

УДК 532.57

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВДОЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МГД-ВОЛНОВОДА В УПРУГОЙ СРЕДЕ

И. Т. СЕЛЕЗОВ, К. М. СВЕЧНИКОВА, Л. В. СЕЛЕЗОВА

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 11.05.2011*

Исследуется задача о распространении волн вдоль цилиндрической полости в упругой среде. Предполагается, что полость заполнена электропроводящей жидкостью и система подвержена действию однородного продольного магнитного поля. Движение жидкости описывается уравнениями магнитной гидродинамики, а движение упругой среды – уравнениями эластодинамики. Проведен подробный анализ распространения волн на основе полученных решений. Рассмотрены предельные случаи, выведено и исследуется дисперсионное уравнение. Показано, что в кровеносном сосуде и окружающей его ткани при действии магнитного поля могут распространяться волны со скоростями, превышающими скорость распространения пульсовой волны, и таким образом влиять на формирование управления с обратными связями.

Досліджується задача про поширення хвиль уздовж циліндричної порожнини в пружному середовищі. Передбачається, що порожнина заповнена електропровідною рідиною та система піддається дії однорідного поздовжнього магнітного поля. Рух рідини описується рівняннями магнітної гідродинаміки, а рух пружного середовища – рівняннями еластодинаміки. Проведено докладний аналіз розповсюдження хвиль на основі одержаних розв'язків. Розглянуто граничні випадки, виведено та досліджено дисперсійне рівняння. Показано, що в кровеносній судині і оточуючій її тканині під дією магнітного поля можуть розповсюджуватися хвилі зі швидкостями, які перевищують швидкість розповсюдження пульсової хвилі, і таким чином впливати на формування управління зі зворотними зв'язками.

The problem of wave propagation along the cylindrical cavity in elastic solid is investigated. It is assumed that the cavity filled-in by electrically conducting fluid and the system is under the action of uniform longitudinal magnetic field. The fluid motion is governed by the equations of magnetohydrodynamics and the motion of solid by the equations of elastodynamics. Wave propagation on the basis of obtained solutions is analysed in detail. Limiting cases are considered, the dispersion equation is derived and investigated. It is shown that waves can be propagated in a blood vessel and surrounding tissue under the action of magnetic field with velocities overriding the velocity of pulse wave propagation and hence to influence on formation of a feedback control.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос распространения волн в цилиндрическом волноводе, заполненном электропроводящей жидкостью и подверженном действию магнитного поля, представляет большой интерес. Он тесно связан с геофизическими исследованиями, а также с изучением движения крови в кровеносных сосудах и распространения нервного возбуждения (потенциала действия) вдоль нервного волокна. Так, Вебер в 1873 г. на основе уравнений электромагнетизма исследовал в квазистатическом приближении (описывается уравнением Лапласа) распределение плотности постоянного тока внутри волокна, проводящего нервные возбуждения, и в слабо проводящей внешней среде. В дальнейшем эта задача была рассмотрена в более точной постановке на основе уравнений электромагнетизма [18] и проанализирован также вопрос о скорости распространения потенциала действия в нервном волокне ([7, 8, 11, 14]).

Представляет интерес задача магнитной гидродинамики о распространении возмущений в ци-

линдрическом волноводе, заполненном электропроводящей жидкостью и контактирующим с внешней упругой средой [5]. Применительно к движению крови в кровеносном сосуде задача магнитной гидродинамики рассматривалась в работах [3, 13, 20].

В настоящее время на основе модели Ходжкина-Хаксли проводятся компьютерные исследования распространения электрических импульсов, генерируемых потенциалом действия [9]. Авторами проведена оценка трансмембранного потенциала для случая вытянутого сфероида на основе уравнения Лапласа, теории Смолуховского образования пор и уравнения двойной оболочки. Показано, что реакция вытянутого сфероида быстрее, чем таковая для сферы. В работе [12] исследовались радиальные колебания цилиндрической МГД-колонны в однородном магнитном поле конечной электропроводности и проведены сопоставления с экспериментом. В 1954 г. Suhl & Walker [19] рассмотрели задачу о распространении волн вдоль цилиндрической полости в ферритовой среде, решение которой получено в функциях Уиттекера. Также распространение волн в упругой среде

с полостью, заполненной жидкостью, но без учета электромагнитных эффектов исследовал Био (1953 г.) [1].

Представленные в обзоре математические модели развиты на основе физических опытов и наблюдений, которые были предметом многочисленных исследований.

В данной статье рассматривается задача о распространении осесимметричных волн в цилиндрическом электропроводящем волноводе. В упругом теле бесконечной протяженности имеется цилиндрическая полость кругового поперечного сечения, заполненная сжимаемой невязкой проводящей жидкостью. Вдоль оси полости приложено однородное постоянное магнитное поле. Упругое тело предполагается магнито- и электрически нейтральным. Такая система, по существу, представляет собой волновод, имеющий своеобразную характеристику.

1. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Рассмотрим изэнтропический процесс с электропроводностью $\sigma = \text{const}$. Пренебрегая токами смещения, электрическими зарядами, массовыми силами и вязкостью, уравнения магнитной гидродинамики записываются в виде [6]

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla \tilde{p} + \mu [\vec{J} \times \vec{H}], \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \vec{V}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (5)$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \mu \vec{V} \times \vec{H}), \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (6)$$

где каждая искомая функция $F(\vec{x}, t)$ зависит от пространственных координат $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ и времени t ; \vec{H} и \vec{E} – векторы напряженности магнитного и электрического поля; \vec{B} и \vec{D} – векторы индукции магнитного и электрического поля; \vec{J} – вектор плотности тока, \vec{V} – вектор скорости частицы жидкости; $\tilde{\rho}$ и \tilde{p} – плотность и давление жидкости; μ и ε – магнитная и диэлектрическая проницаемости; c_0 – скорость звука в непроводящей жидкости; $c_0 = \sqrt{K/\rho}$, K – объемный

модуль упругости жидкости; $\vec{\nabla}$ – гамильтониан; $\vec{\nabla} \equiv \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ ($k = 1, 2, 3$), по k суммировать.

