

УДК 532.546:628.35

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕГОСЯ БИОФИЛЬТРОВАНИЯ ПРИ НЕЛИМИТИРОВАННОЙ СКОРОСТИ РОСТА БИОМАССЫ

В. Л. ПОЛЯКОВ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 05.07.2010*

Получено строгое решение задачи установившегося биофильтрации при утилизации легкоразлагаемых веществ (доочистка сточных вод) фиксированным биоценозом с нелимитированной скоростью роста. Реализованы три подхода, отражающие особенности формирования динамического равновесного состояния биомассы с учетом гидродинамического фактора, физических свойств биопленок. На многочисленных примерах оцениваются разнообразные последствия длительного поступления на биореактор-фильтр с зернистой загрузкой субстрата различной концентрации.

Отримано точний розв'язок задачі усталеного біофільтрування при доочищенні органічних забруднень фіксованим біоценозом з нелімітованою швидкістю росту. Реалізовано три підходи, які відбивають особливості формування динамічного рівноважного стану біомаси з врахуванням гідродинамічного фактору, фізичних властивостей біоплівки. На численних прикладах оцінюються різноманітні наслідки від тривалої подачі на біореактор-фільтр із зернистим завантаженням субстрата різної концентрації.

An exact solution has been obtained of the steady-state biofiltration task when secondary wastewater purification occurred by fixed biomass at unlimited growth rate. Three approaches to the task have been sequentially realized which took into consideration characteristic properties of forming dynamic equilibrium biomass state, hydraulic factor, biofilm physical features. Important consequences due to long-duration substrate feed at bioreactor with grain filter medium have been estimated at numerous examples when its concentration widely varied.

## ВВЕДЕНИЕ

Сточные воды даже после первичной очистки содержат в весьма значительных количествах легкоразлагаемые органические соединения и биогенные элементы, а поэтому могут служить подходящей питательной средой для биоты и, в первую очередь, для микроорганизмов. При пропуске таких насыщенных кислородом вод через пористую структуру создаются благоприятные условия для быстрого роста населяющих ее живых организмов. В процессе фильтрации на структурных элементах (зернах) образуются биопленки, состоящие из микроорганизмов и продуктов их жизнедеятельности (метаболитов). Они прочно закреплены на поверхностях зерен и в совокупности могут рассматриваться как вторичный биологический континуум, обладающий специфическими физико-химическими, а вместе с тем уже и биологическими свойствами. Именно множество биопленок в загрузках биореакторов-фильтров непосредственно обеспечивает удаление из воды органического и биогенного загрязнения, используя углерод- и азотсодержащие вещества в качестве источника энергии и строительного материала для биосинтеза. Однако и при избытке питания, энер-

гии развитие биоценоза сдерживается стесненностью условий его существования, силовым воздействием потока. По мере накопления биомассы и роста толщины биопленки ее прочность уменьшается, а при работе фильтра с постоянным расходом также увеличивается скорость жидкости. Поэтому со временем отрыв фиксированной биомассы усиливается, что отражают многочисленные модели этого явления [1–3]. В итоге большая часть растворенных веществ при прохождении через зернистую загрузку расходуется на сохранение количества деятельной микробальной массы на определенном уровне. Вместе с тем, выделенные из биопленок растворимые продукты метаболизма, а также оторвавшиеся от них разными способами [4–6] фрагменты обуславливают уже вторичное (биологическое) загрязнение, которое пока не стало предметом моделирования. Таким образом, при поддержании постоянной скорости фильтрации со временем реализуется его практически установившийся режим, который играет определяющую роль в работе затопленных фильтров с закрепленным на зернах биоценозом. При длительной подаче на фильтровальное сооружение вод со стабильными составом и содержанием загрязнения в конце концов формируется устойчивое биологиче-

ское сообщество, включающее и ассоциацию иммобилизованных микроорганизмов, как важнейшую его компоненту [7]. Правомочность использования стационарных моделей биопленки и биофильтрации показана в работах [8–10].

Жизнедеятельность микроорганизмов в пористых загрузках часто протекает в далеких от оптимальных условиях, что в значительной степени тормозит их развитие и, как следствие, снижает производительность фильтров. Среди многих причин, объясняющих относительно невысокую эффективность биофильтрации, следует выделить ограниченность питательных и энергетических ресурсов в доочищаемых водах. Большой практический интерес представляет также очистка вод с высоким содержанием растворенных загрязнений (субстрата), кислорода и в отсутствие токсичных веществ, когда лимитирование роста биомассы, по крайней мере вследствие отмеченных факторов, не происходит. С формальной точки зрения такая ситуация намного проще, аналитические методы здесь являются особенно продуктивными и поэтому, естественно, она изучена наиболее глубоко [11, 12].

