

УДК 301.17.15.13, 551.465

КВАЗИКОМПАКТНЫЕ ВИХРЕИСТОЧНИК И ВИХРЕСТОК**П. В. ЛУКЪЯНОВ***Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 08.02.2011*

Найдено автомодельное решение, способное описывать диффузию поля завихренности с конечной кинетической энергией на фоне вихреисточника или вихрестока. Его особенностью есть то, что поле завихренности, при наличии источника или стока, никогда не является полностью компенсированным. Введено в рассмотрение функцию компенсации – интеграл с переменным верхним пределом от завихренности. Если абсолютное значение этой функции убывает, то кинетическая энергия такого течения имеет конечное значение, поскольку азимутальная скорость при этом уменьшается быстрее, чем в случае потенциального течения (точечный вихрь). При одинаковых по абсолютной величине интенсивностях вихревое течение на фоне стока сильнее своего аналога на фоне источника.

Знайдено автомодельний розв'язок, що здатний описувати дифузію поля завихреності зі скінченною кінетичною енергією на тлі вихреджерела або вихрестока. Його особливістю є те, що поле завихреності, за наявності джерела або стоку, ніколи не є повністю компенсованим. Введено у розгляд функцію компенсації – інтеграл зі змінною верхню межею від завихреності. Якщо модуль цієї функції спадає, то кінетична енергія такої течії має скінченне значення, оскільки азимутальна швидкість при цьому зменшується швидше, ніж у випадку потенційної течії (точковий вихор). При однакових за абсолютною величиною інтенсивностях, вихорова течія на тлі стоку сильніша свого аналога на тлі джерела.

It has been obtained the self-similar solution that is able to describe a finite kinetic energy vorticity field diffusion at the presence of sink or source flow. At the presence of sink or source flow, the solution is never strictly compensated. It has been introduced a compensation function that is alternative upper bound vorticity integral. When the absolute value of the function decrease the kinetic energy of the flow has a finite value because azimuthal velocity is declined faster than it is in potential flow (point vortex). For the same absolute values of sink and source vortex flow is stroger at the sink background.

ВВЕДЕНИЕ, АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ

Известно, что вихреисточник и вихресток - это пример одного из наипростейших вихревых движений. Математическая модель такого движения, используемая в настоящее время, представляет собой наложение двух движений [1]:

$$V_r = \frac{C_1}{r}, \quad V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad V_z = 0. \quad (1)$$

Однако представление (1) имеет существенные недостатки. Оно не описывает реальные вихревые движения. В случае бесконечной области интеграл от кинетической энергии равен бесконечности [2]. Простейшая модель получила дальнейшее развитие. Было найдено стационарное решение общего вида задачи о вязком вихреисточнике или вихрестоке [3, 4] в области $r_1 \leq r \leq r_2$. Нестационарные модели рассматривались в русле генерации завихренности источником или стоком. Так, в работе [5] рассмотрена задача о вращении жидкости как твердого тела с некоторой постоянной угловой скоростью. И находилось возмущение азимутальной скорости и завихренности, обусловленные точечным источником (стоком), испускающим

(поглощающим) по нормали к своей оси в единицу времени на единицу длины постоянную массу жидкости. В [5] получены автомодельные решения поля азимутальной скорости и вертикальной завихренности. Судя по приведенным графическим данным, эти поля скорости не являются компактными, а поле завихренности состоит из области одного знака. Как указывают многочисленные натурные эксперименты [6], реальные вихри (области вращающейся жидкости) имеют конечные размеры. Кроме этого, полученное в [5] поле завихренности линейно зависит от угловой скорости вращения Земли. Без учета вращения, азимутальная скорость и вертикальная завихренность тривиальны (равно нулю). В относительно недавно опубликованной работе [7] критикуется такой подход. Правда, ссылаясь на статью [8]. Дело в том, что в обычной ванне видно, как за время порядка минуты возникает вихресток. А масштаб времени вращения Земли – 24 часа (сутки). Иными словами, причина образования мощного вращательного движения в данном случае – не земное вращение.