Условия сопряжения на поверхности $R(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ раздела двух сред, вытекающие из законов сохранения, выражают непрерывность нормальных составляющих скоростей

$$\vec{n} \cdot (\vec{V}^1 - \vec{V}^2) = 0, \quad (7)$$

или непроницаемость этой поверхности

$$d_t R = 0, \quad (8)$$

а также непрерывность суммарных тензоров напряжений

$$[(\sigma_{ik}^1 + T_{ik}^1) - (\sigma_{ik}^2 + T_{ik}^2)] n_i = 0, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (9)$$

непрерывность соответствующих электромагнитных величин

$$\vec{n} \cdot \left(\frac{\mu^1}{\mu^2} \vec{H}^1 - \vec{H}^2 \right) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}^1 - \vec{H}^2) = 0, \quad (10)$$

$$\vec{n} \cdot \left(\frac{\varepsilon^1}{\varepsilon^2} \vec{E}^1 - \vec{E}^2 \right) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{E}^1 - \vec{E}^2) = 0. \quad (11)$$

Компонента тензора упругих напряжений σ_{ik} в случае невязкой сжимаемой жидкости записывается в виде

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}, \quad (12)$$

а для тензора напряжений Максвелла имеем

$$T_{ik} = \varepsilon E_i E_k + \mu H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\varepsilon E^2 + \mu H^2). \quad (13)$$

Упрощающие предположения. Система уравнений (1)–(6) существенно нелинейная. Поэтому ее исследование связано со значительными трудностями, преодоление которых возможно либо путем их полной или частичной линеаризации, либо построением асимптотически вырожденных моделей при малых и больших магнитных числах Рейнольдса [15]. Здесь ограничимся линеаризацией уравнений.

Поля малых возмущений. Представим общее поле в виде суммы некоторого постоянного поля F_0 (невозмущенного), не зависящего от пространственных координат и времени, и переменного поля $f(\vec{x}, t)$ (возмущенного), зависящего от всех координат:

$$F(\vec{x}, t) = F_0 + f(\vec{x}, t). \quad (14)$$

Полевые функции представляются таким образом:

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{V}_0 + \vec{v}(\vec{x}, t),$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\vec{x}, t) &= \rho_0 + \rho(\vec{x}, t), \\ \vec{H}(\vec{x}, t) &= \vec{H}_0 + \vec{h}(\vec{x}, t), \\ \vec{E}(\vec{x}, t) &= \vec{E}_0 + \vec{e}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (15)$$

Второе предположение теории малых возмущений записывается в виде

$$|f|_{\max} \ll |F_0|. \quad (16)$$

Подставляя первое уравнение из (4) в (1) и полагая $\vec{E}_0 = 0$, преобразуем уравнения (4)–(6) с учетом векторных формул для $(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{H}$ и $\vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{H}_0)$. Подставляя соотношения (6), которые следуют из (8), в уравнения (1)–(6) и сохраняя члены порядка малости не выше первого, согласно (11), получаем систему линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} &= -c_0^2 \vec{\nabla} \rho + \mu (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \times \vec{H}_0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \rho + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \vec{h} + \vec{\nabla} \times (\vec{V}_0 \times \vec{h} + \vec{v} \times \vec{H}_0), \\ \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{e} &= -\mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \\ \vec{j} = \sigma (\vec{e} + \mu \vec{V}_0 \times \vec{h} + \mu \vec{v} \times \vec{H}_0), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{h} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Суммарный тензор Максвелла при этом записывается в виде

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \varepsilon \vec{E}_{0i} \vec{E}_{0k} + \mu \vec{H}_{0i} \vec{H}_{0k} - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\varepsilon \vec{E}_0^2 + \mu \vec{H}_0^2) + \\ &+ \varepsilon (\vec{E}_{0i} \vec{e}_k + \vec{e}_i \vec{E}_{0k}) + \mu (\vec{H}_{0i} \vec{h}_k + \vec{h}_i \vec{H}_{0k}) - \\ &- \delta_{ik} (\varepsilon \vec{E}_0 \vec{e} + \mu \vec{H}_0 \vec{h}). \end{aligned} \quad (19)$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Здесь рассматривается задача в цилиндрической системе координат (r, θ, z) о распространении волн в жидком электропроводящем цилиндрическом волноводе Ω^p , контактирующем с внешней упругой средой Ω , при действии продольного магнитного поля $\vec{H} = \{0, 0, H_z\}$ (рис. 1). Внутренняя область