При постановке математических задач биофильтрации с целью его углубленного теоретического анализа, разработки инженерной методики расчета физико-химических характеристик, технологических, конструктивных параметров приходится прибегать к ряду упрощений сложнейшего многофакторного явления физической, химической и биологической природы, каким есть удаление растворенных веществ из сточных вод. Фактически используется система допущений, что оправдывается накопленным большим опытом эксплуатации фильтровальных сооружений, результатами ранее проводившихся экспериментальных и теоретических исследований. Так, принимается, что:

- загрузка образована одинаковыми зернами радиусом  $L_0$ , на которых закреплены биопленки, имеющие форму шарового слоя толщиной  $L_f$ ;
- исходная концентрация единственного субстрата не меняется на протяжении всего фильтрационного цикла;
- скорость потребления субстрата биомассой максимальная (реакция биоокисления имеет нулевой порядок), а биопленки являются однородными с постоянными по своей глубине пористостью и плотностью;
- массоперенос в биопленках обеспечивается диффузионным механизмом, а в объеме загрузки – конвективным; массообмен между ними лимитируется проницаемостью пограничной жидкой пленки;

- имеет место установившееся биофильтрация, при которой скорости физико-химических и биологических процессов, распределение субстрата и биомассы на макроуровне (по высоте загрузки) и субстрата на микроуровне (по толщине биопленки) со временем не меняются;

- отслеживаются изменения на обоих уровнях содержания субстрата и тесно связанной с ним биомассы; все остальные субстраты и кислород, которые обеспечивают биосинтез, утилизацию выделенного субстрата и жизнедеятельность биоты в фильтре содержатся в воде в большом количестве и не лимитируют вышеупомянутые процессы.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЕЙСТВИЯ БИОПЛЕНКИ

Исходная математическая модель биологической очистки сточных вод в биореакторах-фильтрах описывает комплекс физико-химических процессов, протекающих в двух взаимодействующих разномасштабных средах (жидкость в свободном поровом пространстве, система биопленки). Поэтому она является, по существу, двухуровневой и состоит из двух взаимосвязанных блоков. Ключевую роль играет блок биопленки, характеризующий массоперенос и деструкцию органического загрязнения в биологической среде. Вне зависимости от характера процесса фильтрации и динамики биомассы его основу составляет стационарное уравнение диффузии и потребления субстрата в отдельно взятой биопленке при нелIMITированной скорости роста биомассы, которая имеет следующий вид:

$$D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\mu_m}{Y} B = \lambda. \quad (1)$$

Здесь  $D$  – эффективный коэффициент диффузии субстрата в биопленке,  $\text{м}^2/\text{час}$ ;  $S$  – массовая концентрация субстрата,  $\text{гХПК}/\text{м}^3$ ;  $\mu_m$  – удельная максимальная скорость прироста биомассы,  $\text{час}^{-1}$ ;  $B$  – концентрация биомассы,  $\text{гХПК}/\text{м}^3$ ;  $Y$  – экономический коэффициент трансформации субстрата в биомассу,  $\text{гХПК}/\text{гХПК}$ . Поступление субстрата в биопленку через примыкающую к ней извне жидкую пленку контролируется проводимостью последней. Соответствующее краевое условие на границе между ними будет [13 – 15]

$$x = L_f, \quad D \frac{\partial S}{\partial x} + \gamma(S - S_w) = 0, \quad (2)$$

где  $L_f$  – толщина биопленки,  $\text{м}$ ;  $\gamma$  – коэффициент переноса субстрата в жидкой пленке,  $\text{м}/\text{час}$ ;

$S_w$  – концентрация субстрата в объеме загрузки, гХПК/м<sup>3</sup>. Внутренней границей для микропотока субстрата может служить или поверхность зерна ( $x = 0$ ), или промежуточный раздел между участками активной и инертной биомассы ( $x = L_*$ ) [16]. Первый снабжается субстратом, а второй его лишен. При большой концентрации биомассы и доочистке сточных вод вторая ситуация является более типичной. Таким образом, задается пара условий

$$x = L_*, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad S = 0. \quad (3)$$

