ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2011. Том 13, N 4. С. 68 – 77

УДК 532.465

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ ИХ ФРОНТАЛЬНОМ СТОЛКНОВЕНИИ

Е. ТЕРЛЕЦКАЯ, В. МАДЕРИЧ, И. БРОВЧЕНКО

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

Получено 9.03 2011

Численно исследуется динамика и энергетика фронтального столкновения уединенных внутренних волн, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией. Расчеты проводятся в рамках уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска с использованием негидростатической модели. Показано, что взаимодействие волн большой амплитуды приводит к сдвиговой неустойчивости и формированию вихрей Кельвина-Гельмгольца в слое раздела.

Чисельно досліджується динаміка та енергетика трансформації внутрішніх відокремлених хвиль великої амплітуди, що розповсюджуються в рідині з двошаровою стратифікацією. Розрахунки проводяться в рамках рівнянь Нав'є-Стокса у наближенні Буссінеска з використанням негідростатічної моделі. Показано, що взаємодія хвиль великої амплітуди призводить до сдвигової нестійкості та формування вихорів Кельвіна-Гельмгольца в шарі розділу.

The dynamics and energy transformation of internal solitary waves of large amplitude, propagating in a fluid with two-layer stratification are investigated numerically. Calculations are performed in frame of the Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation using non-hydrostatic model. It is shown that the interaction of large-amplitude waves leads to shear instability and the formation of Kelvin-Helmholtz vortices in the layer section.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из выдающихся достижений теоретической физики XX века было открытие и исследование солитонов - уединенных волн, которые асимптотически сохраняют свою форму и скорость при взаимодействии с другими локализованными возмущениями [1]. Решения ряда уравнений, в том числе уравнений Кортевега-Де Вриза (КдВ), Гарднера, нелинейного уравнения Шредингера и других, обладают этими свойствами [2]. Вопрос о том, являются ли длинные гравитационные уединенные волны на поверхности воды солитонами, интенсивно обсуждался в последние десятилетия. Оказалось, что хотя слабонелинейные асимптотические теории волн на мелкой воде и приводят к интегрируемым уравнениям, решениями которых являются солитоны, в более высоких порядках уединенные волны на поверхности воды не имеют солитонных свойств, хотя отклонения от солитонного поведения небольшие (см. обзор в [3]). Длинные внутренние гравитационные уединенные волны при непрерывной стратификации также не обладают солитонными свойствами из-за конечного числа сохраняющихся инвариантов [3], но отклонения от солитонного поведения для волн малой амплитуды также невелики.

Взаимодействие уединенных волн при фронтальном столкновении отличается от взаимодействия волн, распространяющихся в одном и том же направления, рядом специфических особенностей. В частности, при фронтальном взаимодействии поверхностных волн одинаковой и достаточно большой амплитуды наблюдается формирование вертикальной струи, вызванной вертикальным ускорением при слиянии встречных волн [4–5]. Аналитически и численно фронтальное взаимодействие внутренних волн малой амплитуды в двухслойной жидкости изучалось в [6–8], где было показано, что оно проявляется в генерации дисперсионных хвостов и некотором малом фазовом сдвиге.

Взаимодействие уединенных внутренних волн большой амплитуды, которые часто встречаются на океанском шельфе (см. напр.[9–10]), до сих пор мало изучено. Известны стационарные решения уравнений Эйлера для двухслойной невязкой жидкости, которые описывают уединенные волны большой амплитуды [11–13]. Однако наличие разрыва скорости между слоями приводит к неустойчивости Кельвина-Гельмгольца этих решений [14]. Регуляризация решений путем фильтрации коротковолновых возмущений [15], учета дополнительных членов высокого порядка [16] или модификации исходной постановки [17] приводит к устойчивым решениям. Взаимодействие уединенных волн в рамках таких моделей слабое и также проявляется в генерации дисперсионных хвостов малой амплитуды. В то же время, формирование вихрей Кельвина-Гельмгольца в волнах большой амплитуды наблюдалось как в лабораторных эк-

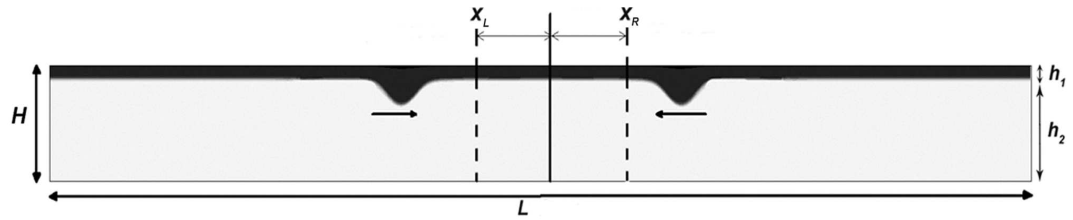

Рис. 1. Геометрия задачи. Штриховые линии показывают контрольные сечения, где рассчитывались потоки энергии (см. Раздел 3)

сперементах [12 – 18], так и в натурных исследованиях [9–10] и в численных расчетах в рамках уравнений Навье-Стокса [19 – 20]. Эта неустойчивость приводит к генерации турбулентности, перемешиванию в слое раздела и затуханию уединенных волн. Поэтому следует ожидать, что взаимодействие волн большой амплитуды будет сопровождаться неустойчивостью Кельвина – Гельмгольца, в отличие от предсказаний регуляризованных моделей сильно нелинейных волн. Задача данной статьи – исследование в рамках уравнений Навье-Стокса фронтального взаимодействия сильно нелинейных внутренних волн–понижений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Геометрия задачи показана на рис. 1. Две внутренние уединенные волны движутся навстречу друг другу в вертикально двумерном вычислительном бассейне лабораторных масштабов, заполненном стратифицированной по солености водой, в котором два однородных слоя разделены узким слоем скачка солености. Невозмущенная поверхность раздела находится на расстоянии h_1 от поверхности воды, толщина нижнего слоя $h_2 = H - h_1$. Плотность верхнего и нижнего однородных слоев – ρ_1 и ρ_2 соответственно.