$$\Omega^p = \{(r, \theta, z) | r \in (0, r_0],$$

$$\theta \in [0, 2\pi], z \in (-\infty, \infty)\},$$

внешняя область

$$\Omega = \{(r, \theta, z) | r \in [r_0, \infty),$$

$$\theta \in [0, 2\pi], z \in (-\infty, \infty)\},$$

поверхность раздела

$$\partial\Omega (r = r_0).$$

Уравнения движения внутренней среды (13), (14) в безразмерной форме в области Ω^p имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}^p}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \rho^p + P_H^p (\vec{\nabla} \times \vec{h}^p) \times \vec{H}_0, \\ \frac{\partial \rho^p}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^p, \\ \frac{\partial \vec{h}^p}{\partial t} &= \frac{1}{R_m^p} \nabla^2 \vec{h}^p + \vec{\nabla} \times (\vec{v}^p \times \vec{H}_0), \\ \vec{\nabla} \times \vec{h}^p = \vec{j}^p, \quad \vec{\nabla} \times \vec{e}^p &= -\frac{\partial \vec{h}^p}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{h}^p = 0, \\ \vec{j}^p &= R_m^p (\vec{e}^p + \vec{v}^p \times \vec{H}_0), \\ T_{ik}^p &= P_H^p \left(\vec{H}_{0i} \vec{H}_{0k} - \frac{\delta_{ik}}{2} \vec{H}_0^2 \right) + \\ &+ P_H^p \left(\vec{H}_{0i} \vec{h}_k^p + \vec{h}_i^p \vec{H}_{0k} - \delta_{ik} \vec{H}_0 \vec{h}^p \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения движения внешней непроводящей упругой среды ($\sigma = 0$) в области Ω имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{u} + \left(1 + \frac{\lambda}{G} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) &= \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{h} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{e} &= -\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{h} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где λ и G – дилатационный и сдвиговый модули; $c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho_s}}$ – скорость распространения волн сдвига; ρ_s – плотность упругой среды; $c_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho_s}}$ – скорость распространения дилатационных волн; $c_1 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$ – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

Безразмерные величины в (18) и (17) введены по формулам (звездочки опущены)

$$(\vec{x}^*, \vec{u}^*) = \frac{1}{r_0} (\vec{x}, \vec{u}), \quad t^* = \frac{c_0}{r_0} t,$$

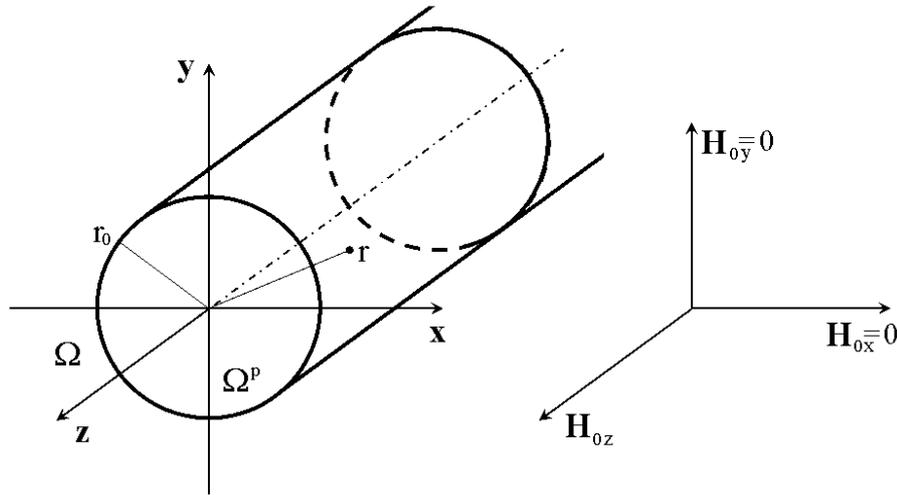


Рис. 1. Геометрия задачи

$$\begin{aligned}
 (p^*, t_{ik}^*, T_{ik}^{*p}, \sigma_{ik}^*) &= \frac{1}{\rho_0 c_0^2} (p, t_{ik}, T_{ik}^p, \sigma_{ik}), & \text{в } \Omega^p: \\
 \vec{v}^* &= \frac{\vec{v}}{c_0}, \quad \vec{H}^* = \frac{\vec{H}}{H_0}, \quad \vec{H}_0^* = \frac{\vec{H}_0}{H_0}, & (22) \\
 c_0^* &= \frac{c_0}{c_0}, \quad c_s^* = \frac{c_s}{c_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \rho_s = \frac{\rho_s}{\rho_0}, \\
 \vec{e}^{*p} &= \frac{1}{\mu H_0 c_0} \vec{e}^p, \quad \vec{j}^{*p} = \frac{r_0}{H_0} \vec{j}^p, \quad \varepsilon^{*p} = \frac{\mu^p H_0^2}{\rho_0} \varepsilon^p, \\
 P_H^p &= \frac{\mu^p H_0^2}{\rho_0 c_0^2}, \quad P_H = \frac{\mu H_0^2}{\rho_0 c_0^2}, \quad R_m^p = \mu^p \sigma^p c_0 l.
 \end{aligned}$$

В системе уравнений (18) P_H^p – параметр магнитного давления; R_m^p – магнитное число Рейнольдса. В дальнейшем предполагается, что выполняются условия упругой изотропии, условия отсутствия электрических зарядов, а также $\mu^p = \mu$, $\varepsilon^p = \varepsilon$, $E_{os} = 0$ ($s = 1, 2, 3$).

Предполагается также, что движение осесимметричное, так что искомые функции не зависят от координаты θ ; электропроводящая жидкость находится в круговой цилиндрической полости в упругой среде; вдоль оси полости действует постоянное магнитное поле напряженности $\vec{H}_0 = (0, 0, \vec{H}_{0z})$; стенки полости непроводящие, поэтому нормальная к контуру составляющая плотности тока равна нулю: $j_r|_{r=r_0} = 0$.

Движение внутренней МГД-среды описывается двумя векторными уравнениями относительно \vec{h}^p и \vec{v}^p , к которым сводятся первые три уравнения системы (18):

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^p) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{v}^p}{\partial t^2} = -P_H \left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{h}^p}{\partial t} \right) \times \vec{H}_0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \vec{h}^p}{\partial t} = \frac{1}{R_m} \nabla^2 \vec{h}^p + \vec{\nabla} \times (\vec{v}^p \times \vec{H}_0). \quad (24)$$

Движение внешней упругой среды описывается уравнениями относительно функций φ и \vec{a} , которые следуют из системы (17):

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{a} = 0, \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{u} &= \vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla} \times \vec{a}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0, \\
 \sigma_{rr} &= G \left\{ \left(2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{G} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda}{G} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi - 2 \frac{\partial^2 a_\theta}{\partial r \partial z} \right\}, \\
 \sigma_{rz} &= G \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial^2 a_\theta}{\partial z^2} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Здесь приняты безразмерные величины

$$\varphi^* = \varphi / r_0^2, \quad \vec{a}^* = \vec{a} / r_0^2, \quad G^* = G / \rho_0 c_0^2,$$

$$\sigma_{rr}^* = \sigma_{rr} / \rho_0 c_0^2, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz} / \rho_0 c_0^2.$$