Одно из них необходимо для определения заранее неизвестной координаты  $L_*$ . Если же биопленка является целиком активной благодаря проникновению субстрата на всю ее глубину, то для корректной формулировки блока модели достаточно только первого из условий (3). В результате решения задачи (1)–(3) получено известное выражение для профиля концентрации по толщине биопленки  $S(x)$ :

$$S(x) = S_w - \frac{\lambda}{\gamma}(L_f - L_*) + \frac{\lambda}{D} \left[ \frac{x^2 - L_f^2}{2} - L_*(x - L_f) \right]. \quad (4)$$

Для нахождения  $L_*$  привлекается второе условие (3), так что

$$L_* = L_f + \frac{D}{\gamma} - \sqrt{\frac{D^2}{\gamma^2} + \frac{2DS_w}{\lambda(L_f)}}. \quad (5)$$

В дальнейшем будут использоваться только безразмерные переменные и параметры, которые вводятся таким образом:  $\bar{S} = S/S_0$ ,  $\bar{S}_w = S_w/S_0$ ,  $\bar{x} = x/L_0$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda L_0^2/(DS_0)$ ,  $\bar{\gamma} = \gamma L_0/D$ ,  $\bar{L}_{f,*} = L_{f,*}/L_0$ ,  $S_0$  – исходная концентрация субстрата, гХПК/м<sup>3</sup>;  $L_0$  – внутренний масштаб длины. Тогда, после несложных преобразований в формулах (4), (5), получено

$$\bar{S}(\bar{x}) = \bar{S}_w - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\gamma}}(\bar{L}_f - \bar{L}_*) + \bar{\lambda} \left( \frac{\bar{x}^2 - \bar{L}_f^2}{2} - \bar{L}_*\bar{x} - \bar{L}_*\bar{L}_f \right), \quad (6)$$

$$\bar{L}_* = \bar{L}_f + \frac{1}{\bar{\gamma}} - \sqrt{\frac{1}{\bar{\gamma}^2} + \frac{2\bar{S}_w}{\bar{\lambda}(\bar{L}_f)}}. \quad (7)$$

Коэффициент  $\bar{\lambda}$  выражается через толщину  $\bar{L}_f$  таким образом:

$$\bar{\lambda} = \psi_1 n_g [(1 + \bar{L}_f)^3 - 1], \quad (8)$$

где  $\psi_1 = \mu_m \rho_B L_0^2/(YDS_0)$ ,  $\rho_B$  – плотность биомассы, гХПК/м<sup>3</sup>;  $n_g$  – удельный объем зерен ( $n_g = 1 - n_0$ ),  $n_0$  – пористость чистой загрузки. Биопленка будет полностью активной, если  $\bar{L}_* \leq 0$ , так что согласно (5)

$$\bar{S}_w \geq \bar{\lambda}(\bar{L}_f) \left( \frac{\bar{L}_f^2}{2} + \frac{\bar{L}_f}{\bar{\gamma}} \right). \quad (9)$$

Величина  $\bar{S}_w$  пока неизвестна и будет определена в ходе решения полной задачи биофильтрации. Исходя из (2), (6), устанавливается относительный поток  $\bar{i}_f$  субстрата к произвольной биопленке:

$$\bar{i}_f = \frac{L_0}{DS_0} i_f = \bar{\gamma}(\bar{S}_w - \bar{S}_f), \quad (10)$$

который с учетом выражения для относительной концентрации субстрата на внешней границе биопленки

$$\bar{S}_f = \bar{S}(\bar{L}_f) = \bar{S}_w - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\gamma}}(\bar{L}_f - \bar{L}_*) \quad (11)$$

составляет в случае только активной биомассы –

$$\bar{i}_f = \bar{\lambda}(\bar{L}_f) \cdot \bar{L}_f, \quad (12)$$

а при наличии также инертной –

$$\bar{i}_f = \bar{\lambda}(\bar{L}_f) \cdot (\bar{L}_f - \bar{L}_*). \quad (13)$$

