моделью, дополнены штриховкой в направлении убывания уровня. Как видно, численная модель достаточно хорошо воспроизводит аналитическое решение даже через 1 минуту, охватывающую 17 минимумов и 16 максимумов колебаний уровня.

В угловой точке  $(x, y) = (L_x, L_y)$ , где в случае бассейна с квадратным основанием  $L_x = L_y$  аналитическое решение описывается формулой (30) как и в одномерном случае, визуальное совпадение численного и аналитического решений оказалось приблизительно таким же, как и в одномерном случае (см. рис. 2).

### 3.3. Распространение волн над подводным препятствием трапециевидной формы

Практическим примером применения предложенной негидростатической модели является моделирование распространения коротких волн над подводными препятствиями. В частности, в работах [7, 8] показано, что при определенной конфигурации эксперимента, монохромная волна, проходящая над погруженным препятствием трапециевидной формы (в вертикальном сечении) без обрушения, претерпевает изменение формы и рассеивается на две – эффект, который не может быть описан при помощи гидростатической модели. Применение последней приводит к тому, что смоделированные волны укручаются и после прохождения гребня препятствия принимают пилообразную форму. С целью воспроизведения лабораторных данных, в [8] была применена модифицированная модель Буссинеска распространения поверхностных волн.

На верхнем из рис. (4) показана конфигурация одного из экспериментов [8], данные измерений которого сравнены с результатами применения метода, предложенного в настоящей работе. На дне гидравлического лотка было установлено препятствие, в левой части лотка находился генератор волн. Правая часть была сконструирована так, чтобы уменьшить отражение волн. Уровень поверхности измерялся одновременно в нескольких положениях, обозначенными цифрами в кружках. В положении ① уровень измерялся для контроля поступающей синусоидальной волны амплитуды 1 см и периода 2 с. На последующих из рис. 4 представлено визуальное сравнение данных измерений и результатов расчета в положениях ②–⑦. Как видно, модель, разрешение которой было  $40 \sigma$ -слоев по вертикали и 2.5 см по горизонтали, достаточно хорошо воспроизвела эксперимент, не требуя при этом специфичных калибровочных коэф-