Условия сопряжения на поверхности раздела внутренней и внешней сред $r = 1$ согласно (8) -

(11) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} \cdot \left(\vec{v}^p - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) &= 0, \\ n_i [(\sigma_{ik}^p + T_{ik}^p) - (\sigma_{ik} + T_{ik})] &= 0 \quad (i, k = 1, 2, 3), \\ \vec{n} \cdot (\vec{h}^p - \vec{h}) &= 0, \quad \vec{n} \times (\vec{h}^p - \vec{h}) = 0, \\ \vec{n} \cdot (\vec{e}^p - \vec{e}) &= 0, \quad \vec{n} \times (\vec{e}^p - \vec{e}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= 2G \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ik}, \\ \sigma_{pik} &= -p \delta_{ik}, \\ T_{ik} &= P_H H_{0i} H_{ok} - \frac{1}{2} \delta_{ik} P_H H_0^2 + \\ &+ P_H (H_{0i} h_k + h_i H_{ok}) - \delta_{ik} P_H \vec{H}_0 \cdot \vec{h} \end{aligned} \quad (28)$$

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Искомые функции в классе рассматриваемых бегущих волн представляются в виде

$$f(r, z, t) = F(r) \exp [i(sz - \omega t)]. \quad (29)$$

Тогда для внешней задачи решения уравнений (19) с учетом условий излучения и ограниченности на бесконечности $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - ik\varphi \right) = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = 0$ записываются следующим образом:

$$\Phi = C_2 K_0(k_e r), \quad A_\theta = C_3 K_1(k_s r), \quad (30)$$

где $K_0(z)$ и $K_1(z)$ – функции Макдональда, $k_e^2 = s^2 - \frac{\omega^2}{c_e^2}$, $k_s^2 = s^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}$.

Остальные искомые величины на основе (19), (29) и решений Φ и A_θ определяются по формулам

$$\begin{aligned} U_r &= -C_2 k_e K_1(k_e r) - C_3 i s K_1(k_s r), \\ \sum_{rr} &= C_2 [-2G k_e^2 K_1'(k_e r) + \lambda (k_e^2 - s^2) K_0(k_e r)] - \\ &- C_3 2G i s k_s K_1'(k_s r), \\ \sum_{rz} &= G [-C_2 2i s k_e K_1(k_e r) + C_3 (k_s^2 + s^2) K_1(k_s r)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Из электромагнитных уравнений системы (17) с учетом (29) получаем

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + k_1^2 \right) H_z = 0,$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + k_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) E_\theta = 0, \quad (32)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0,$$

$$\text{где } k_1^2 = s^2 - \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} \right).$$

На основе этих уравнений и с учетом того, что скорость c_0 значительно меньше c_s, c_e, c_1 , построены решения внешней электромагнитной задачи в области Ω , удовлетворяющие условиям излучения Зоммерфельда.

Для внутренней задачи нетривиальными являются величины v_r, v_z, h_z и e_θ . Последняя может быть определена как частное решение пятого уравнения (18):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r e_\theta^p) = -\frac{\partial h_z^p}{\partial t}. \quad (33)$$

При указанных выше предположениях уравнения (23) и (24) приводятся к четырем скалярным уравнениям для h_z, h_r, v_x и v_z

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^p) + \frac{\partial^2 v_z^p}{\partial z \partial r} = \quad (34)$$

$$= \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v_r^p}{\partial t^2} - P_H \frac{\partial^2 h_r^p}{\partial t \partial z} + P_H \frac{\partial^2 h_z^p}{\partial t \partial r},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r^p}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_r^p}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 v_z^p}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v_z^p}{\partial t^2}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial h_r^p}{\partial t} = \frac{\partial v_r^p}{\partial z} + \quad (36)$$

$$+ \frac{1}{R_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h_r^p}{\partial r} + \frac{\partial^2 h_r^p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 h_r^p}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} h_r^p \right),$$

$$\frac{\partial h_z^p}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^p) + \quad (37)$$

$$+ \frac{1}{R_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h_z^p}{\partial r} + \frac{\partial^2 h_z^p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 h_z^p}{\partial z^2} \right).$$

Рассмотрим случай бесконечной проводимости $R_m = \infty$. Тогда система (34)–(37) может быть приведена к одному уравнению вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \quad (38)$$

$$\times \left[(1 + P_H) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^p) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v_r^p}{\partial t^2} + P_H \frac{\partial^2 v_r^p}{\partial z^2} \right] =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial^2 v_r^p}{\partial z^2}.$$

Решение представляется в классе бегущих волн (29), и в результате уравнение (38) после некоторых преобразований приводится к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 V_r^p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_r^p}{dr} + \left(b^2 - \frac{1}{r^2} \right) V_r^p = 0, \quad (39)$$

где

$$b^2 = \frac{\left(-s^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) \left(-s^2 P_H + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right)}{(1 + P_H) \left(-s^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) + s^2}. \quad (40)$$

Решение уравнения (39), удовлетворяющее условию регулярности в нуле, записывается в виде

$$V_r^p = C_1 J_1(br). \quad (41)$$

Рассмотрим случай действительного аргумента. Представим величину b^2 в терминах фазовой скорости s :

$$b^2 = s^2 \frac{\left[-1 + \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 \right] \left[-P_H + \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 \right]}{(1 + P_H) \left[-1 + \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 \right] + 1} = s^2 b_1^2. \quad (42)$$

Откуда следует, что $b^2 > 0$ при

$$\left(\frac{c}{c_0} \right)^2 \geq 1, \text{ или } \sqrt{\frac{P_H}{1 + P_H}} < \frac{c}{c_0} \leq \sqrt{P_H}. \quad (43)$$

Если хотя бы одно из этих неравенств не выполняется, либо все три, то решение будет в модифицированных функциях Бесселя.