Наиболее близкой к данным исследованиям является работа [9], где рассмотрена задача диффузии вихреисточника. Течение в виде классического вихреисточника (1) к начальному моменту времени индуцировано бесконечно тонким пористым

цилиндром, вращавшимся бесконечно долго. Математическая формулировка задачи следующая:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial r_1} + \frac{w_1}{r_1} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial w_1}{\partial r_1} - \frac{w_1}{r_1^2} \right),$$

$$w_1(t, 0) = 0, \quad w_1(t, r_1) \rightarrow \Gamma/r_1, r_1 \rightarrow \infty,$$

где $v_1 = Q/r$ – радиальная скорость течения; w_1 – азимутальная скорость; Q – мощность источника; ν – кинематический коэффициент вязкости.

Переходя к автомоделным переменным

$$r = r_1/\sqrt{4\nu t}, \quad v_1 = \frac{Q}{\sqrt{\nu t} r}, \quad w_1 = \frac{\Gamma}{\sqrt{4\nu t}} w(r),$$

получаем решение в виде

$$w = \frac{c}{r} \int_0^r r^{1+Q/\nu} e^{-r^2} dr, \quad c = \int_0^\infty r^{1+Q/\nu} e^{-r^2} dr. \quad (2)$$

Все приведенные в [9] частные решения

$$Q = 0 : w = \frac{1}{r} (1 - e^{-r^2});$$

$$\frac{Q}{\nu} = 2 : w = \frac{1}{r} [1 - (1 + r^2) e^{-r^2}];$$

$$\frac{Q}{\nu} = 4 : w = \frac{1}{r} \left[1 - \left(1 + r^2 + \frac{r^4}{2} \right) e^{-r^2} \right]$$

раньше или позже, выходят на асимптоту – потенциальное течение, соответствующее точечному вихрю.

В природе, как правило, генерация завихренности происходит за конечный промежуток времени. Поэтому радиальное распределение азимутальной скорости должно быть таким, чтобы не нарушался закон сохранения энергии, в данном случае эквивалентный конечности кинетической энергии вращения. Поэтому цель данной работы – нахождение таких автомоделных решений задачи диффузии завихренности на фоне стока или источника, которые бы соответствовали конечности кинетической энергии вращения.

В данной работе, в отличие от перечисленных выше, рассмотрено уравнение движения в терминах завихренности, а не азимутальной скорости. Это позволило использовать опыт автора статьи [10] и найти автомоделное решение второго рода [11] для диффузии завихренности в поле вихресточка или вихресточника. Особенность этого решения заключается в том, что оно не является строго компенсированным ни при каких сочетаниях параметров. Поэтому понятие компактности

расширено: от компактности по Сэффмену, – экспоненциальное убывание с ростом радиальной координаты всех полей, – до компактности в смысле конечности кинетической энергии вращения.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть конечное время на фоне течения в виде источника или стока генерируется вихревое движение. Например, при вращении бесконечно тонкого пористого цилиндра. Независимо от вида вихрегенера, кинетическая энергия рассматриваемого вращения всегда конечна. В некоторый момент времени генерация вихря прекращается, а течение в виде источника или стока продолжает существовать либо постоянным, либо зависящим от времени. Задача состоит в отыскании автомоделного решения, описывающего диффузию в таком вихресточнике или вихресточе.

В случае осесимметричного плоского течения из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

следует, что радиальная компонента скорости может описываться лишь потенциальным законом:

$$V_r = \frac{Q(t)}{r}. \quad (4)$$

Поэтому задача сводится к решению уравнения диффузии завихренности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{Q(t)}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} = K_L(t) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right), \quad (5)$$

где $K_L(t)$ – коэффициент диффузии, в общем случае зависящий от времени.