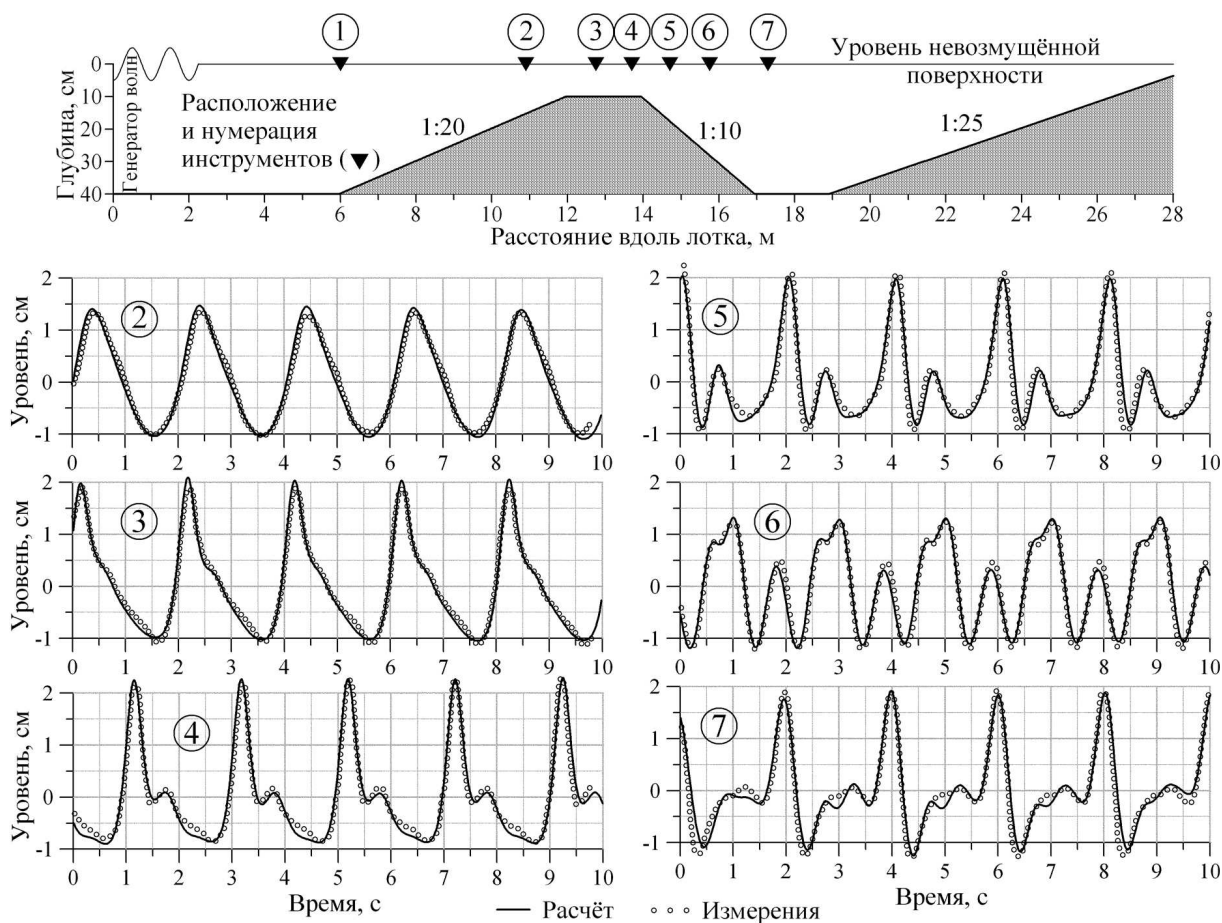


Рис. 4. Сравнение рассчитанных и измеренных уровней поверхности

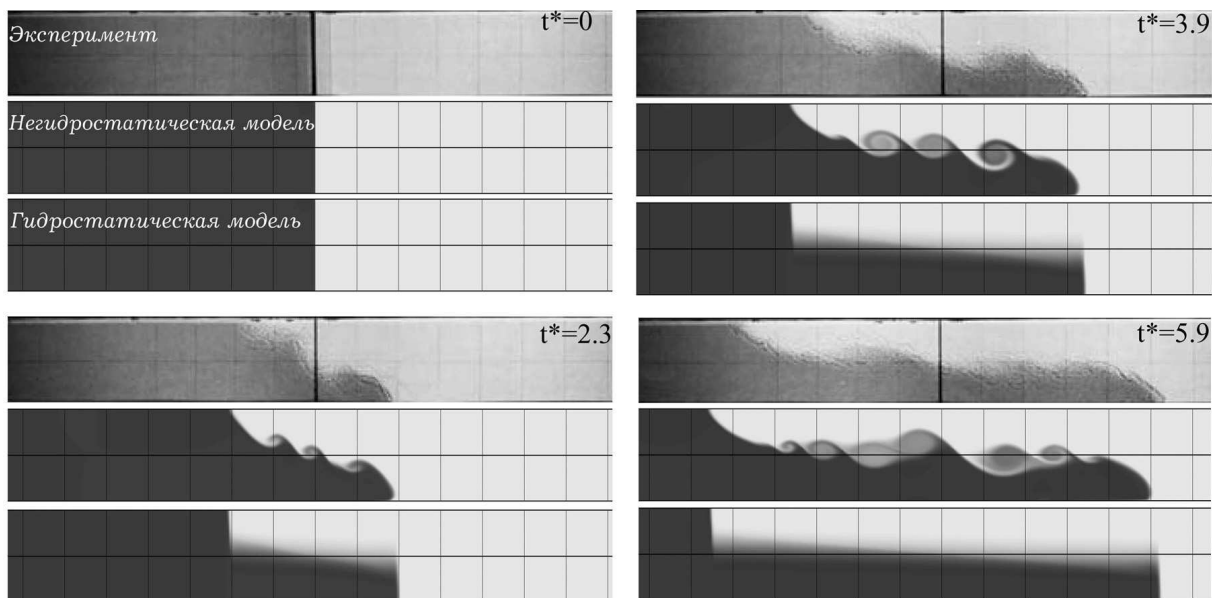


Рис. 5. Перемешивание жидкостей разной плотности, изначально разделенных перегородкой. Экспериментальные данные заимствованы из [20];  $t^* = t\sqrt{g(1-\gamma)/H}$ ,  $x^* = x/H$ ,  $\gamma = 0.993$