Возмущенные электромагнитные поля во внутренней области порождаются магнитогиродинамическими эффектами. При отсутствии последних в случае идеальной электропроводности внешние электромагнитные поля не проникают внутрь. Поэтому в рассматриваемой задаче во внутренней области однородные решения электромагнитных уравнений тождественно равны нулю и остаются только частные решения.

Из уравнений (1)–(6), (13) получаем выражения

$$\begin{aligned} V_z^p &= -\frac{isC_1}{\omega^2 - s^2} \left[\frac{1}{r} J_1(br) + bJ_1'(br) \right], \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^p &= \frac{\omega^2 C_1}{\omega^2 - s^2} \left[bJ_1'(br) + \frac{1}{r} J_1(br) \right], \\ P^p &= \frac{1}{i\omega} \frac{\omega^2 C_1}{\omega^2 - s^2} \left[bJ_1'(br) + \frac{1}{r} J_1(br) \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Из уравнения (36) и решения (41) для V_r^p определяем H_r^p . Аналогично из уравнения (37) определяем H_z^p . Условие отсутствия магнитных зарядов $\vec{\nabla} \cdot \vec{h}^p = 0$ при таких величинах H_r^p и H_z^p тождественно удовлетворяется. Из пятого уравнения системы (18) определяем E_θ^p .

Таким образом, получаем для электромагнитных величин во внутренней области Ω^p соотношения

$$\begin{aligned} H_r^p &= -\frac{s}{\omega} C_1 J_1(br), \quad H_\theta^p = 0, \\ H_z^p &= \frac{1}{\omega} C_1 \left[\frac{1}{r} J_1(br) + bJ_1'(br) \right], \\ E_r^p &= 0, \quad E_\theta^p = sC_1 J_1(br), \quad E_z^p = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Величины E_r^p , E_z^p и H_θ^p выпадают из рассмотрения как следствия внутренней симметрии системы уравнений [16].

Для электромагнитных величин во внешней области Ω получаем

$$\begin{aligned} H_r &= C_5 K_1(k_1 r), \quad H_\theta = 0, \quad H_z = C_4 K_0(k_1 r), \\ E_r &= 0, \quad E_\theta = C_6 K_1(k_1 r), \quad E_z = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

причем константа C_6 может быть выражена через C_4 и C_5 .

Условия сопряжения (27) на поверхности раздела $r = 1$ приводятся к виду

$$\begin{aligned} V_r^p + i\omega U_r &= 0, \quad P^p + \sum_{rr} = 0, \quad \sum_{rz} = 0, \\ H_r^p - H_r &= 0, \quad H_z^p - H_z = 0, \quad E_\theta^p - E_\theta = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Как видно из условия (47), в тензорные поля не входят компоненты тензора Максвелла в связи с тем, что удовлетворяются условия сопряжения электромагнитных полей при $\mu^p = \mu$ и $\varepsilon^p = \varepsilon$.

Подстановка решений (31), (41) и (44) в условия сопряжения (48) дает систему уравнений относительно произвольных постоянных:

$$J_1(b) C_1 - i\omega k_e K_1(k_e) C_2 + \omega s K_1(k_s) C_3 = 0, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i\omega} \frac{\omega^2}{\omega^2 - s^2} \left[bJ_1'(b) + J_1(b) \right] C_1 + \\ &+ \left[-2Gk_e^2 K_1'(k_e) + \lambda(k_e^2 - s^2) K_0(k_e) \right] C_2 - \\ &- 2Gisk_s K_1'(k_s) C_3 = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

$$-2isk_e K_1(k_e) C_2 + (k_s^2 + s^2) K_1(k_s) C_3 = 0. \quad (50)$$

Условие разрешимости задачи определяется равенством нулю детерминанта этой системы, что

приводит к дисперсионному уравнению, связывающему круговую частоту ω с волновым числом s . В дальнейшем предполагается, что ω – действительное число, не равное нулю. После ряда преобразований из системы (48) – (50) получаем следующее дисперсионное уравнение (условие разрешимости задачи):

$$2Gk_e^2 \frac{K_1'(k_e)}{K_1(k_e)} - \lambda(k_e^2 - s^2) \frac{K_0(k_e)}{K_1(k_e)} - 4Gs^2 \frac{k_e k_s}{(k_s^2 + s^2)} \frac{K_1'(k_s)}{K_1(k_s)} + \frac{\omega^2}{\omega^2 - s^2} \frac{k_e(-k_s^2 + s^2)}{(k_s^2 + s^2)} \left[b \frac{J_1'(b)}{J_1(b)} + 1 \right] = 0. \quad (51)$$

Полученное дисперсионное уравнение справедливо только в случае, когда выполняются неравенства, гарантирующие положительные величины аргументов в цилиндрических функциях, – это условия $b > 0$, $k_s > 0$, $k_e > 0$, $k_1 > 0$. Следовательно, рассмотрение может проводиться в интервале $0 \leq \frac{c}{c_0} \leq \frac{c_s}{c_0}$.