Расчеты проводились в рамках уравнений Навье-Стокса для стратифицированной среды в приближении Буссинеска. Система уравнений неразрывности, движения и переноса соли имеет вид:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{g_i \rho}{\rho_0}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U_j \frac{\partial S}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2}, \qquad (3)$$

где $x_i = (x, y, z)$ – декартовы координаты, ось z направлена вертикально вверх; $U_i = (U, V, W)$ – составляющие поля скорости; P – давление; ρ – плотность воды; S – соленость; $g_i = (0, 0, g)$ – ускорение силы тяжести; ν – кинематическая вязкость; χ – молекулярная диффузия. Система уравнений (1)-(3) дополнялась уравнением состояния [21]. На свободной поверхности касательные напряжения отсутствуют, а на дне используются условия прилипания. Потоки соли через границы бассейна отсутствуют.

Система уравнений модели дискретизировалась с использованием метода конечных разностей на сдвинутой сетке. Решение задачи расщеплялось на две подзадачи: (а) – решение двумерной системы уравнений для возвышений уровня и осредненных по глубине скоростей и (б) – решение трехмерной задачи для скорости и давления. Поле скорости и давления в трехмерной подзадаче расщеплялось на гидростатическую и негидростатическую составляющие. Алгоритм решения детально описан в [22].

Вычислительный бассейн лабораторных масштабов имел длину $L = 20$ м и глубину $H = 0.32$ м. Все численные эксперименты проводились при толщине верхнего слоя h_1=4 см. Задача решалась в квазидвумерной постановке, когда уравнения дискретизировались в нескольких узлах поперек бассейна при условии скольжения на боковых стенках бассейна. Разрешение сетки по длине, высоте и ширине составляло $2400 \times 260 \times 4$. Невозмущенная стратификация в бассейне моделировалась в виде поверхностного и придонного однородных слоев с соленостью $S_{up} = 0$ и $S_{bot} = 30$ при постоянной температуре 20^oC, разделенных тонким переходным слоем. Профиль солености аппроксимировался формулой

$$S(z) = \frac{S_{up} + S_{bot}}{2} - \frac{S_{bot} - S_{up}}{2} \mathrm{th}\left(\frac{z - h_1}{dh}\right), \qquad (4)$$

где $dh = 0.2$ см. В качестве поверхности раздела в расчетах визуализировалась изохалина, равная 15. Численные эксперименты проводились при значениях кинематической вязкости

$\nu = 1.14 \cdot 10^{-6}$ м^{2}с$^{-1}$ и молекулярной диффузии соли $\chi = 10^{-9}$ м^{2}с$^{-1}$.

Для генерации уединенных волн большой амплитуды при численном моделировании используются два метода: либо используются решения уравнения Дюбрей-Жакотен-Лонга [23] либо, по аналогии с лабораторными экспериментами (напр. [24]), механизм коллапса. Во втором методе в вычислительном бассейне выделяется часть объема, заполненная водой отличающейся плотности. Для того, чтобы сформировать уединенную волну-понижение, начальная толщина верхнего слоя в выделенном объеме должна быть больше, чем в остальном бассейне. В противоположном случае генерируются волны повышения. В наших расчетах использовался второй метод. После того, как головная волна трансформировалась в уединенную волну, осциллирующий мелкомасштабный хвост "отрезался".

Табл 1. Параметры расчетов

Эксп.	$\frac{a_l^-}{h_1}$	$\frac{a_r^-}{h_1}$	$\frac{a_l^+}{h_1}$	$\frac{a_r^+}{h_1}$	ΔE	δE
1	1.35	1.35	1.3	1.3	0.07	0.03
1*	1.35	–	1.33	–	0.04	–
2	2.17	2.17	2.07	2.07	0.011	0.05
2*	2.17	–	2.1	–	0.06	–
3	2.17	1.35	2.1	1.29	0.085	0.035

В трех численных экспериментах, данные которых приведены в таблице 1, изучается взаимодействие уединенных волн умеренной и большой амплитуды по модулю a. Обозначим амплитуду волн, перемещающихся слева направо в сечениях x_l, x_r и справа налево в сечениях x_r, x_l как a_l^-, a_r^+, a_r^-, a_l^+ соответственно. Первый и второй эксперименты геометрически подобны, но амплитуда взаимодействующих волн в первом из них меньше, чем во втором. В третьем эксперименте волны имеют разную амплитуду. Чтобы учесть эффект вязкого затухания уединенных волн, в экспериментах 1* и 2* проводился расчет одиночных волн с параметрами экспериментов 1 и 2. В таблице приведены также потери энергии на перемешивание за счет неустойчивости, вязкости и диффузии ΔE и потери энергии на перемешивание при взаимодействии δE, детально рассматриваемые в разделе 3. Результаты расчетов представлены в безразмерном виде. Горизонтальная x и вертикальная z координаты и отклонение поверхности раздела η нормируются на h_1. Безразмерное время τ имеет вид

$$\tau = t/\sqrt{\rho_0 h_1/\Delta\rho g}, \qquad (5)$$

где перепад плотности $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$. Время отсчитывается с момента первого пересечения волнами контрольных сечений x_l и x_r. Скорость нормируется на фазовую скорость линейных длинных волн

$$c_0 = \sqrt{\frac{gh_1h_2\Delta\rho}{\rho_0 H}}. \qquad (6)$$

2. ДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В первом эксперименте исследовалось столкновение волн умеренной амплитуды $a/h_1 \approx 1$. Рассмотрим эволюцию волны, распространяющейся слева направо. Как видно на рис. 2, в момент времени $\tau = 0$ волна в сечении x_l описывается как решением уравнения Гарднера [25], так и решением уравнений Чоя-Камассы ([11–13]). Этот результат согласуется с предыдущими расчетами для уединенных волн-повышений [26] и для волн-понижений [19].Трансформация уединенных волн при их столкновении в эксп. 1 приведена на рис. 3, где показано поле солености вдоль бассейна. Как видно из рисунка, волны в процессе взаимодействия остаются устойчивыми. Расчеты показали, что минимальное значение числа Ричардсона

$$\mathrm{Ri} = \frac{\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}{\left[\left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]} \qquad (7)$$