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БИОФИЛЬТРОВАНИЯ

На основе выражений (10)–(13) определяется функция утилизации субстрата в загрузке  $I(z)$ , с помощью которой при моделировании биофильтрации осуществляется переход с микроуровня (биопленка) на макроуровень (загрузка) с внешней координатой  $z$  и масштабом длины  $L_m$  (высота загрузки). Если загрузка сложена из одинаковых зерен радиусом  $L_0$ , то их количество в единице объема пористой среды  $N_f$  будет

$$N_f = \frac{3n_g}{4\pi L_0^3}.$$

Тогда при площади боковой поверхности зерна  $\omega_f$  искомая функция будет иметь вид

$$I = N_f \omega_f i_f, \quad (14)$$

а в безразмерной форме, принимая во внимание (12), (13) для полностью и частично активной биопленки соответственно:

$$\bar{I} = \frac{L_0^2}{DS_0} I = 3n_g \bar{\lambda} \bar{L}_f (1 + \bar{L}_f)^2, \quad (15)$$

$$\bar{I} = \frac{L_0^2}{DS_0} I = 3n_g(1 + \bar{L}_f)^2 \left( \sqrt{\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\gamma}}\right)^2 + 2\bar{\lambda}\bar{S}_w - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\gamma}}} \right). \quad (16)$$

Пусть биомасса находится в состоянии динамического равновесия, так что уравнение ее баланса приобретает вид [17, 18]

$$YI = k_d B, \quad (17)$$

где  $k_d$  – эффективный коэффициент скорости потери фиксированной биомассы. Данный коэффициент имеет исключительно важное значение при моделировании динамики биомассы в фильтрах, так как обобщенно характеризует ряд процессов (дыхание, отрыв, выедание), ограничивающих ее рост и, в конце концов, стабилизирующих величину  $B$ . Строго говоря, коэффициент  $k$  является переменным и тесно связан с толщиной биоупленки, скоростью воды в порах  $u$ . Однако надежные эмпирические зависимости  $k_d$  от  $L_f$  автору неизвестны, поэтому закономерные изменения  $k_d$  учитываются только в третьем подходе.

### 3. ПЕРВЫЙ ПОДХОД

Этот подход правомочен в тех редких случаях, когда коэффициенты  $\mu_m$ ,  $k_d$  оказываются близкими по величине. Тогда даже во входном сечении загрузки, где складываются наиболее благоприятные для биоты условия, поровое пространство способно вместить всю накопившуюся в течение длительного времени микробальную массу. В практическом отношении первый подход имеет незначительную ценность, тем не менее его можно рассматривать как базовый, поскольку ряд полученных при этом формул используется в ходе реализации двух других подходов. Итак, балансовое уравнение (17) при постоянном  $k_d$  с учетом выражения

$$B = \rho_B n_g [(1 + \bar{L}_f)^3 - 1] \quad (18)$$

преобразуется следующим образом:

$$\bar{I} = \psi_2 \bar{\lambda} (\bar{L}_f) = \psi_1 \psi_2 n_g [(1 + \bar{L}_f)^3 - 1], \quad (19)$$

где  $\psi_2 = k_d / \mu_m$ . При неполном проникновении субстрата в биоупленки приравниваются выражения (16) и (19), что дает связь между  $\bar{L}_f$  и  $\bar{S}_w$  в форме уравнения

$$(1 + \bar{L}_f)^2 \left( \sqrt{\frac{2\bar{S}_w}{\bar{\lambda}} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} - \frac{1}{\bar{\gamma}}} \right) = \frac{\psi_2}{3n_g}. \quad (20)$$

Если же биоупленка (биомасса) является целиком активной, то из равенства уравнений (15) и (19) следует уравнение только относительно толщины  $\bar{L}_f$

$$3n_g \bar{L}_f (1 + \bar{L}_f)^2 = \psi_2. \quad (21)$$

Найденная из (21) величина  $\bar{L}_f$  – минимально возможная в рассматриваемых условиях, поскольку при меньших ее значениях в отсутствие инертной биомассы невозможно обеспечить равенство (17). Вследствие малости  $\bar{L}_f$  ее минимальное значение  $\bar{L}_{min}$  примерно будет

$$\bar{L}_{min} \approx \frac{\psi_2}{3n_g}.$$

Субстрат срабатывается, главным образом, на верхнем участке загрузки, где биоупленки состоят из активной и инертной биомассы. Поэтому концентрация  $\bar{S}_w$  здесь, согласно (20), зависит от  $\bar{L}_f$  таким образом:

$$\bar{S}_w(\bar{L}_f) = \frac{\psi_1 \psi_2 (1 + \bar{L}_f)^3 - 1}{6 (1 + \bar{L}_f)^2} \times \left[ \frac{\psi_2}{3(1 + \bar{L}_f)^2} + \frac{2}{\bar{\gamma}} \right]. \quad (22)$$