Переходя от частоты $\omega = sc$ и волнового числа $s = 2\pi/l$ к фазовой скорости c и длине волны l после некоторых преобразований дисперсионное уравнение (51) приводится к виду

$$G \left\{ -2n_e + \left[2 - \left(\frac{\lambda}{G} + 2 \right) c^2 \bar{c}_e^2 \right] \frac{K_0(sn_e)}{K_1(sn_e)} + 4n_e \left[\frac{1}{(2 - c^2 \bar{c}_e^2)} - \frac{n_s}{2 - c^2 \bar{c}_s^2} \frac{K_0(sn_s)}{K_1(sn_s)} \right] \right\} + \frac{c^2}{c^2 - 1} \frac{c^2 \bar{c}_s^2}{(2 - c^2 \bar{c}_s^2)} (1 - c^2 \bar{c}_e^2) b_1 \frac{J_0(sb_1)}{J_1(sb_1)} = 0, \quad (52)$$

где

$$c^2 = \frac{c^2}{c_0^2}, \quad \bar{c}_e^2 = \frac{c_0^2}{c_e^2}, \quad \bar{c}_s^2 = \frac{c_0^2}{c_s^2},$$

$$s = \frac{2\pi}{l}, \quad n_s = (1 - c^2 \bar{c}_s^2)^{1/2}, \quad n_e = (1 - c^2 \bar{c}_e^2)^{1/2}.$$

Необходимо отметить, что в случае достаточно сильных магнитных полей, характеризуемых магнитным давлением P_H , могут иметь место пинчевые неустойчивости, характеризуемые нулевыми и чисто мнимыми значениями (см. формулу (29)). В дальнейшем предполагаем, что ω – действительное число, не равное нулю, т. е. $c > c_0$ в соответствии с неравенствами (43).

4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ

1. *Вакуум в полости.* Предельный переход $\rho_b c_0^2 \rightarrow 0$ соответствует вакууму в полости, и из (52) следует уравнение, описывающее распространение упругих поверхностных волн вдоль цилиндрической полости (последний член в (52) обращается в ноль). В этом случае будут существовать волны со скоростями, превышающими c_s , и функции Макдональда $K_0(x)$ и $K_1(x)$ заменяются на функции Ханкеля $H_0^{(1)}(x)$ и $H_1^{(1)}(x)$.

2. *Жесткий канал.* Предельный переход λ и $G \rightarrow 0$ (модуль Юнга $E \rightarrow 0$) – соответствует цилиндрическому волокну в абсолютно жестком канале. В случае действительных величин b_1 при $c < c_0$ имеется бесконечное дискретное множество собственных значений и соответствующих собственных функций – распространяющихся волновых мод.

В случае мнимых величин b_1 функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$ заменяются на модифицированные функции $I_0(x)$ и $I_1(x)$. В этом случае имеется одна распространяющаяся волновая мода.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ КОРОТКИХ ВОЛН И ОГРАНИЧЕННЫХ СКОРОСТЕЙ c ($l \rightarrow 0$, $s = 2\pi/l \rightarrow \infty$)

В случае скоростей c , не превышающих c_s , c_e , аргументы функций Макдональда – действительные числа. При коротких длинах волн (больших s) эти функции могут быть заменены их асимптотическими представлениями [2]. Для функций Макдональда и для модифицированных функций Бесселя имеем

$$K_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \quad (53)$$

Из формул (53) видно, что при больших x величины функций не зависят от n с точностью до $1/x$.

Для функций Бесселя имеем

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

В этом случае дисперсионное уравнение в соответствии с принципом предельности [4] вырождается в уравнения характеристик

$$(1 - c^2 \bar{c}_e^2)^{1/2} + \left[1 - 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} c^2 \bar{c}_e^2 \right] +$$

$$+2 \frac{(1 - c^2 \bar{c}_e^2)}{(2 - c^2 \bar{c}_e^2)} - 2 \frac{(1 - c^2 \bar{c}_e^2)^{1/2}}{(2 - c^2 \bar{c}_s^2)} = 0,$$

$$c_p = c_0 P_H. \quad (54)$$

Первое уравнение в (54) определяет скорость распространения поверхностных волн вдоль полости, а второе – скорость распространения МГД-волн в полости.

6. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается случай, соответствующий цилиндрической полости, заполненной электропроводящей жидкостью (кровь, ликвор), ограниченной тканью. В качестве характерных принимаются величины: плотность жидкости (крови) $\rho_b = 1050 \text{ кг/м}^3$, объемный модуль упругости крови $K = 20600 \text{ Н/м}^2$, плотность внешней ткани $\rho_t = 1200 \text{ кг/м}^3$, радиус цилиндрического волновода $r_0 = 10^{-2} \text{ м}$, модуль Юнга $E = 7 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0.45$ [17].

Модуль дилатации λ , модуль сдвига G , скорость распространения волн в крови c_0 , скорости распространения дилатационных c_e и сдвиговых c_s волн вычислялись по формулам:

$$\lambda = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho_b}}, \quad c_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho_t}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho_t}}.$$

Численные значения этих величин следующие: $\lambda = 4.83 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, $G = 2.41 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, $c_e = 66.53 \text{ м/с}$, $c_s = 14.17 \text{ м/с}$, $c_0 = 4.43 \text{ м/с}$.

Численные значения величин \bar{c}_e^2 и \bar{c}_s^2 из уравнения (54): $\bar{c}_e^2 = 0.44 \cdot 10^{-2}$, $\bar{c}_s^2 = 0.098$.

Магнитное поле сильно влияет на распространение волн. Рассматривается случай, когда магнитное давление существенно меньше, чем упругость жидкой среды. Например, в случае магнитной индукции 0.088 Тл величина магнитного давления $P_H = 0.3$, а в случае 1.0 Тл $P_H = 38.5$. Это сильно завышенные величины, поскольку среда идеальнопроводящая. В случае конечной электропроводности влияние магнитного поля будет существенно меньшим.

Величина b_1 , определяемая формулой (42), записывается в виде

$$b_1 = \sqrt{\frac{(c^2 - 1)(c^2 - P_H)}{c^2(1 + P_H) - P_H}}.$$

Величина b_1 - действительное число, если выполняются неравенства (44):

$$c > 1, \quad c > \sqrt{P_H}, \quad c > \sqrt{P_H/(1 + P_H)}.$$

Величина $P_H < 1$, поэтому второе и третье неравенства более слабые и они всегда выполняются.

