

УДК 301.17.15.13; 532.5; 551.465; 629.76

**КОМПАКТНЫЕ ВИНТОВЫЕ ВИХРИ****П. В. ЛУКЪЯНОВ***Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 16.09.2010*

Приведены одномерные невязкие модели компактных винтовых течений. К ним относятся компактный компенсированный винтовой вихрь, компактный винтовой кольцевой вихрь и компактный винтовой вихрь с тремя областями постоянной завихренности. Второй и третий вихри также компенсированы: суммарная завихренность в них равна нулю. На основе полученных ранее результатов, описывающих поля завихренности и азимутальной скорости, найдены аналитические выражения для продольной компоненты скорости и возмущений давления. Показано, что компактный винтовой вихрь является компактным аналогом q-вихря.

Наведені одновимірні невязкі моделі компактних гвинтових течій. До них відносяться компактний компенсований гвинтовий вихор, компактний гвинтовий кільцевий вихор та компактний гвинтовий вихор з трьома областями сталої завихреності. Другий та третій вихори є також компенсованими: сумарна завихреність у них дорівнює нулеві. На підставі отриманих раніше результатів, що описують поля завихреності та азимутальної швидкості, виводяться аналітичні вирази для продовжньої компоненти швидкості та збурень тиску. Показано, що компактний гвинтовий вихор є компактним аналогом q-вихря.

This paper presents one-dimensional inviscid models of compact spiral flows. They are compact compensated screw-like vortex, compact spiral vortex that has ring-like domain, and compact spiral vortex that has three constant vorticity domains. Second and third vortexes are also compensated: their overall vorticity is equal to zero. On the basis of obtained earlier relations that describe vorticity and azimuthal velocity fields, the analytical solutions for axial velocity and pressure disturbances fields have been derived. It has been shown that compact spiral vortex is the compact analog of q-vortex.

*Светлой памяти Вадима Федоровича  
Козлова посвящается*

**ВВЕДЕНИЕ**

В природе винтовые течения встречаются довольно часто. Это, например, истечение струи из сосуда с покоящейся жидкостью; возникающее за изгибами русел и после поворотов в трубах циркуляционное течение в изначально равномерном потоке [1]. Винтовые вихри, которым посвящена данная работа, являются моделями, которые также используют для изучения срывающейся с крыла и сворачивающейся вихревой пелены [2]. Винтовые течения считаются установившимися (стационарными) движениями идеальной жидкости. До сих пор при изучении винтовых вихрей используются моделями, в которых поля, характеризующие течение, не компактны. А ведь ещё в середине 80-х годов прошлого столетия был получен экспериментально [3] интерполяционный аналог компактного компенсированного вихря [4, 5]. В открытом океане реальные вихри также компактны (и компенсированны) [6]. Поэтому, есть необходимость в развитии существующего уровня представлений в данной области.

Настоящая статья состоит из четырех частей. В первой части рассматривается простейшая модель компактного компенсированного винтового вихря.

На основе найденных ранее [4, 5] полей азимутальной скорости и завихренности, получены соответствующие выражения для продольной составляющей скорости и возмущений поля давления. Те же процедуры выполняются соответственно для кольцевого (полого) винтового вихря (вторая часть) и для винтового вихря, состоящего из трех областей постоянной завихренности (третья часть). В четвертой части вкратце упоминается о Q-вихре и указывается на его компактный аналог, рассмотренный в первой части работы.