в начальном сечении x_l равно 0.2, тогда как при столкновении волн оно растет и достигает значений, больших чем 0.25, затем падает и, наконец, при x_l Ri = 0.15. Минимальное значение числа Ричардсона Ri достигается при максимальном заглублении поверхности раздела волны. Значения минимального числа Ричардсона в волнах оказались меньше, чем критическое значение 0.25 для параллельных стратифицированных потоков [27]. Но неоднородность потока в уединенных волнах может привести к тому, что необходимое условие Ri <0.25 не будет достаточным для возникновения неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (КГ). Так, согласно оценкам для неустойчивых внутренних волн, минимальное значение Ri, при котором

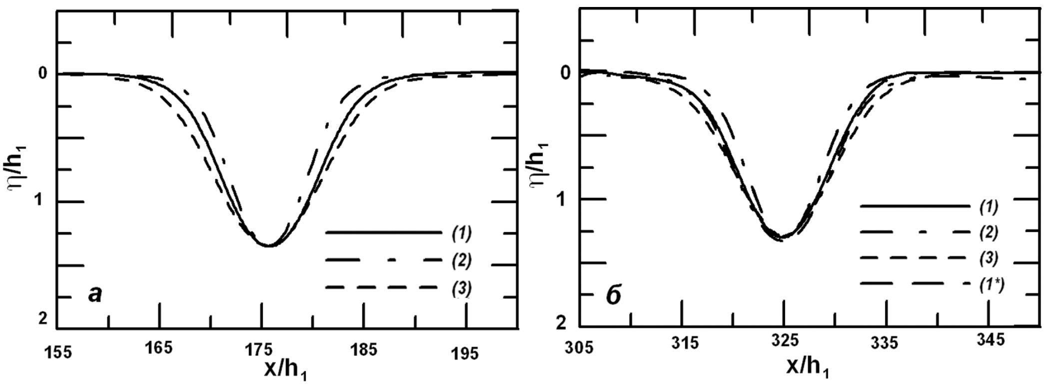

Рис. 2. Профили: *а* – поверхности раздела в волне в сечении x_l (*1*) и профили солитонов Гарднера (*2*) и МЧК (*3*); *б* – поверхности раздела в волне после взаимодействия в сечении x_r (1)и профили солитонов Гарднера (*2*) и МЧК (*3*) в эксп. 1, также показан профиль волны при отсутствии взаимодействия (*1**)

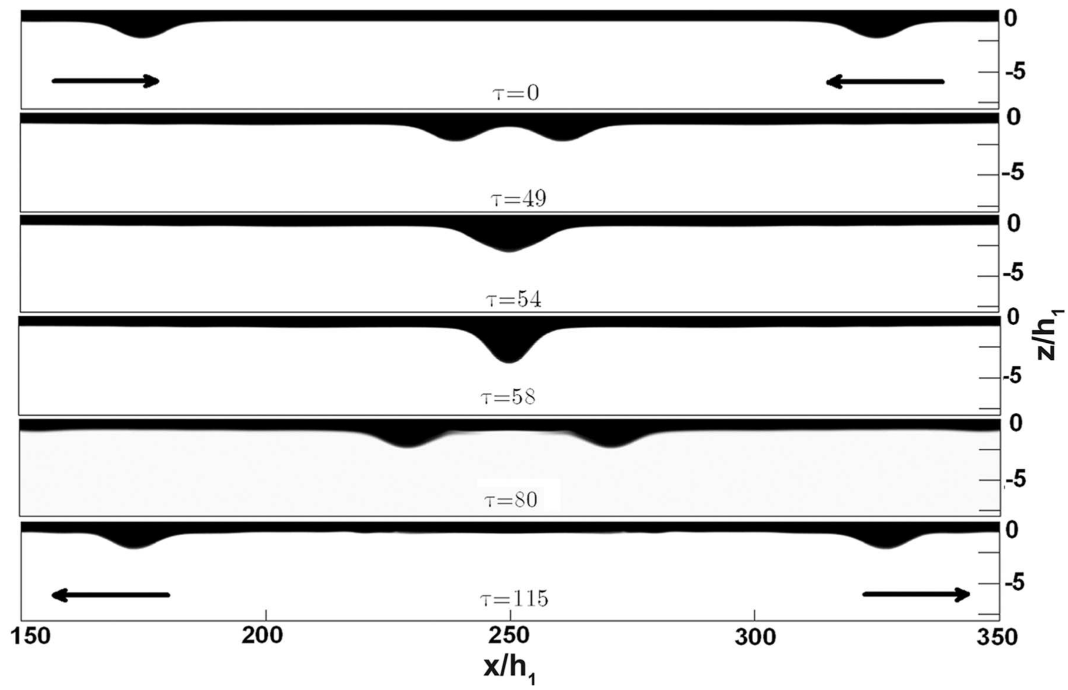

Рис. 3. Поле солености при взаимодействии волн в эксп. 1

начинается неустойчивость КГ внутренних волн, является $\mathrm{Ri} < 0.075 \pm 0.035$ и $\mathrm{Ri} < 0.092 \pm 0.016$ для лабораторных экспериментов [28] и [18] соответственно, тогда как условие $\mathrm{Ri} < 0.10$ и $\mathrm{Ri} < 0.13$ выполняется для численных экспериментов с нелинейными волнами [19] и [20] соответственно.