В случае $c > c_0$ можно проводить анализ на основе уравнения (52) при величинах $(1 - c^2 \cdot 0.114)$, несколько меньших единицы, но так, чтобы выполнялось условие больших аргументов x . Такой анализ соответствует распространению волн во внешней среде (ткани) с учетом влияния МГД-включения, принимая $P_H = 0.3$ или меньше. Это соответствует тканям с большим коэффициентом Пуассона $\nu = 0.45$ (резиноподобный материал), где дилатационные деформации очень малы. Величины $(1 - c^2 \bar{c}_e^2)$ будут очень близки к единице в отличие от удержанных $(1 - c^2 \bar{c}_s^2)$. В указанном случае анализ можно проводить на основе упрощенного уравнения

$$\frac{G}{\rho_0 c_0^2} \left\{ -2 + 2 \frac{K_0(s)}{K_1(s)} + \right.$$

$$+ 4 \left[\frac{1}{2} - \frac{(1 - c^2 \bar{c}_s^2)^{1/2} K_0 \left(s (1 - c^2 \bar{c}_s^2)^{1/2} \right)}{2 - c^2 \bar{c}_s^2 K_1 \left(s (1 - c^2 \bar{c}_s^2)^{1/2} \right)} \right] \left. \right\} +$$

$$+ \frac{c^2}{c^2 - 1} \frac{c^2 \bar{c}_s^2}{(2 - c^2 \bar{c}_s^2)} b_1 \frac{J_0(s b_1)}{J_1(s b_1)} = 0. \quad (55)$$

На рис. 2 представлены результаты расчетов по уравнению (55) фазовой скорости в зависимости от длины волны. Как видно, в ткани существует бесконечное множество дискретных волн, распространяющихся со скоростями, превышающими скорость волн в крови c_0 . Эти волны переносят информацию до прихода пульса и таким образом обеспечивают управление с обратными связями. На рис. 2 изображены первые три моды. Кроме того, в крови распространяется волна со скоростью c , меньшей величины c_0 .

На рис. 3 представлены результаты расчетов в области, выделенной штриховыми линиями на рис. 2. В области $(\sqrt{P_H/(1 + P_H)}, \sqrt{P_H})$ существует бесконечное дискретное множество корней (построены первые три моды). Ветви начинаются при величине $l/r_0 \rightarrow 0$, соответствующей скорости $\sqrt{P_H}$, и убывают при увеличении l/r_0 , достигая своего предельного значения – асимптоты $\sqrt{P_H/(1 + P_H)}$.

Кроме того, в области между $c/c_0 = 0$ и $\sqrt{P_H/(1 + P_H)}$ имеется еще одна ветвь, которая при увеличении l/r_0 возрастает и затем медленно спадает в интервале $c/c_0 \in (0, 4.5)$.

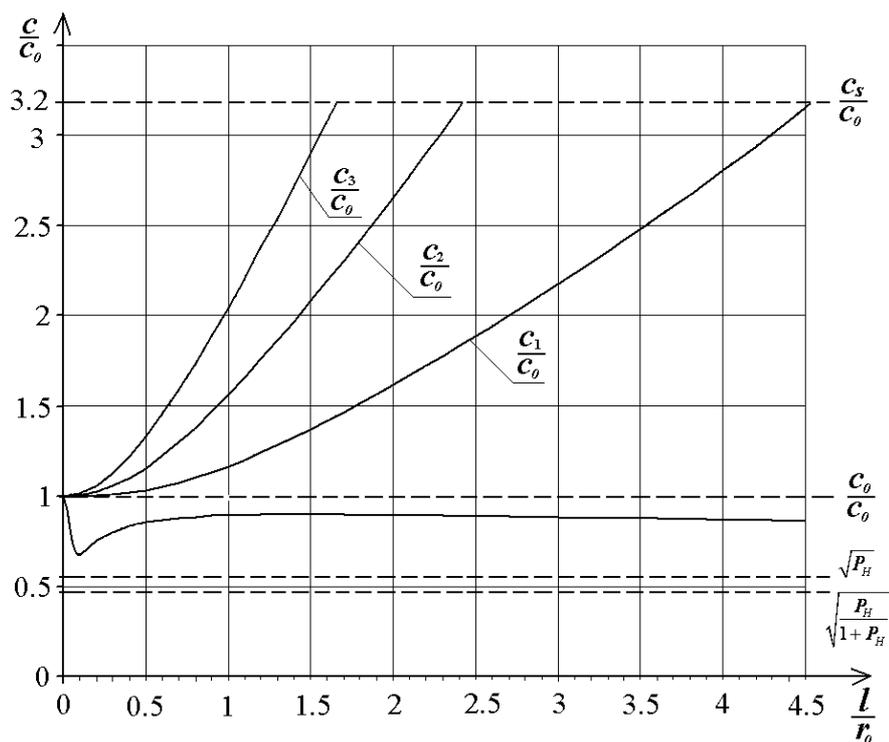


Рис. 2. Изменение фазовой скорости в зависимости от длины волны в случае магнитного давления $P_H=0.3$ (соответствует полю 0,088 Тл)