Кроме уравнения (17), блок биофильтрации также включает уравнение массопереноса субстрата в пределах загрузки, которое вследствие несущественности диффузионного механизма, стационарности процесса имеет простой вид

$$V_0 \frac{dS_w}{dz} = -I. \quad (23)$$

Координата  $z$  меняется от 0 во входном сечении до  $L_m$  в выходном, так что при заданной исходной концентрации субстрата  $S_0$  имеет место условие

$$z = 0, \quad S_w = S_0. \quad (24)$$

Применительно к верхней части фильтра (нисходящее фильтрование), содержащей наряду с активной и инертную биомассу, уравнение (23) трансформируется

$$\frac{d\bar{S}_w}{d\bar{z}} = \frac{d\bar{S}_w}{d\bar{L}_f} \frac{d\bar{L}_f}{d\bar{z}} = -\psi_2 \psi_3 \bar{\lambda}, \quad (25)$$

где  $\bar{z} = z/L_m$ ,  $\psi_3 = DL_m/(V_0 L_0^2)$ . После дифференцирования (22) с целью определения  $d\bar{S}_w/(d\bar{L}_f)$  уравнение массопереноса принимает окончательный вид

$$\frac{P(\bar{L}_f)}{6n_g \psi_3} \frac{d\bar{L}_f}{d\bar{z}} = 1 - (1 + \bar{L}_f)^3 \quad (26)$$

и должно решаться при условии

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{L}_f = \bar{L}_{f0}. \quad (27)$$

Здесь

$$P(\bar{L}_f) = \frac{2}{\bar{\gamma}} + \frac{4}{\bar{\gamma}(1 + \bar{L}_f)^3} - \frac{\psi_2}{3n_g(1 + \bar{L}_f)^2} + \frac{4\psi_2}{3n_g(1 + \bar{L}_f)^5}.$$

Толщину биопленки на входе в загрузку  $\bar{L}_{f0}$  следует определять из уравнения (22), предварительно положив в нем  $\bar{S}_w$  равным 0. Таким образом, для искомой  $\bar{L}_{f0}$  получено уравнение

$$\frac{(1 + \bar{L}_{f0})^2}{(1 + \bar{L}_{f0})^3 - 1} - \frac{\psi_1 \psi_2^2}{18n_g(1 + \bar{L}_{f0})^2} - \frac{\psi_1 \psi_2}{3\bar{\gamma}} = 0. \quad (28)$$

Интегрирование (26) при (27) с учетом (28) дает распределение относительно толщины биопленки по высоте в форме

$$\bar{z} = \frac{1}{6n_g\psi_3} \int_{\bar{L}_f}^{\bar{L}_{f0}} \frac{P(\xi)d\xi}{(1 + \xi)^3 - 1}. \quad (29)$$

Толщины биопленки и слоя инертной биомассы уменьшаются с увеличением  $\bar{z}$ , причем  $\bar{L}_*$  быстрее, чем  $\bar{L}_f$ , и существует некоторая глубина  $\bar{z}_{min}$ , на которой  $\bar{L}_*$  обращается в 0, а  $\bar{L}_f$  становится равной  $\bar{L}_{min}$ . Значение  $\bar{L}_{min}$  вычисляется из уравнения (21). При  $\bar{z} > \bar{z}_{min}$  равенство (17) может соблюдаться только, если  $\bar{L}_f = \bar{L}_{min}$  и, следовательно, в рамках данной модели

$$\bar{I} = \bar{I}_{min} = \psi_1 \psi_2 n_g [(1 + \bar{L}_{min})^3 - 1]. \quad (30)$$

Тогда уравнение массопереноса (23) приобретает вид

$$\frac{d\bar{S}_w}{d\bar{z}} = -\psi_3 \bar{I}_{min} \quad (31)$$

и решается при условии

$$\bar{z} = \bar{z}_{min}, \quad \bar{S}_w = \bar{S}_{wm}. \quad (32)$$

Значения  $\bar{z}_{min}$ ,  $\bar{S}_{wm}$  устанавливаются при известной  $\bar{L}_{min}$  из (22), (29), полагая при этом в них  $\bar{L}_f = \bar{L}_{min}$ . В итоге сработка субстрата в нижней части загрузки ( $\bar{z} > \bar{z}_{min}$ ) опишется линейной зависимостью

$$\bar{S}_w = \bar{S}_{wm} - \psi_3 \bar{I}_{min} (\bar{z} - \bar{z}_{min}). \quad (33)$$