Из-за нелокальности процесса развития неустойчивости КГ в волнах, использование только числа Ричардсона в качестве критерия неустойчивости может быть недостаточным. Полезной характеристикой состояния потока является длина потенциально неустойчивой области в волне L_x, в которой $\mathrm{Ri} < 0.25$. Эта длина характеризует горизонтальную протяженность области, в которой может развиваться неустойчивость. Эмпирическое соотношение $L_x/\lambda_{0.5} = 0.86$, полученное в [18], отделяет длину устойчивых областей $L_x > 0.86\lambda_{0.5}$ от потенциально неустойчивых. Здесь $\lambda_{0.5}$ –длина волны на половине модуля амплитуды волны. В начальном сечении x_l $L_x/\lambda_{0.5} = 0.65$ и волна также характеризуется как устойчивая.

Дополнительный критерий устойчивости для

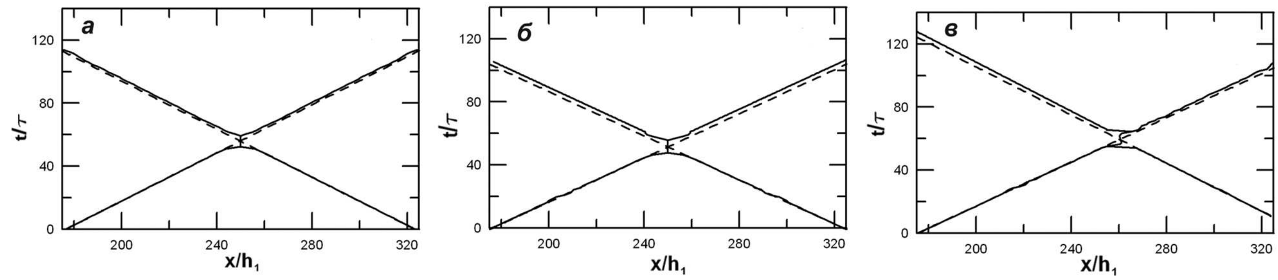

Рис. 4. Траектории вершин взаимодействующих волн в эксп. 1 (*а*), эксп. 2 (*б*) и эксп. 3 (*в*). Штриховой линией показаны траектории волн без взаимодействия

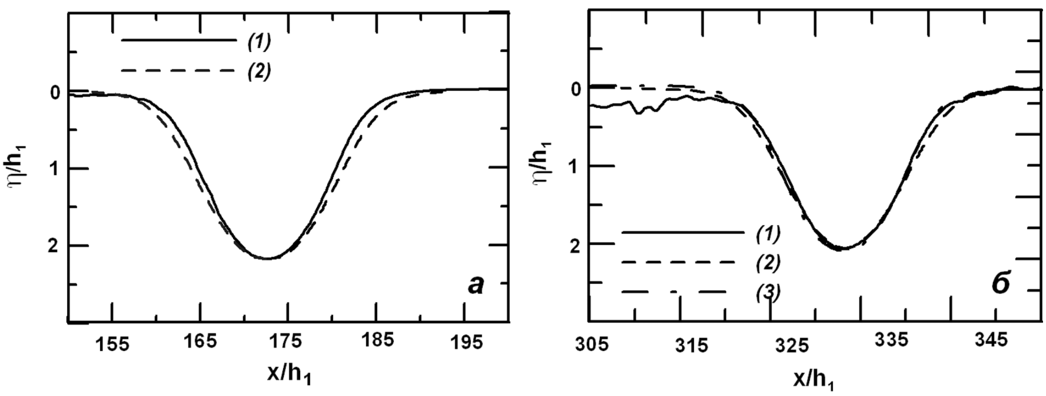

Рис. 5. Профили: *а* – поверхности раздела в волне в сечении x_l (*1*) и солитона МЧК (*2*); *б* – поверхности раздела в волне после взаимодействия в сечении x_r (*1*) и солитона МЧК (*2*) в эксп. 2, также показан профиль волны при отсутствии взаимодействия (*2**).

длинных нелинейных волн в двухслойной жидкости предложен в [16]. В приближении Буссинеска уравнение

$$4a_{cr}^2 - a_{cr}(h_1 - h_2) - h_1 h_2 = 0 \qquad (8)$$

позволяет определить критическое значение a_{cr} амплитуды волны. Уединенная волна становится неустойчивой при $|a| > |a_{cr}|$. При x_l значение $|a|/|a_{cr}| = 0.6$ и таким образом волна и по этому критерию характеризуется как устойчивая.

В эксперименте 1 число Ричардсона при взаимодействии остается больше, чем вышеприведенные значения для волн, и волны остаются устойчивыми. Отношение $L_x/\lambda_{0.5}$ не превосходит критического значения 0.86. За счет вязкого затухания в эксперименте 1* амплитуда волны уменьшается на 1.5% между сечениями x_l и x_r и без взаимодействия. Однако, в результате взаимодействия происходит вязкий размыв при наличии достаточно большого сдвига в волнах, видимый на рис. 3 для $\tau = 80$. Амплитуда волн уменьшается на 3.7% (рис. 2, *б*) и возникает фазовый сдвиг, как видно на рис. 4, *а*, где приведены траектории вершин взаимодействующих волн.

Во втором эксперименте моделировалось взаимодействие сильно нелинейных уединенных волн, в которых амплитуда по модулю волн в начальный момент времени больше, чем предельная амплитуда солитона Гарднера [25], но меньше, чем предельная амплитуда солитона МЧК в приближении Буссинеска:

$$a_{lim} = (h_2 - h_1)/2. \qquad (9)$$

Как видно на рис. 5, *а*, при $a/a_{lim} = 0.72$ уединенная волна устойчива и поверхность раздела хорошо аппроксимируется решением МЧК.