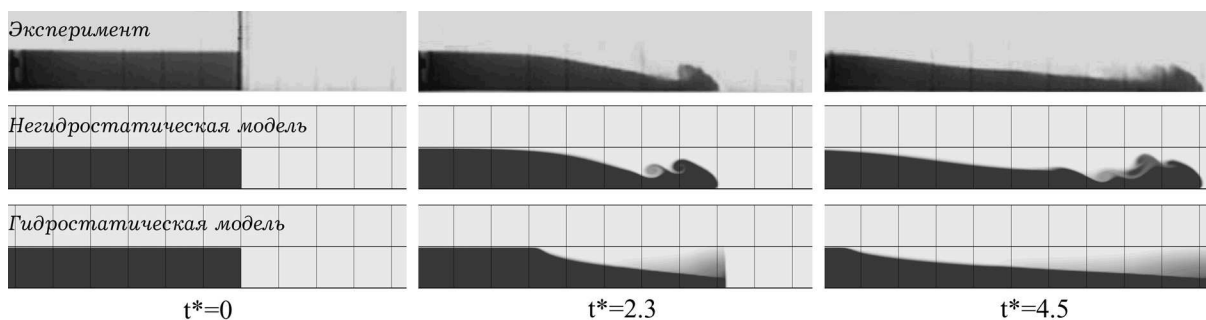


Рис. 6. Перемешивание жидкостей разной плотности, более плотная из которых изначально занимает только половину глубины в левой части лотка. Экспериментальные данные заимствованы из [20];  $\gamma = 0.989$

фициентов, в отличие от [8]. Дальнейшее увеличение как горизонтального, так и вертикального разрешения не привело к заметным улучшениям. Интересно также отметить, что использование постоянного коэффициента молекулярной вязкости привело к практически тем же результатам, что и применение коэффициентов турбулентной вязкости [9, 10]. Слабая зависимость результатов расчетов задач такого типа от коэффициентов вязкости была также отмечена в [18], и может быть объяснена тем, что течение такого типа является течением почти идеальной жидкости, характеризующимся малой диссипацией.

#### 3.4. Перемешивание жидкостей разной плотности в лотке

Еще одним практическим примером применения негидростатической модели служит моделирование вихревых структур в вертикальной плоскости, в частности тех, возникновение которых обусловлено неоднородностями плотности [15, 20]. Один из экспериментов, описанных в [20], был выбран в качестве тестового примера для проверки модели, представленной в данной работе. Эксперимент заключался в том, что две жидкости разной плотности (отношения плотностей  $\gamma = 0.993$ ), изначально разделенных перегородкой, были помещены в лоток прямоугольной формы. После того как перегородка быстро убиралась, более тяжелая жидкость начинала течь в правую сторону, распространяясь у дна, а более легкая, соответственно, начинала двигаться в левую сторону у поверхности. При этом наблюдалось образование так называемых вихрей Кельвина-Гельмгольца в вертикальной плоскости.

На рис. 5 показаны результаты визуализации эксперимента в сравнении с полями плотности, рассчитанными с помощью негидростатической и ги-

дростатической моделей. Вязкость в этом примере полагалась молекулярной. Как видно, гидростатическая модель не воспроизводит вихревые структуры в вертикальной плоскости, и дает ступенчатый контур фронта плотности во все показанные моменты времени.

Изначально положения фронтов тяжелой и легкой жидкостей достаточно хорошо описываются как гидростатической, так и негидростатической моделями, и являются почти линейными функциями времени  $t$ . Более того, гидростатическая модель даже немного лучше воспроизводит положение фронта тяжелой жидкости, что вероятно связано с меньшей численной диссипацией ввиду отсутствия вихрей и, как следствие, большей долей начальной потенциальной энергии, переходящей в горизонтальное движение.

Другим интересным экспериментом, описанным в [20], является случай, когда более тяжелая жидкость изначально заполняет только половину лотка по глубине в его левой части, и покрыта более легкой жидкостью сверху (рис. 6). В этом случае негидростатической модель, в отличие от гидростатической, достаточно хорошо воспроизводит как форму "головы" так и положение фронта тяжелой жидкости.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен метод численного расчета негидростатических течений со свободной поверхностью в  $\sigma$ -системе координат, который основан на разделении давления на гидростатическую и негидростатическую компоненты, вычисляемые поэтапно на каждом шаге численного интегрирования: сначала решение находится в гидростатическом приближении, после чего выполняется его коррекция так, чтобы удовлетворялось уравнение нера-

зрывности. Такой подход дает возможность эффективного применения одной и той же численной модели как в гидростатическом, так и в негидростатическом режимах расчетов.