**1. КОМПАКТНЫЙ КОМПЕНСИРОВАННЫЙ ВИНТОВОЙ ВИХРЬ**

Уравнения неоднородного вихревого потока в криволинейных ортогональных координатах имеют следующий вид [1, 7]:

$$\frac{1}{L_2 L_3} \left( \frac{\partial L_3 V_3}{\partial q_2} - \frac{\partial L_2 V_2}{\partial q_3} \right) = \lambda V_1, \quad (1)$$

$$\frac{1}{L_3 L_1} \left( \frac{\partial L_1 V_1}{\partial q_3} - \frac{\partial L_3 V_3}{\partial q_1} \right) = \lambda V_2, \quad (2)$$

$$\frac{1}{L_1 L_2} \left( \frac{\partial L_2 V_2}{\partial q_1} - \frac{\partial L_1 V_1}{\partial q_2} \right) = \lambda V_3, \quad (3)$$

где  $(V_1, V_2, V_3)$  – проекции вектора скорости в ортогональной системе координат;  $(L_1, L_2, L_3)$  – коэффициенты Лямэ [8].

Поскольку для цилиндрической системы координат  $(r, \theta, z)$   $L_1 = 1, L_2 = r, L_3 = 1$ , то система уравнений (1)-(3) имеет конкретный вид:

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial r V_\theta}{\partial z} \right) = \lambda V_r, \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = \lambda V_\theta, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) = \lambda V_z. \quad (6)$$

Предположим, что течение зависит лишь от одной координаты – радиальной, а  $\lambda \neq 0$  в вышеприведенных уравнениях [1].

Тогда последняя система уравнений упростится до вида

$$-\frac{\partial V_z}{\partial r} = \lambda V_\theta, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = \lambda V_z. \quad (8)$$

Исключая  $\lambda$  из системы уравнений (7), (8), получаем:

$$-V_z \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r}. \quad (9)$$

Последнее уравнение удобно переписать в виде:

$$-\frac{\partial V_z^2}{2\partial r} = V_\theta \omega_z, \quad (10)$$

где

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r}.$$

В монографии [1], со ссылкой на [7], в качестве окружной скорости выбирается распределение в ядре вихря Рэнкина:

$$V_\theta = \alpha r. \quad (11)$$

Подстановка последнего выражения в (10) и интегрирование даёт:

$$V_\theta = \sqrt{V_0^2 - 2\alpha r^2}, \quad (12)$$

где  $V_0$  – значение продольной скорости на оси.

Поскольку реальные вихри имеют ядра конечных размеров, то в качестве примеров в [1] можно найти три различных модели одномерных (колонообразных) винтовых вихря. Вертикальная компонента завихренности у них задается константой,

дробно-степенной функцией и гауссовским распределением. Указанные модели не описывают компактные течения: поле окружной скорости в них имеет одну и ту же асимптоту – потенциальное вращение по закону  $1/r$ , которое не является компактным.

Кроме того, что реальные вихри имеют поля ненулевой завихренности конечных размеров, они также имеют поле течения конечных размеров: независимо от того, конечная или бесконечная область их существования. Поэтому имеет смысл устранить указанный недостаток и рассмотреть компактный винтовой вихрь. Поле окружной скорости в таком вихре представляется компактным компенсированным вихрем [4, 5]:

$$V_\theta = \begin{cases} \frac{V_0 r}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{V_0 a}{r} \left( \frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2} \right), & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (13)$$

$$\omega_z = \begin{cases} \frac{2V_0}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ -\frac{2V_0 a}{R^2 - a^2}, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (14)$$

Поэтому правая часть уравнения (10) представляется в виде:

$$V_\theta \omega_z = \begin{cases} 2 \left( \frac{V_0 r}{a} \right)^2, & 0 \leq r \leq a, \\ -\frac{2V_0^2 a^2}{r} \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - a^2)^2}, & a \leq r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (15)$$

Из уравнения (10) находим продольную компоненту скорости по формуле

$$\frac{V_z^2}{2} = \frac{V_0^2}{2} - \int_0^r V_\theta \omega_z dr. \quad (16)$$

В последнем выражении сразу учтено значение скорости на оси выбором соответствующей константы.