Автомоделное уравнение можно получить при помощи следующих соотношений:

$$\omega = t^\alpha \hat{\Omega}(\eta); \quad \eta = t^b r; \quad K_L = K_0 t^\gamma; \quad Q(t) = Q_0 t^\beta. \quad (6)$$

Подставляя выражения (6) в (5) и производя стандартную процедуру обезразмеривания, получаем:

$$\text{Re} \left(at^{a-1} \hat{\Omega} + t^{b+a-1} br \frac{d\hat{\Omega}}{d\eta} \right) + \frac{\Lambda}{r} t^{b+a+\beta} \frac{d\hat{\Omega}}{d\eta} =$$

$$= t^\gamma \left(t^{2b+a} \frac{d^2 \hat{\Omega}}{d\eta^2} + \frac{1}{r} t^{b+a} \frac{d\hat{\Omega}}{d\eta} \right), \quad (7)$$

где \mathbf{Re} – число Рейнольдса; $\Lambda = Q/K_L$ – безразмерный параметр, указывающий на отношение мощности источника или стока к величине коэффициента диффузии.

Для того, чтобы уравнение (7) было автомодельным, необходимо выполнение следующих двух условий:

$$\beta = \gamma; \quad \gamma + 2b = -1. \quad (8)$$

Не зависящая от времени константа a в задаче (7) находится из условия сохранения момента количества движения:

$$\int_0^\infty \omega r^3 dr = \text{const.} \quad (9)$$

Объясним последнее. Подинтегральное выражение $\omega r^3 = \omega r^2 r$ означает произведение линейной скорости ωr на радиус r , умноженные на Якобиан r цилиндрической системы координат. Поскольку произведение линейной скорости на радиус вектор есть момент количества движения, то из (9) следует его сохранение при отсутствии внешнего воздействия. А это – хорошо известная теорема теоретической механики: *если момент сил, приложенных к системе, равен нулю, то кинетический момент (или момент количества движения) такой системы – постоянен*. Выражение (9) в цилиндрической системе координат есть, с точностью до множителя, вихревой момент импульса

$$M = -\frac{1}{2}\rho \int r^2 \omega dV, \quad (10)$$

– один из четырех известных инвариантов движения жидкости [12].

Условие (9) дает:

$$a = 4b.$$

И, наконец, зная закон зависимости коэффициента (турбулентной) диффузии, то есть величину γ , определяем в явном виде a и b :

$$b = -\frac{1+\gamma}{2}; \quad a = -2(\gamma+1).$$

Подставляя все необходимые соотношения в (7), получаем следующее автомодельное уравнение:

$$\frac{d^2 \hat{\Omega}}{d\eta^2} + \left(\frac{1-\Lambda}{\eta} - \mathbf{Re} b \eta \right) \frac{d\hat{\Omega}}{d\eta} - \mathbf{Re} a \hat{\Omega} = 0. \quad (11)$$

Граничными условиями для (11) есть:

$$\hat{\Omega}(0) = 1, \quad \hat{\Omega}(\eta) \rightarrow \frac{1}{\eta^\alpha}, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad \alpha > 1. \quad (12)$$

Второе из граничных условий эквивалентно конечности кинетической энергии вращательного движения:

$$\int_0^\infty V_\theta^2 r dr = \text{const.} \quad (13)$$

Общее решение этого уравнения есть:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} = & C_1 \eta^{(\frac{\Lambda}{2}-1)} M \left(\frac{\Lambda}{4} + \frac{3}{2}, \frac{\Lambda}{4}, \frac{\mathbf{Re}(1+\gamma)\eta^2}{4} \right) \times \\ & \times \exp \left(-\frac{\mathbf{Re}(1+\gamma)\eta^2}{8} \right) + \\ & + C_2 \eta^{(\frac{\Lambda}{2}-1)} W \left(\frac{\Lambda}{4} + \frac{3}{2}, \frac{\Lambda}{4}, \frac{\mathbf{Re}(1+\gamma)\eta^2}{4} \right) \times \\ & \times \exp \left(-\frac{\mathbf{Re}(1+\gamma)\eta^2}{8} \right), \quad (14) \end{aligned}$$

где M, W – функции Уиттекера.