В начальном сечении минимальное число Ричардсона $\mathrm{Ri} = 0.15$, отношение x_l $L_x/\lambda_{0.5} = 0.82$ и $|a|/|a_{cr}| = 0.96$ и, таким образом, волна по всем этим критериям характеризуется как устойчивая.

На рис. 6 приведено распределение солености вдоль вычислительного бассейна. Процесс взаимодействия волн большой амплитуды принципиально отличается от рассмотренного в эксп. 1 возникновением сдвиговой неустойчивости при расхождении волн (τ=60–75), в результате которой

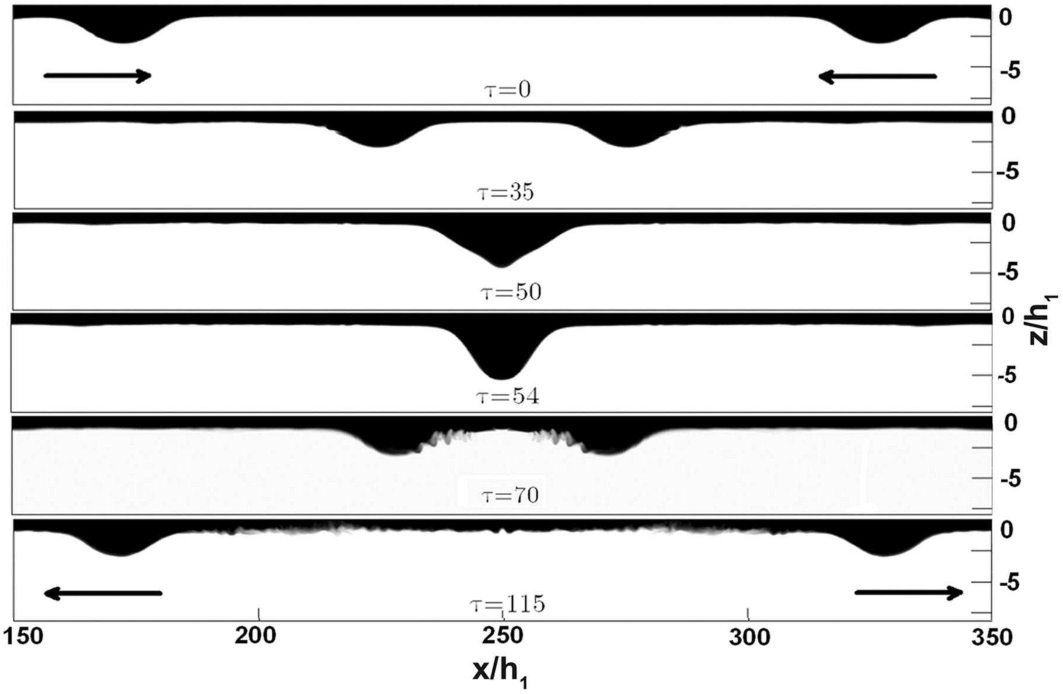

Рис. 6. Поле солености при взаимодействии волн в эксп. 2

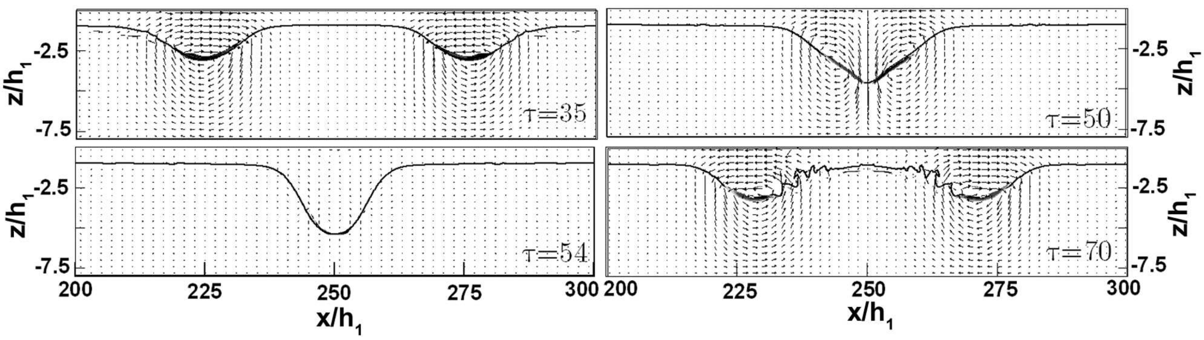

Рис. 7. Распределение скорости, нормированной на c_0, и потенциально неустойчивых областей (Ri < 0.25) при взаимодействии волн в эксп. 2

формируются барашки КГ и происходит перемешивание. Детально этот процесс показан на рис. 7, где представлены поля скорости и контуры потенциально неустойчивых областей, в которых Ri < 0.25. При схождении волн ($\tau = 35$) потенциально неустойчивые области расположены вблизи максимального отклонения поверхности раздела, затем, при схождении волн области максимального сдвига сдвигаются в тыльные части волн ($\tau = 50$). В отличие от поверхностных волн, заплеска с формированием струи [4–5] не происходит, так как из-за малой разности плотности оба слоя динамически активны при наличии стабилизирующего действия трения. Расчеты показали, что неустойчивость начинается при расхождении взаимодействующих волн, когда длина потенциально неустойчивых областей L_x нарастает от 0 при $\tau = 54$ до $L_x/\lambda_{0.5} = 0.86$, что соответствует критерию неустойчивости нелинейных внутренних волн. Число Ричардсона уменьшается до значения 0.07. В дальнейшем L_x падает и волна вновь становится устойчивой. В сечении x_r волна, движущаяся направо, устойчива, характеризуясь минимальным числом Ричардсона Ri = 0.12. При этом $L_x/\lambda_{0.5} = 0.81$ и $|a|/|a_{cr}| = 0.91$. Процесс взаимодействия сопровождается относительно малым фазовым сдвигом (рис. 4, *б*). За счет вязкого затухания в эксп. 2* амплитуда волны уменьшается на 3.2% между