Подставляя уравнение (15) в (16), получаем:

1) для области  $0 \leq r \leq a$  :

$$\frac{V_z^2}{2} = \frac{V_0^2}{2} - \int_0^r 2 \left( \frac{V}{a} \right) r dr = \frac{V_0^2}{2} - V^2 \left( \frac{r}{a} \right)^2;$$

2) для области  $a \leq r \leq R$ :

$$\begin{aligned} \frac{V_z^2}{2} &= \frac{V_0^2}{2} - V^2 + \int_a^r 2 \frac{V^2 a^2}{(R^2 - a^2)^2} \left( \frac{R^2}{r} - r \right) dr = \\ &= \frac{V_0^2}{2} - V^2 + 2 \frac{V^2 a^2}{(R^2 - a^2)^2} \left( R^2 \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{2} (r^2 - a^2) \right). \end{aligned}$$

Условие непрерывности поля скорости  $V_z$  при  $r = a$  удовлетворяется лишь при равенстве нулю константы интегрирования в последнем выражении.

При  $r \geq R$ :

$$\begin{aligned} \frac{V_{zR}^2}{2} &= \frac{V_0^2}{2} - V^2 + \\ &+ 2 \frac{V^2 a^2}{(R^2 - a^2)^2} \left( R^2 \ln \frac{R}{a} - \frac{1}{2} (R^2 - a^2) \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение означает, в общем случае, равенство константе продольной скорости вне границы вихря.

Важной характеристикой винтовых течений с внутренней границей, особенно в технических приложениях, является поле возмущения давления, генерируемое вихрем. Оно определяется из соотношения [1]:

$$\frac{V_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (17)$$

откуда давление как функция радиальной координаты выразится следующим образом:

$$p = p_\infty + \rho \int_\infty^r \frac{V_\theta^2}{r} dr. \quad (18)$$

Подставляя явное выражение для окружной скорости в последнее соотношение, получаем зависимость для возмущения поля давления  $\Delta p = (p - p_\infty)/p_\infty$ :

$$\Delta p = \begin{cases} D \left[ R^4 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right) - 2R^2(a - R) + \frac{(a^3 - R^3)}{3} \right] + \\ \quad + \frac{1}{3} \left( \frac{V_0}{a} \right)^2 (r^3 - a^3), & 0 \leq r \leq +a, \\ D \left[ R^4 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) - 2R^2(r - R) + \frac{(r^3 - R^3)}{3} \right], & a \leq r \leq +R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

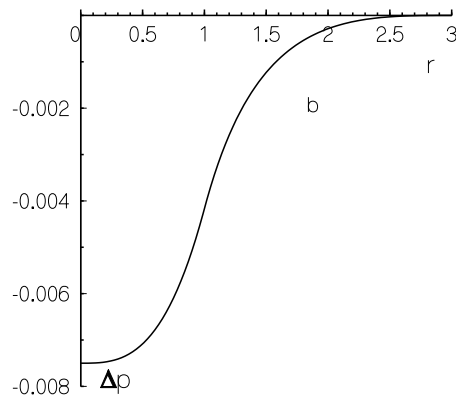
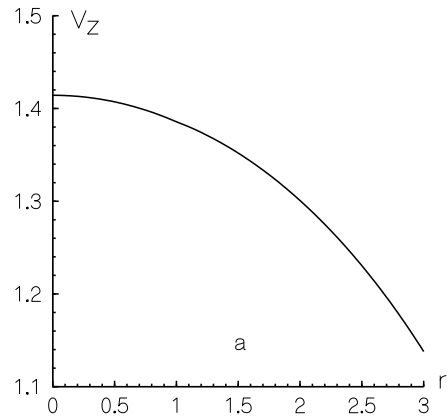


Рис. 1. Продольная компонента скорости (a) и возмущение давления (b)

где  $D = V_0^2 a^2 / (R^2 - a^2)^2$ .