Более просто решение можно представить в виде ряда:

$$\hat{\Omega} = \sum_k^\infty A_k \eta^{k-1}, \quad k = 1, 3, \dots \quad (15)$$

Коэффициенты A_k находятся из рекуррентных соотношений:

$$A_{k+2} = -\frac{\mathbf{Re}(k+n)}{(k+1)(k+1-\Lambda)} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) A_k. \quad (16)$$

Сожмем автомодельную переменную, перейдя к другой:

$$\eta' = \eta / \sqrt{\mathbf{Re}}.$$

В результате получается следующее соотношение:

$$A'_{k+2} = -\frac{(k+3)}{(k+1)(k+1-\Lambda)} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) A'_k. \quad (17)$$

Оно и будет использовано далее. При отсутствии источника или стока ($\Lambda = 0$) в случае инерционного интервала турбулентности ($\gamma = 2$) выражение (17) преобразуется в уже известное соотношение [10]:

$$A'_{k+2} = -\frac{3(k+3)}{2(k+1)^2} A'_k. \quad (18)$$

Следует отметить, что, в отличие от приведенного во введении автомодельного решения, показатель степени a зависит от номера момента. При $\gamma = 0$, $n = 1$ полученное решение совпадает с указанным и соответствует условию сохранения завихренности.

2. АНАЛИЗ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ НА ЧАСТНЫХ ПРИМЕРАХ

2.1. Расширение понятия компактности вихря: вихри с конечной кинетической энергией

При отсутствии источника или стока ($\Lambda = 0$) решение является изолированным Гауссианом – компактным компенсированным вихрем. Наличие источника или стока ($\Lambda \neq 0$) качественно меняет картину: поле завихренности не является полностью компенсированным, однако вместе с полем азимутальной скорости они все же могут быть компактными. Для этого используем уже другое известное понятие компактности (но не по Сэффмену). Будем считать вихрь компактным при условии:

$$V_\theta^c = \frac{\text{const}}{r^\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad r \gg 1. \quad (19)$$

Физический смысл этого условия раскрывает выражение для кинетической энергии

$$E_k^c = \int_{r_0}^{\infty} r^{-2\alpha+1} dr = \frac{r_0^{1-\alpha}}{2(\alpha-1)}, \quad (20)$$

означающее выполнение закона сохранения энергии: диффундируя, энергия вращения (вихря) конечна в произвольный момент времени. Индекс c в обозначениях скорости и энергии введен для их отличия от обычных величин. Это асимптоты, с которыми сравниваются соответствующие величины скорости и энергии.

Мерой компактности может служить интеграл завихренности:

$$Int(r) = \int_0^r \omega_z r dr = V_\theta r. \quad (21)$$

Для потенциального течения $Int(r) = \text{const}$. Если $|Int(r)|$ убывает с ростом радиальной координаты, то это означает более быстрое, чем в потенциальном течении, затухание поля скорости, что эквивалентно компактности вихря и, как отмечено выше, конечности его кинетической энергии.

2.2. Примеры компактных вихрей

Во всех приведенных ниже примерах рассматривается стационарный источник или сток, поэтому $\beta = \gamma = 0$.

На рис. 1 приведены кривые, описывающие азимутальную скорость для различных значений параметра Λ . Нижняя кривая соответствует изолированному Гауссиану. Напомним, что это решение не просто компактное – оно также и компенсированное. Для вихреисточника и вихрестока, мощность которых на порядок меньше мощности диссипации за счет диффузии ($\Lambda = \pm 0.1$), азимутальная скорость также компактна, но уже убывает не по экспоненциальному закону. У вихреисточника наблюдается зона противотечения, а у вихрестока – более медленное убывание кривой зависимости скорости от радиальной координаты. Но, обратите внимание: в обоих случаях – источника и стока – амплитуда азимутальной скорости, да и энергия (см. рис. 4) значительно больше, чем при их отсутствии. Следовательно, часть энергии от источника или стока передаётся во вращение. При этом максимальное значение приходится на случай стока. На рис. 2 представлены соответствующие кривые для завихренности. Как видно, все они компактные. Важным, в смысле определения компактности течения, является рис. 3, где представлен интеграл от завихренности. Видно, что у вихреисточника и вихрестока поле завихренности не компенсировано, но зато убывает по абсолютной величине с ростом радиальной координаты. Последним подтверждением компактности является рис. 4, где представлены кривые зависимости кинетической энергии вращения от радиальной координаты. Все три кривые выходят на асимптоту – каждая на свое значение. Следует отметить, что наличие даже относительно слабого вихреисточника или вихрестока заметно увеличивает кинетическую энергию вращения.