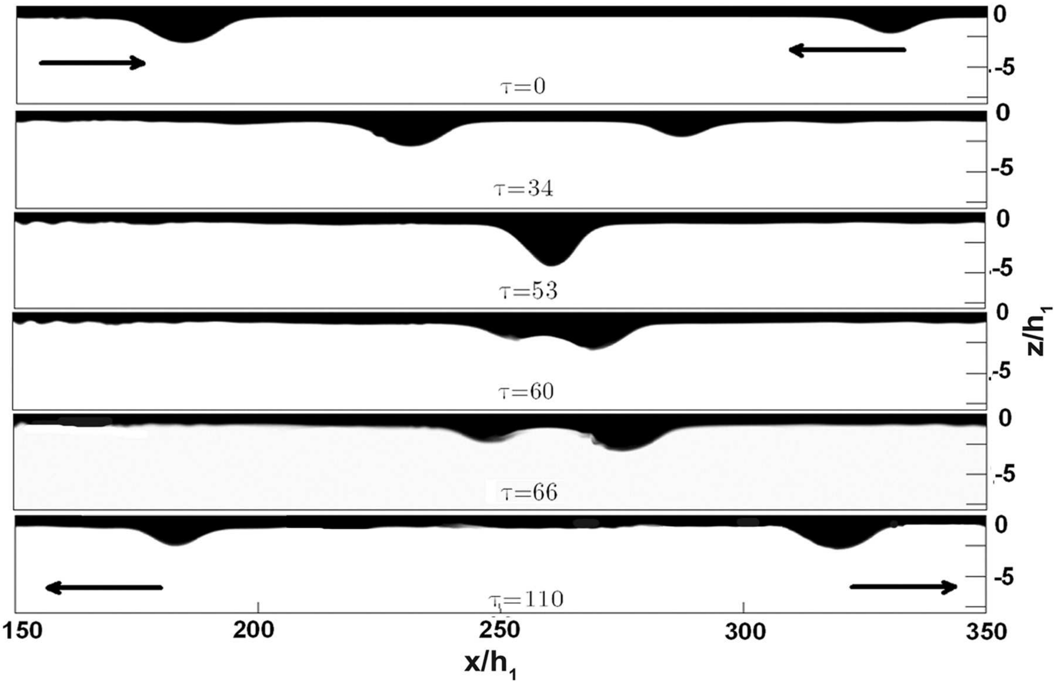

Рис. 8. Поле солености при взаимодействии волн в эксп. 3

сечениями x_l и x_r. В результате взаимодействия происходит перемешивание в слое раздела и амплитуда волн уменьшается на 4.6% (рис. 5, *б*).

В эксперименте 3 моделировалось взаимодействие сильно-нелинейной уединенной волны с такими же параметрами, как в эксперименте 2, с волной меньшей по модулю амплитудой с параметрами, как в эксперименте 1. На рис. 8 показана эволюция поля солености при взаимодействии этих волн. Волна меньшей амплитуды взаимодействует без появления неустойчивости, хотя некоторый размыв слоя раздела и происходит при $\tau = 60$. Число Ричардсона в этой волне падает до $\mathrm{Ri} = 0.15$, тогда как длина потенциально неустойчивой области возрастает до $L_x/\lambda_{0.5} = 0.7$ и затем вновь уменьшается. Неустойчивость волны большей амплитуды начинается при расхождении взаимодействующих волн, когда длина потенциально неустойчивой области нарастает до $L_x/\lambda_{0.5} = 0.86$, что соответствует критерию неустойчивости нелинейных внутренних волн. Число Ричардсона уменьшается до значения 0.08. В дальнейшем L_x падает и волна вновь становится устойчивой. Процесс взаимодействия также сопровождается относительно малым фазовым сдвигом (рис. 4, *в*). В результате взаимодействия происходит перемешивание в слое раздела волн и амплитуда меньшей из волн уменьшается на 4.4%, а большей из волн – на 3.2%.

3. ЭНЕРГЕТИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим преобразования энергии при взаимодействии внутренних уединенных волн. В приближении Буссинеска уравнение состояния линеаризуется и вместо (3) возникает одно уравнение эволюции плотности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j^2}. \qquad (10)$$

Умножая уравнение количества движения (2) на U_α и уравнение (10) на gz, а затем, складывая эти уравнения, получим эволюционное уравнение для плотности полной механической энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial f_E}{\partial x_j} = \mathrm{Diffusion} + \mathrm{Dissipation}, \qquad (11)$$

где E – сумма кинетической $E_K = U_\alpha^2$ и потенциальной $E_P = \rho g z$ энергий на единицу объема, тогда как

$$f_E = U_\alpha (P + E_K + E_P) \qquad (12)$$

является потоком энергии. Правая часть уравнения (11) описывает диффузию энергии и вязкую диссипацию [29].