Следует отметить, что профили продольной скорости и возмущений давления схожи со своими аналогами, полученными на основе модели вихря Рэнкина [1]. Ненулевое значение продольной компоненты скорости соответствует таким задачам, как вихрь в потоке и подобным. Отличие лишь в том, что на границе вихря  $r = R$  поле возмущений давления строго равно нулю, что соответствует компактности поля азимутальной скорости. Кроме того, поле продольной компоненты скорости  $V_z$  также может быть компактным. Это относится к тем задачам (течение в замкнутых поверхностях, компактные геофизические вихревые течения), где задано вращение и продольная скорость определяется после удовлетворения условия компактности:

$$V_z|_{r=R} = 0$$

Очевидно, что для этого нужно в выражении для продольной скорости вычесть значение на границе вихря  $V_{zR}$ . Следовательно, компактный компенсированный вихрь имеет ненулевые распределения всех величин (продольной и азимутальной скоростей, вертикальной компоненты завихренности, возмущения давления) в строго ограниченной области:  $0 \leq r \leq R$ .

## 2. КОМПАКТНЫЙ ВИНТОВОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ВИХРЬ

В монографии [1] приведено обобщение винтового вихря на случай, когда внутри кольцевой области  $b_1 \leq r \leq b_2$  задано постоянное значение завихренности:

$$\omega_z = \begin{cases} 0, & r \leq b_1, r > b_2, \\ 1, & b_1 \leq r \leq b_2. \end{cases} \quad (19)$$

Поле окружной скорости в таком вихре не является компактным, и вне кольцевой области имеет потенциальное распределение как в точечном вихре или вихре Рэнкина. Предпочтение имеет модель, основанная на кольцевом компактном вихре, в которой поля скорости и завихренности представляются в виде [5]:

$$V_\theta = \begin{cases} \frac{\Omega_0 (r^2 - r_0^2)}{2r}, & r_0 \leq r \leq r_0 + a, \\ \frac{\Omega_0 \left( (r_0 + a)^2 - r_0^2 \right) \left( (r_0 + R)^2 - r^2 \right)}{\left( (r_0 + R)^2 - (r_0 + a)^2 \right) 2r}, & r_0 + a \leq r \leq r_0 + R, \\ 0, & r > r_0 + R; \end{cases} \quad (20)$$

$$\omega_z = \begin{cases} \Omega_0, & r_0 \leq r \leq r_0 + a, \\ -\frac{\Omega_0 \left( (r_0 + a)^2 - r_0^2 \right)}{\left( (r_0 + R)^2 - (r_0 + a)^2 \right)}, & r_0 + a \leq r \leq r_0 + R, \\ 0, & r > r_0 + R. \end{cases} \quad (21)$$

Для нахождения продольной компоненты скорости  $V_z$  вновь воспользуемся соотношением (10) и найдем произведение:

$$-V_\theta \omega_z^2 = \begin{cases} -\frac{\Omega_0^2 (r^2 - r_0^2)}{2r}, & r_0 \leq r \leq r_0 + a, \\ \frac{\Omega_0^2 \left( (r_0 + a)^2 - r_0^2 \right)^2 \left( (r_0 + R)^2 - r^2 \right)}{\left[ \left( (r_0 + R)^2 - (r_0 + a)^2 \right)^2 \right] 2r}, & r_0 + a \leq r \leq r_0 + R, \\ 0, & r > r_0 + R. \end{cases}$$

Используя соотношение (16), получаем:

$$\frac{1}{2} V_z^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} V_{z0}^2 - \Omega_0^2 \left( -\frac{r_0^2}{2} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{4} (r^2 - r_0^2) \right), & r_0 \leq r \leq r_0 + a, \\ \frac{1}{2} V_{z0}^2 - \Omega_0^2 \left( -\frac{r_0^2}{2} \ln \left( \frac{r_0 + a}{r_0} \right) + \frac{1}{4} \left( (r_0 + a)^2 - r_0^2 \right) \right) + \\ + B \left[ \frac{(r_0 + R)^2}{2} \ln \left( \frac{r}{r_0 + a} \right) + (r_0 + a)^2 - r^2 \right], & r_0 + a \leq r \leq r_0 + R, \\ 0, & r > r_0 + R, \end{cases}$$