2.3. Компактный вихрь в случаях слабых вихреисточника и вихрестока

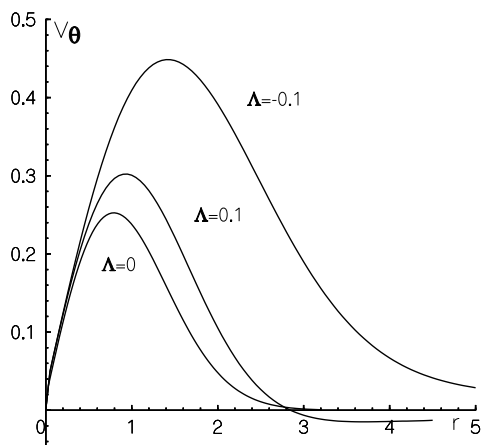


Рис. 1. Кривые азимутальной скорости

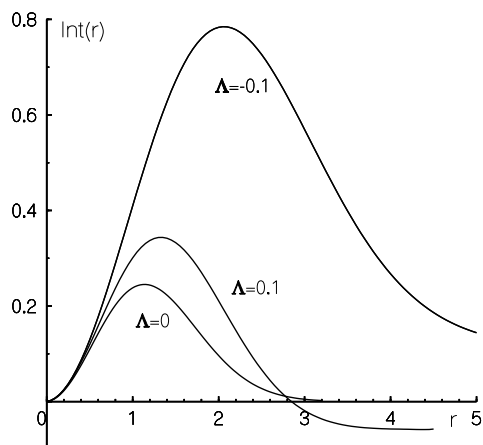


Рис. 3. Функция компенсированности вихревого течения

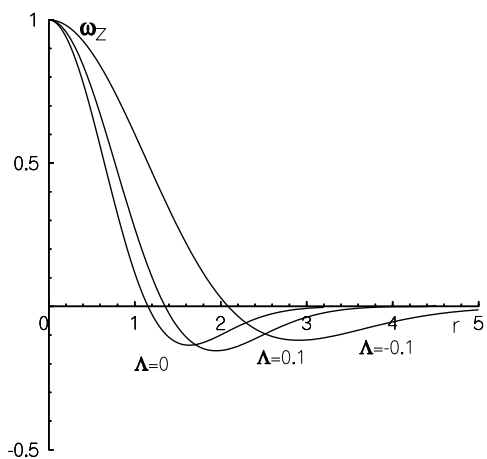


Рис. 2. Кривые завихренности

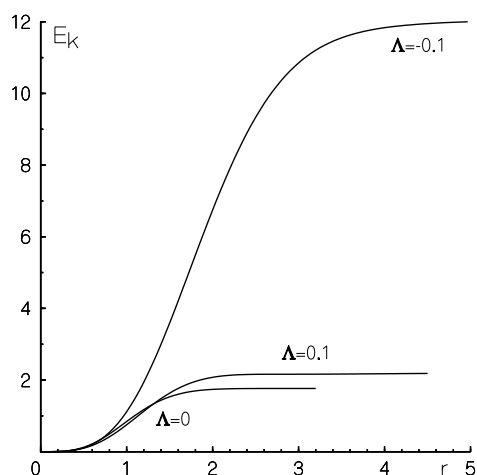


Рис. 4. Кривые кинетической энергии вращения

Как уже упоминалось выше, в природе часто наблюдаются достаточно компактные вихри. Естественно, радиальная скорость в них не отсутствует. Но мощность источника или стока при этом во много раз слабее той турбулентной диффузии, которой подвергается вихрь. Поэтому представляет интерес рассмотреть отдельно случаи слабого источника или стока как наиболее подходящие к описанию указанных объектов. Понятие слабый в данном случае, как и всегда, относительное. Для этого логичнее всего считать те значения параметра Λ , при которых отличия между источником и стоком количественно сводятся на нет. Как показывают расчеты, этой границей можно прибли-

женно считать значение $\Lambda = \pm 0.01$.