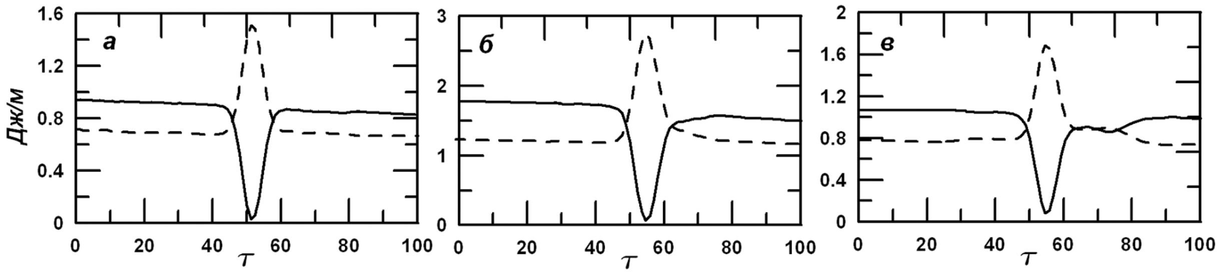

Рис. 9. Эволюция кинетической KE (сплошная) и доступной потенциальной энергии APE (штриховая) взаимодействующих волн в эксп. 1 (а), эксп. 2 (б) и эксп. 3 (в)

Потенциальная энергия (PE) конечного объема жидкости (V)может быть разделена на составляющую, доступную для перехода в кинетическую энергию (APE), и составляющую, недоступную для такого перехода (фоновую) потенциальную энергию (BPE), которая определена как минимум потенциальной энергии в замкнутой системе, достигаемой при адиабатической перестройке поля плотности в данном объеме жидкости [29-30]. Доступная потенциальная энергия конечного объема APE представляет собой разность между потенциальной энергией PE и BPE:

$$APE = PE - BPE = g\int\limits_V z\rho dV - g\int\limits_V z\bar{\rho} dV, \quad (13)$$

где $\bar{\rho}(z,t)$ – горизонтально однородный фоновый профиль плотности, полученный адиабатической перестройкой поля плотности в объеме V. Плотность доступной потенциальной энергии E_A определена как

$$E_A(x,z,t) = g\int\limits_z^{z^*}(\bar{\rho}(z') - \rho)dz. \quad (14)$$

Горизонтально однородный фоновый профиль плотности предполагается обратимым с обратным значением $z^*(\rho,x,z,t)$. Практически этот профиль в замкнутом объеме получается так называемой сортировкой поля плотности [30]. Соответствующее значение гидростатического давления равно $P\bar{(z)}$. Значение E_A соответствует работе перемещения единичного объема жидкости с высоты z^* на высоту z против сил плавучести в жидкости с фоновым профилем $\bar{\rho}(z,t)$ [31]. Сумма $E_k + E_a = E_{PSE}$ называется плотностью псевдоэнергии [29]. Уравнение (11) можно переписать в терминах псевдоэнергии:

$$\frac{\partial E_{PSE}}{\partial t} + \frac{\partial f_{E\alpha}}{\partial x_\alpha} = g\int\limits_z^{z^*}\frac{\partial\bar{\rho}(z',t)}{\partial t}dz + $$
$$+\text{Diffusion} + \text{Dissipation}. \quad (15)$$

Поток энергии (13) переписывается в виде

$$f_{E\alpha} = U_\alpha(p + E_K + E_A), \quad (16)$$

где $p = P - P\bar{(z)}$. Проинтегрировав (15) по объему V, охватывающему всю толщу жидкости и пренебрегая вязкой диссипацией, получаем уравнение для псевдоэнергии PSE:

$$\frac{d}{dt}PSE = F^{(n)}|_n + \int\limits_V\left(\int\limits_z^{z^*}\frac{\partial\bar{\rho}(z't)}{\partial t}dz'\right)dV', \quad (17)$$

где $PSE = APE + KE$, KE – кинетическая энергия,

$$KE = \int\limits_V E_K dV'. \quad (18)$$

Рассмотрим преобразования энергии при взаимодействии волн. На рис. 9 приведена эволюция кинетической энергии KE и доступной потенциальной энергии APE в численных экспериментах. Как следует из рис. 9, *а, б*, при фронтальном взаимодействии волн одинаковой амплитуды в момент столкновения практически вся кинетическая энергия волн переходит в потенциальную, которая в дальнейшем преобразуется в кинетическую. Неустойчивость волн в эксп. 2 и 3 развивается в промежуток времени, когда переход потенциальной энергии в кинетическую ускоряет сдвиговые течения в волнах. В свою очередь, сдвиговая неустойчивость приводит к перемешиванию и переходу кинетической энергии в доступную потенциальную в вихрях КГ при $\tau = 60 - 75$ на рис. 9, *б, в*. Из-за асимметрии процесса взаимодействия в эксп. 3

не вся кинетическая энергия переходит в потенциальную в момент столкновения.

Потери энергии за счет перемешивания, перехода в недоступную фоновую потенциальную энергию и диссипации могут быть оценены, исходя из бюджета энергии волн до и после взаимодействия. Обозначим псевдоэнергию волн, перемещающихся слева направо в сечениях x_l, x_r и справа налево в сечениях x_r, x_l, как PSE_l^-, PSE_r^+, PSE_r^-, PSE_l^+ соответственно. Тогда потери псевдоэнергии на перемешивание за счет неустойчивости и вязкости и диффузии можно оценить так

$$\Delta E = \frac{PSE_l^- + PSE_r^- - PSE_l^+ - PSE_r^+}{PSE_l^- + PSE_r^-}. \quad (19)$$

Оценим потери энергии на перемешивание δE как разность ΔE между экспериментами 1 и 1*, 2 и 2*, а также 3 и полусуммой 1* и 2*. Результаты расчетов, приведенные в таблице 1, показывают, что даже в отсутствие неустойчивости КГ интенсификация сдвиговых потоков в слое раздела приводит к потере 3% энергии на перемешивание (эксп. 1), тогда как при неустойчивости КГ потери энергии на перемешивание составляют 5% (эксп. 2). Потери энергии при столкновении волн разной амплитуды в эксп. 3 относительно малы (около 3.5%).