где  $B$  – константа,

$$B = \frac{\Omega_0^2 \left( (r_0 + a)^2 - r_0^2 \right)^2}{\left( (r_0 + R)^2 - (r_0 + a)^2 \right)^2}.$$

Согласно полученным результатам, поле скорости  $V_z$  также сначала убывает, а потом возрастает, выходя на границе вихря на постоянное значение

$$\frac{1}{2} V_{zR}^2 = \frac{1}{2} V_{z0}^2 - \Omega_0^2 a(3r_0 + a) + B \left[ \frac{(r_0 + R)^2}{2} \ln \left( \frac{R}{r_0 + a} \right) + (r_0 + a)^2 - R^2 \right]. \quad (22)$$

Поле возмущения давления находится как и прежде. Имеем:

**3. КОМПАКТНЫЙ ВИНТОВОЙ ВИХРЬ С ТРЕМЯ ОБЛАСТЯМИ ЗАВИХРЕННОСТИ**

$$\Delta p = \begin{cases} p_2 = p_1(r = r_0 + a) + \frac{B}{2} \left( \frac{r_0^4}{(r_0 + a)^2} - \frac{r_0^4}{r^2} \right) + \\ + B \left( \frac{1}{2} (r^2 - (r_0 + a)^2) - 2r_0^2 \ln \left( \frac{r}{r_0 + a} \right) \right) + \\ + 0.5Br_0^4 \left( \frac{1}{(r_0 + a)^2} - \frac{1}{r^2} \right), r_0 \leq r \leq r_0 + a, \\ p_1 = -0.5B(r_0 + R)^4 \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r_0 + R)^2} \right) - \\ - 2B(r_0 + R)^2 \ln \left( \frac{r}{r_0 + R} \right) + \\ + 0.5B(r^2 - (r_0 + R)^2), r_0 + a \leq r \leq r_0 + R, \\ 0, r > r_0 + R. \end{cases}$$

Важно отметить, что давление на внутренней границе вихря всегда меньше давления на бесконечности, а поле продольной скорости также может быть компактным, если от  $V_z$  вычесть  $V_{zR}$ .

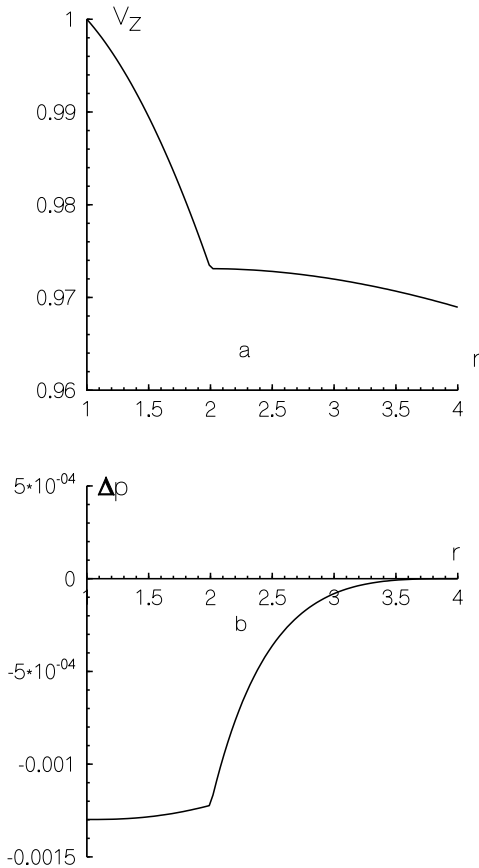


Рис. 2. Продольная компонента скорости (a) и возмущение давления (b)

В природе существуют и более сложные вихревые течения, в частности состоящие из трех областей завихренности с разными значениями [6, 9]. В работе [5] получено решение, описывающее соответствующий компактный вихрь. Принципиальным для этого течения является то, что, в отличие от вихря с двумя областями завихренности, у данного вихря продольная скорость сначала убывает, потом возрастает, а затем снова убывает на всем протяжении вплоть до границы вихря.