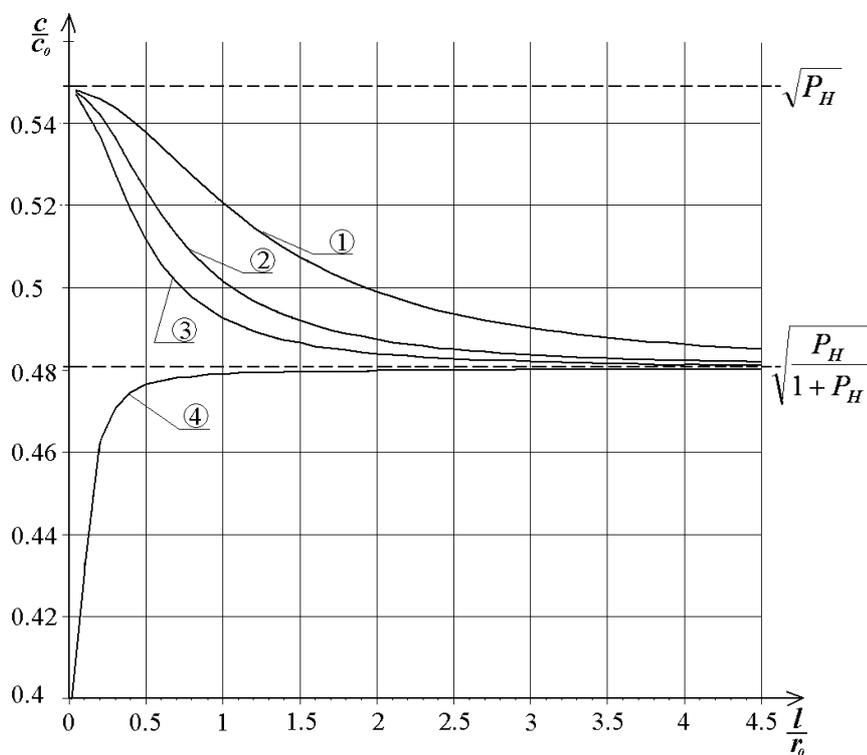


Рис. 3. Изменение фазовой скорости в зависимости от длины волны в случае магнитного давления $P_H=0.3$ (соответствует полю 0,088 Тл) в интервале при $c/c_0, \sqrt{P_H}$

ВЫВОДЫ

Представлены уравнения движения электропроводящей среды и условия сопряжения на поверхности раздела МГД-среды и упругой среды, описываемой уравнениями эластодинамики. Получены разрешающие уравнения в случае идеально-проводящей МГД-среды в цилиндрической полости и построены решения внутренней и внешней задач. Выведено дисперсионное уравнение, которое анализируется в предельных случаях. Показано существование волн в МГД-волокне и внешней ткани. Установлено, что во внешней ткани, окружающей кровеносный сосуд, могут распространяться волны со скоростями, превышающими скорость распространения пульсовой волны, и это влияет на формирование управления с обратными связями.

1. Био М. Распространение упругих волн в цилиндрической полости, содержащей жидкость. – В кн. Механика М.: ИЛ, 1953. – С. 3–19.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 608 с.
3. Кизилова Н. Н., Регирер С. А. Магнитогидродинамические эффекты при движении крови // Биофизика. – 1991. – 36, Вып. 1. – С. 147–153.
4. Селезов И. Т. Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем // Кибернетика и вычисл. техника. – Киев: Наук. думка, 1969. – Вып. 1. – С. 131–137.
5. Селезов И. Т., Селезова Л. В. Распространение бегущих волн в жидком электропроводящем волноводе, окруженном упругим диэлектриком // Магнитная гидродинамика. – 1974. – № 2. – С. 41–46.
6. Селезов И. Т., Селезова Л. В. – Волны в магнитоупругих средах: Киев, Наук. думка. – 1975 с. 164
7. Engelbrecht J. On theory of pulse transmission in a nerve fibre // Proc. Royal. Soc., London. – 1981. – **A375**. – P. 195–209.
8. Fusco D., Manganaro N., Migliardo M. Pulselike exact solutions for a model describing nerve fibers // Studies in Applied Mathematics. – 1998. – **103**. – P. 25–42.
9. Joshi R.P., Mishra A., Song J., Pakhomov A.G., Schoenbach K.H. Simulation studies of ultrashort, high-intensity electric pulse induced action potential block in whole – animal nerves // IEEE Transactions on Biomedical Eng. – 2008. – 55, N 4. – P. 1391–1397.
10. Kinouchi Y., Tenforde T. S. Theoretical analysis of magnetic field interactions with aortic blood flow // Bioelectromagnetics. – 1996. – **17**, N 1. – P. 21–32.
11. Lieberstein H.M. On the Hodgkin-Huxley partial differential equations // Mathematical Biosciences. – 1967. – **1**. – P. 45–69.
12. Lindberg I., Danielsson L. Magneto-acoustic oscillations in a cylindrical plasma column // Phys. Fluids. – 1963. – N 5. – P. 736–744.
13. Murawski K. The Korteweg-de Vries – Burgers equation for a weak dissipative, nonlinear and dispersive waves in an infinitely long cylindrical tube // J. Techn. Phys. – 1987. – **28**, N 1. – P. 3–6.
14. Schnabel V., Struijk J.J. Evaluation of the cable model for electrical stimulation of unmyelinated nerve fibers // IEEE Transactions on biomedical Engineering. – 2001. – **48**, 9. – P. 1027–1033.
15. Selezov I.T. Some models of coupled magnetoelastic fields and their application to the investigation of propagation and diffraction of waves // J. Math. Sci. – 2001. – **104** N 5. – P. 1490–1500.
16. Selezov I.T. About some transformations of equations of motion of electrically conductive media in magnetic field // Int. J. Fluid Mech. Res. – 2010. – **37**, N 4. – P. 382–389.
17. Selezov I., Avramenko O., Fratamico G., Pallotti G., Pettazzoni P. Stress concentration due to advancing heart pulse through a blood vessel joint // J. Mechanics in Medicine and Biology. – 2001. – **1**, N 2. – P. 79–96.
18. Scott A. Active and nonlinear wave propagation in electronics. – Wiley-Interscience, 1970; русский перевод: Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Советское радио. – 1987. – 368 с.
19. Suhl H., Walker L.R. Topics in guided wave propagation through gyromagnetic media // J. Bell System Techn., 1954. Русский перевод: Сух Г., Уокер Л. Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах. – М.: ИЛ, 1955. – 192 с.
20. Zhonggang F., Wangi Wu. Effect of the magnetic field on the pulsatile flow through a rigid tube. Yingyong shuxue he lixue // Appl. Math. and Mech. – 1995. – **16**, N 6. – P. 485–494.