ВЫВОДЫ

В работе численно в рамках уравнений Навье-Стокса исследована динамика и энергетика фронтального взаимодействия уединенных внутренних волн-понижений большой амплитуды, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией. Взаимодействие волн приводило к некоторому малому фазовому сдвигу в распространении волн. Показано, что взаимодействие волн большой амплитуды приводит к сдвиговой неустойчивости и формированию вихрей Кельвина-Гельмгольца в слое раздела. Расчеты преобразований энергии показали, что около 5% расходуется на перемешивание при взаимодействии волн большой амплитуды, тогда как при взаимодействии волн умеренной амплитуды, происходящем без формирования вихрей Кельвина-Гельмгольца, интенсификация сдвиговых потоков в слое раздела приводит к потере 3% энергии на перемешивание.

1. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett.– 1965.– **15**.– P. 240–243.
2. *Ablowitz M., Segur H.* Solitons and inverse scattering transform.– Philadelphia: SIAM, 1981.– 410 p.
3. *Lamb K.G* Are solitary internal waves solitons? // Studies Appl. Math.– 1998.– **101**.– P. 289–308.
4. *Maxworthy T.* Experiments on collisions between solitary waves // J. Fluid Mech.– 1976.– **76**.– P. 177–185.
5. *Chambarel J., Kharif C. , Touboul J.* Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation // Nonlinear Proc. Geoph.– 2009.– **16**.– P. 111-–122.
6. *Mirie R.M., Su C. H.* Internal solitary waves and their head-on collision. I // J. Fluid Mech.– 1984.– **147**.– P. 213–231.
7. *Mirie R.M., Su C. H.* Internal solitary waves and their head-on collision. II // Phys. Fluids.– 1986.– **29**.– P. 31–37.
8. *Nguyen H.Y., Dias F.* A Boussinesq system for two-way propagation of interfacial waves. // Physica D.– 2008.– **237** .– P. 2365–2389.
9. *Moum J.N., Farmer D.M., Smyth W.D., Armi L., Vagle S.* Structure and generation of turbulence at interfaces strained by internal solitary waves propagating shoreward over the continental shelf // J. Phys. Oceanogr.– 2003.– **33**.– P. 2093–2112.
10. *Orr M.H., Mignerey P.C.* Nonlinear internal waves in the South China Sea: observation of the conversion of depression internal waves to elevation internal waves // J. Geophys. Res.– 2003.– **108 (C3)**.– P. 3064–2010.
11. *Miyata M.* An internal solitary wave of large amplitude // La Mer.– 1985.– **23**.– P. 43–48.
12. *Grue J., Jensen A., Rusas P.-O., Sveen J. K.* Properties of large amplitude internal waves // J. Fluid Mech.– 1999.– **380**.– P. 257–278.
13. *Choi W., Camassa R.* Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. // J. Fluid Mech.– 1999.– **396**.– P. 1–36.
14. *Jo T.-C., Choi W.* Dynamics of strongly nonlinear solitary waves in shallow water // Stud. Appl. Math.– 2002.– **109**.– P. 205–227.
15. *Jo T.-C., Choi W.* On stabilizing the strongly nonlinear internal wave model // Stud. Appl. Math.– 2002.– **120**.– P. 65—85.
16. *Choi W., Barros R., Camassa R.* A regularized model for strongly nonlinear internal solitary waves // J. Fluid Mech.– 2009.– **629**.– P. 73-–85.
17. *Cotter C. J., Holm D. D., Percival J. R.* The square root depth wave equations // Proc. R. Soc. A.– 2009.– **466**.– P. 3621–3633.
18. *Fructus D., Carr M., Grue J., Jensen A., Davies P. A.* Shear-induced breaking of large internal solitary waves // J. Fluid Mech.– 2009.– **620**.– P. 1—29.
19. *Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Terletska K., Brovchenko I., Pelinovsky E., Choi B.H.* Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step. // Physics of Fluids.– 2010.– **22**.– P. doi:10.1063/1.3455984.
20. *Barad M.F., Fringer O. B.* Simulations of shear instabilities in interfacial gravity waves // J. Fluid Mech.– 2010.– **644**.– P. 61—95.
21. *Mellor G.L.* An equation of state for numerical models of ocean and estuaries // J Atmos. Ocean. Tech.– 1991.– **8**.– P. 609–611.
22. *Kanarska Y., Maderich V.* A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // Ocean Dynamics.– 2003.– **53**.– P. 176–185.

23. *Turkington B., Eydeland A., Wang S.* A computational method for solitary internal waves in a continuously stratified fluid // Stud. Appl. Math.– 1991.– **85**.– P. 93-–127.

24. *Kao T.W., Pan F.S., Renouard D.* Internal solitions on the pycnocline: generation, propagation, shoaling and breaking over a slope // J. Fluid Mech.– 1985.– **159**.– P. 19-–53.

25. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Modeling internal solitary waves in the coastal ocean. // Survey in Geophysics.– 2007.– **28**.– P. 273–298.

26. *Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Pelinovsky E., Choi B.H. , Brovchenko I., Terletska K., Kim D.C.* The transformation of an interfacial solitary wave of elevation at a bottom step // Nonlinear Proc. Geoph.– 2009.– **16**.– P. 33–42.

27. *Miles, J.W., Howard, L.N.* Note on a heterogeneous shear flow // J. Fluid Mech.– 1964.– **20**.– P. 331-–336.

28. *Troy C. D., Koseff J. R.* The instability and breaking of long internal waves // J. Fluid Mech.– 2005.– **543**.– P. 107-–336.

29. *Shepherd, T. G.* A unified theory of available potential-energy // Atmos.-Ocean.– 2006.– **31**.– P. 1—26.

30. *Winters K. B., Lombard P. N., Riley J. J., D'Asaro E. A.* Available potential energy and mixing in density stratified fluids // J. Fluid Mech.– 1995.– **289**.– P. 115–128.

31. *Lamb K.G., Nguyen V.T.* On calculating energy flux in internal solitary waves with an application to reflectance // J Phys Oceanogr.– 2009.– **29**.– P. 1–7.