Распределение вертикальной компоненты завихренности и окружной компоненты скорости в данном случае имеют следующий вид [5]:

$$\omega_z = \begin{cases} \Omega_0, & 0 \leq r \leq +a, \\ \Omega_1, & a \leq r \leq R_1, \\ -\frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ 0, & r > R_2. \end{cases} \quad (23)$$

$$V_\theta = \begin{cases} \frac{\Omega_0 r}{2}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\Omega_0 a^2}{2r} + \frac{\Omega_1 (r^2 - a^2)}{2r}, & a \leq r \leq R_1, \\ \frac{\Omega_0 a^2}{2r} + \frac{\Omega_1 (R_1^2 - a^2)}{2r} - \\ - \frac{[\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)] (r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2) 2r}, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ 0, & r > R_2. \end{cases} \quad (24)$$

Поэтому

$$-V_\theta \omega_z = \begin{cases} \frac{\Omega_0^2 r}{2}, & 0 \leq r \leq a, \\ -\frac{(\Omega_0 - \Omega_1) \Omega_1 a^2}{2r} + \frac{\Omega_1^2 r}{2}, & a \leq r \leq R_1, \\ -B \frac{(\Omega_0 - \Omega_1) a^2}{2r} + \frac{\Omega_1^2 R_1^2}{2r} + \\ + B \frac{[\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)] (r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2) 2r}, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Используем соотношение (16), с учётом граничного условия на оси для  $V_z$ , и непрерывность поля скорости.

1)  $0 \leq r \leq a$ :

$$\frac{V_z^2}{2} = \frac{V_{z0}^2}{2} - \frac{\Omega_0^2 r^2}{4}.$$

2)  $a \leq r \leq R_1$ :

$$\frac{V_z^2}{2} = \frac{V_{z0}^2}{2} + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_0^2}{4} a^2 - \left[ \frac{(\Omega_0 - \Omega_1) \omega_1 a^2}{2} \ln \left( \frac{r}{a} \right) + \frac{\Omega_1^2 r^2}{4} \right].$$

3)  $R_1 \leq r \leq R_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{V_z^2}{2} &= \frac{V_{z0}^2}{2} + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_0^2}{4} a^2 - \left[ \frac{(\Omega_0 - \Omega_1) \omega_1 a^2}{2} \ln \left( \frac{R_1}{a} \right) + \frac{\Omega_1^2 R_1^2}{4} \right] - \\ &- B \left[ \frac{(\Omega_0 - \Omega_1) a^2}{2} \ln \left( \frac{r}{R} \right) + \frac{\Omega_1 R_1^2 \ln \left( \frac{r}{R} \right)}{2} \right] + B \times \\ &\times \left[ \frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{r^2 - R_1^2}{4} - \frac{R_1^2}{2} \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

На границе вихря при  $r = R_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{V_{zR_2}^2}{2} &= \frac{V_{z0}^2}{2} + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_0^2}{4} a^2 - \left[ \frac{(\Omega_0 - \Omega_1) \omega_1 a^2}{2} \ln \left( \frac{R_1}{a} \right) + \frac{\Omega_1^2 R_1^2}{4} \right] - \\ &- B \left[ \frac{(\Omega_0 - \Omega_1) a^2}{2} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{\Omega_1 R_1^2 \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}{2} \right] + B \times \\ &\times (\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)) \left[ \frac{1}{4} - \frac{0.5 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Проведем предварительный качественный анализ поля продольной компоненты скорости. Как следует из выражений (23)–(24), продольная скорость сначала убывает, затем возрастает и, наконец, снова убывает вплоть до внешней границы вихря  $r = R_2$ . Если вновь вычесть от всего выражения для продольной скорости ее значение на границе  $r = R_2$ , то такое поле будет уже компактным. И это желаемый результат, поскольку все, без исключения, естественные вихревые течения компактны.