Дискретизация уравнений, записанных в  $\sigma$ -системе координат, качественно отличается от дискретизации в  $z$ -системе не только из-за наличия дополнительных слагаемых в уравнениях, которые приводят к необходимости решать линейную систему уравнений с 25-диагональной матрицей, но и из-за граничных условий на свободной поверхности.

Предложенный метод показал хорошее согласование результатов численного расчета с аналитическими решениями задачи про волновые колебания жидкости в прямоугольном сосуде; с лабораторными измерениями распространения поверхностных волн над погруженным препятствием; с измерениями процесса перемешивания двух жидкостей разной плотности в гидравлическом лотке.

Разработанная модель является перспективной с точки зрения применения ко многим инженерным и теоретическим задачам, таким как расчет течений и перемешивания вблизи водосбросов, моделирование течений над подводными препятствиями, моделирование стратифицированных течений.

Автор выражает искреннюю благодарность д-ру физ.-мат. наук, профессору В.С. Мадеричу за полезные замечания, которые были учтены при подготовке этой публикации.

1. Педлоки Дж. Геофизическая гидродинамика. В 2-х томах. – М.: Мир, 1984. – 398 (т. 1), 416 (т.2) с.
2. Гандин Л.С., Лайхтман Д.Л., Матвеев Л.Т., Юдин М.И. Основы динамической метеорологии. – Л.: Гидрометиздат, 1955. – 647 с.
3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – Л.: Гостехиздат, 1948. – 535 с.
4. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. – Москва: Мир, 1969. – 267 с.
5. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.1. Основные положения и общие методы. – М.: Мир, 1991. – 502 с.
6. Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J.M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H. Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Ed. – SIAM: siam.org/books, 2006. – 106 p.
7. Beji S., Battjes J.A. Experimental investigation of wave propagation over a bar. // Coastal Engineering. – 1993. – **19**. – P. 151-162.
8. Beji S., Battjes J.A. Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar. // Coastal Engineering. – 1994. – **23**. – P. 1-16.
9. Blumberg A.F., Mellor G.L. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation. // Three-Dimensional Coastal Ocean Models. – 1987, N. Heaps (Ed.), Washington D.C., Am. Geoph. Union. – P. 1-16.
10. Burchard H., Petersen O. Models of turbulence in the marine environment - a comparative study of two-equation turbulence models. // J. of Mar. Syst. – 1999. – **21**. – P. 29-53.
11. Casulli V. Semi-Implicit Finite Difference Methods for the Two-Dimensional Shallow Water Equations. // J. of Computational Physics. – 1990. – **86**. – P. 56-74.
12. Casulli V., Cheng R.T. Semi-Implicit Finite Difference Methods for Three-Dimensional Shallow Water Flow. // Int. J. for Numer. Meth. in Fluids. – 1992. – **15**. – P. 629-648.
13. Casulli V. A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows. // Int. J. for numerical methods in fluids. – 1999. – **30**. – P. 425-440.
14. Fringer O-B., Gerritsen M., Street R.L. An unstructured-grid, finite-volume, nonhydrostatic, parallel coastal ocean simulator. // Ocean Modelling. – 2006. – **14**. – P. 139-173.
15. Härtel C., Meiburg E., Necker F. Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head. Part 1. Flow topology and front speed for slip and no-slip boundaries. // J. Fluid Mech. – 2000. – **418**. – P. 189-212.
16. Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows, Vol. 2. Computational Methods for inviscid and viscous flows. – New York: Wiley and Sons, 1990. – 714 p.
17. Kanarska Y., Maderich V. A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows. // Ocean Dynamics. – 2003. – **53**. – P. 176-185.
18. Lin P., Li C.W. A  $\sigma$ -coordinate three-dimensional numerical model for surface wave propagation. // Int. J. for numerical methods in fluids. – 2002. – **38**. – P. 1045-1068.
19. Namin M.M., Lin B., Falconer R.A. An implicit numerical algorithm for solving non-hydrostatic free-surface flow problems. // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2002. – **35**. – P. 341-356.
20. Shin J.O., Dalziel S.B., Linden P.F. Gravity currents produced by lock exchange. // J. Fluid Mech. – 2004. – **521**. – P. 1-34.
21. Stansby P.K., Zhou J.G. Shallow-water flow solver with non-hydrostatic pressure: 2D vertical plane problems. // Int. J. for Numer. Meth. in Fluids. – 1998. – **28**. – P. 541-563.