На рис. 5 представлены наиболее разнящиеся величины – кинетические энергии вращения. Различия на графиках остальных величин еще меньше. И, как правило, в натуральных измерениях они отбрасываются. При этом роль источника или стока нивелируется.

Видно, что даже при столь малых значениях Λ общая энергия вращения на фоне источника и стока – разные величины.

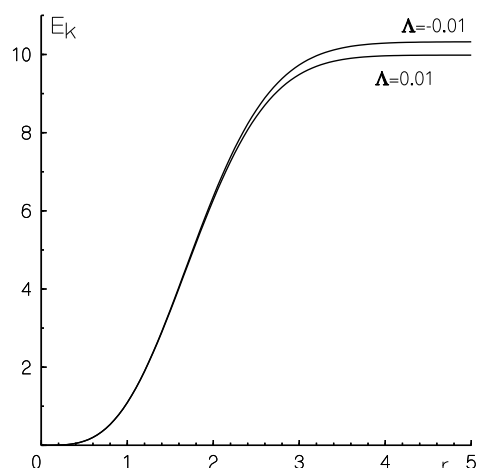


Рис. 5. Кривые кинетической энергии вращения в случаях слабого источника и стока

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Сформулирована и решена задача диффузии завихренности вихреисточника или вихрестока, имеющего конечную кинетическую энергию вращения. Найдено автомодельное решение. Поле радиальной скорости не является компактным, а поле азимутальной – компактно. Поэтому решение и названо квази(полу)компактным. На примерах показан характер убывания полей скорости, завихренности и кинетической энергии вращения. Понятие компактности вихря расширено. Вместо экспоненциального убывания с ростом радиальной координаты предложено считать компактным также такой вихрь, у которого поле скорости убывает быстрее, чем у точечного вихря. А это, в свою очередь, гарантирует выполнение закона сохранения энергии: кинетическая энергия такого вращения конечна. Кинетическая энергия вращения в вихрестоке превышает энергию вихреисточника. Но

главное, что малые мощности источника и стока способны значительно увеличить кинетическую энергию вращения.

Автор статьи выражает глубокую признательность докт. физ.-мат. наук Стеценко А.Г. за критику первоначального варианта рукописи, в результате чего работа претерпела существенных изменений.

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
2. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур.– К.: Наукова думка, 1993.– 268 с.
3. Бетчелор Дж. К. Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 760 с.
4. Мочалин Е.В., Халатов А.А. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных и массовых сил. Т. 8. Гидродинамика закрученного потока в ротационных фильтрах.– К.: Ин-т. техн. теплофизики НАН Украины, 2010.– 428 с.
5. Афанасьев Я.Д., Воропаев С.И. Плоское вихревое течение, вызванное источником (стоком) массы во вращающейся вязкой жидкости // Известия АН СССР МЖГ.– 1991.– № 4.– С. 172-175.
6. Козлов В.Ф. Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей. // Известия АН ФАО.– 1992.– Т. 28, № 6.– С. 615-624.
7. Tyvand Peder A., Naugen Kjetil B. An impulsive bathtub vortex // Phys. Fluids.– 2005.– V. 17.– P. 062105-1 – 062105-8.
8. Marris A.W. Theory of bathtub vortex // Trans. ASME J. Appl. Mech.– 1967.– V. 34, № 11.
9. Гайфуллин А.М. Автомодельное нестационарное течение вязкой жидкости // Механика жидкости и газа.– 2005.– № 4.– С. 29-35.
10. Лукьянов П.В. Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // Прикл.гидром.– 2006.– Т. 8 (80), №3.– С. 63-77.
11. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика.– Л.: Гидрометеиздат, 1982.– 256 с.
12. Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей.– Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003.– 503 с.