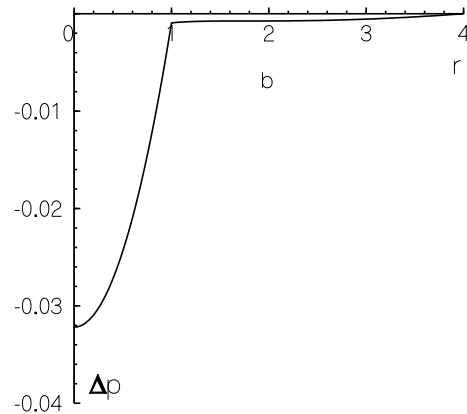
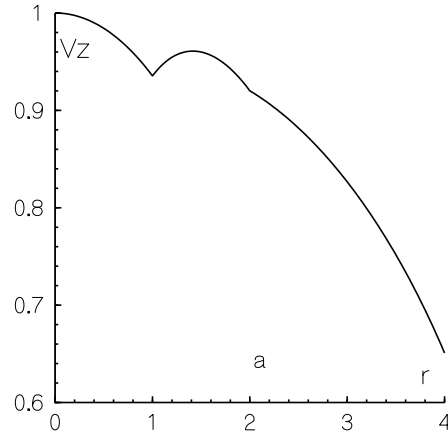


Рис. 3. Продольная компонента скорости (a) и возмущение давления (b)

Наконец, приведем решение, описывающее поле возмущения давления. Как и выше, используем уравнение циклострофического баланса (17).

Квадрат азимутальной скорости удобно представить в следующем компактном виде:

$$V_\theta^2 = \begin{cases} \left( \frac{\Omega_0 r}{2} \right)^2, & 0 \leq r \leq a \\ \left( \frac{a^2 (\Omega_0 - \Omega_1)}{2} \right)^2 \frac{1}{r^2} + \frac{a^2 (\Omega_0 - \Omega_1) \Omega_1}{2} + \frac{\Omega_1^2}{4} r^2, & a \leq r \leq R_1, \\ \frac{C^2}{r^2} + 2CD + D^2 r^2, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ 0, & r > R_2. \end{cases}$$

Константы  $C$  и  $D$  в последних соотношениях будут:

$$C = \left[ \frac{a^2(\Omega_0 - \Omega_1)}{2} + \frac{R_1^2(\Omega_0 a^2 + \Omega_1(R_1^2 - a^2))}{2(R_2^2 - R_1^2)} \right],$$

$$D = -0.5 \frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1(R_1^2 - a^2)}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Поэтому поле возмущений давления находится в следующем виде:

$$1) R_1 \leq r \leq R_2$$

$$p_1 = \int_{R_2}^r \left[ \frac{C^2}{r^3} + \frac{2CD}{r} + D^2 r \right] dr = \frac{C^2}{2} \left[ \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right] +$$

$$+ 2CD (\ln r - \ln R_1) + \frac{D^2}{2} (r^2 - R_2^2);$$

$$2) a \leq r \leq R_1$$

$$p_2 = \int_{R_1}^r \left[ \frac{(\Omega_0 - \Omega_1)^2}{4r^3} + \frac{\Omega_1(\Omega_0 - \Omega_1)}{2r} + \frac{\Omega_1^2 r}{4a^2} \right] dr \times$$

$$\times a^2 + p_1^* = p_1^* - \frac{1}{8} 5a^4 (\Omega_0 - \Omega_1)^2 \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right] +$$

$$+ 0.5a^2 \Omega_1 (\Omega_0 - \Omega_1) (\ln r - \ln R_1) + \frac{1}{8} \Omega_1^2 (r^2 - R_1^2),$$

где  $p_1^* = p_1(r = R_1)$ ;

$$3) 0 \leq r \leq a$$

$$p_3 = p_2^* + \int_a^r \left( \frac{\Omega_0}{2} \right)^2 r dr = p_2^* + \frac{1}{8} \Omega_0^2 (r^2 - a^2),$$

где  $p_2^* = p_2(r = a)$ .

#### 4. КОМПАКТНЫЙ АНАЛОГ Q-ВИХРЯ

Среди простейших одномерных моделей винтовых течений выделяют еще так называемый Q-вихрь [10], поля скорости в котором представляются в виде

$$V_\theta = \frac{q}{r} (1 - \exp(-r^2)), \quad V_z = \exp(-r^2). \quad (25)$$

Представления (25) являются упрощенным аналогом более общей модели, когда

$$V_z = W_1 + W_2 \exp(-r^2). \quad (26)$$

Именно в таком виде профили скорости с высокой точностью описывают эксперимент [1]. Недостатком обеих моделей является их некомпактность. Поле азимутальной скорости асимптотически стремится к потенциальному течению, как в вихре Рэнкина или точечном вихре. В случае наличия границ области (стенок) такое распределение окружной скорости не подходит. Да и в случае бесконечной области некомпактность вихря вряд ли приемлема. Поэтому предпочтительнее рассматривать компактный аналог Q-вихря, который описывается моделью компактного компенсированного винтового вихря, см. первый раздел статьи.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В данной работе представлены три модели, описывающие простейшие одномерные (колонообразные) невязкие винтовые вихри. Все они основаны на фундаментальном положении о том, что для такого класса течений компенсированность поля завихренности влечет за собой компактность полей азимутальной скорости, возмущений давления и продольной компоненты скорости (в тех задачах, где это необходимо). В простейшей модели поле завихренности состоит из двух областей. В более сложной, – полый вихрь, – движение сосредоточено в кольцевой области. И наконец, самой сложной является модель вихря, состоящая из трех областей постоянной завихренности. Если в первом случае все достаточно просто, то для второй и третьей модели появляется определенный произвол в выборе параметров. Особо это заметно в случае вихря, состоящего из трех областей. Однако в рамках данной работы не планировалось всестороннего анализа безразмерных соотношений и т. п. Это может стать предметом последующих исследований. Важно отметить, что хотя распределения кинематических характеристик в реальных вихревых течениях учитывают вязкость, полученные решения можно всегда использовать в качестве начального невязкого приближения. Уравнения и граничные условия, то есть численная схема, скорректируют его, но главное, – компактность течения, – при этом останется.

1. Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. – 504 с.

2. Лейбович С. Устойчивость и разрушение вихрей: современное состояние и перспективы // Аэрокосм. техника.– 1985.– Т. 3, № 4.– С. 162-181.
3. Escudier M.P., Borstein J., and Maxworthy T. The Dynamics of Confined Vortices // Proceeding of the Royal Society of London.– 1982.– V. A382.– P. 335-360.
4. Лук'янов П.В. Одновимірні моделі компактних вихорів // Наукові вісті НТУУ КПІ.– 2010.– т. 8 (80), N4.– С. 145–150.
5. Лукьянов П.В. Модели компактных компенсированных вихрей и их применение в задачах механики жидкости и газа // Прикл.гидром.– 2011.– т. 13 (85), №2.– С. 37–43.
6. Козлов В.Ф. Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей. // Известия АН ФАО.– 1992.– т.28, № 6.– С. 615-624.
7. Васильев О.Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков.– М.: Госэнергоиздат, 1958.– 144 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М.: Наука, 1984.– 832 с.
9. Арсеньев С.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.Н. Самоорганизация торнадо и ураганов в атмосферных течениях с мезомасштабными вихрями // ДАН.– 2004.– №4.– С. 541-546.
10. Lessen M., Singh P.J., Paillet F. The stability of trailing line vortex. Part I. Inviscid theory // J. Fluid Mech.– 1974.– V. 65.– P. 753-763.