Из (33) легко найти относительную глубину  $\bar{z}_0$ , на которой субстрат будет полностью использован микроорганизмами ( $S_w = 0$ ):

$$\bar{z}_0 = \bar{z}_{min} + \frac{\bar{S}_{wm}}{\psi_3 \bar{I}_{min}}. \quad (34)$$

Ниже уровня  $\bar{z}_0$  субстрат, а значит, и активная биомасса отсутствуют.

Биопленки в пористых средах обычно оказывают весьма существенное сопротивление течению жидкости [19 – 21], так что потери напора в биореакторе-фильтре могут быть значительными. Рассчитываются они на основе уравнения движения

$$V_0 = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (35)$$

при граничном условии

$$z = L_m, \quad h = H_d, \quad (36)$$

заданной эмпирической зависимости коэффициента фильтрации  $k$  от концентрации  $B$

$$k = k_0 \cdot f(B), \quad (37)$$

где  $h$  – напор,  $H_d$  – напор на выходе из фильтра,  $k_0$  – коэффициент фильтрации чистой загрузки. Интегрирование уравнения (35) при условии (36) и (37) дает для относительных потерь напора в загрузке общее представление

$$\Delta \bar{h} = \frac{\Delta h}{H_u - H_d} = \int_0^1 \frac{d\bar{z}}{f(\bar{B}(\bar{L}_f(\bar{z})))} \quad (38)$$

Для конкретных расчетов его необходимо трансформировать, переходя к новой переменной интегрирования ( $\bar{L}_f$ ) и учитывая ее изменение по высоте. Принимая во внимание вытекающее из (26) выражение

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{L}_f} = \frac{P(\bar{L}_f)}{6n_g\psi_3 [1 - (1 + \bar{L}_f)^3]}, \quad (39)$$

а также фактическое существование в загрузке трех участков, а именно верхнего с  $\bar{L}_f(\bar{z})$  (при  $0 \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{min}$ ), среднего с  $\bar{L}_f = \bar{L}_{min}$  (при  $\bar{z}_{min} < \bar{z} \leq \bar{z}_0$ ), и нижнего с  $\bar{L}_f = 0$  (при  $\bar{z}_0 < \bar{z} \leq 1$ ), расчетная формула при реализации первого подхода приобретает вид

$$\Delta \bar{h} = \frac{1}{6n_g\psi_3} \int_{\bar{L}_{min}}^{\bar{L}_{f0}} \frac{P(\bar{L}_f)d\bar{L}_f}{[(1 + \bar{L}_f)^3 - 1] \cdot f(\bar{B}(\bar{L}_{min}))} + \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_{min}}{f(\bar{B}(\bar{L}_{min}))} + 1 - \bar{z}_0. \quad (40)$$

Наконец, конкретизируется форма зависимости (37) и в соответствии с [2, 22] выбирается степенная форма

$$k = k_0 \left(1 - \frac{B}{n_0 \rho_B}\right)^{m_1} \quad (41)$$

или в относительных величинах с учетом (18)

$$\bar{k} = \frac{k}{k_0} = f(\bar{B}(\bar{L}_f)) = \left[ 1 + \frac{n_g}{n_0} - \frac{n_g}{n_0} (1 + \bar{L}_f)^3 \right]^{m_1}. \quad (42)$$

Подстановка выражения (42) в (40) и дает окончательный вид расчетной формулы для потерь  $\Delta \bar{h}$ .

#### 4. ВТОРОЙ ПОДХОД

Обычно коэффициент  $\mu_m$  существенно превосходит  $k_d$ , что создает предпосылки для накопления большого количества биомассы. Тогда значения  $\bar{L}_{f0}$ , формально вычисленные из уравнения (28), оказываются нефизичными (соответствующие им объемы биомассы превосходят исходный объем порового пространства). В действительности, прогрессирующие снижение прочности растущих биопленок и увеличение скорости течения обуславливают быстрое нарастание потерь закрепленной биомассы и, как показывает накопленный опыт эксплуатации биореакторов-фильтров, существует некоторый предельный уровень  $B_{max}$ , который концентрация  $B$  превысить не в состоянии. Вообще же  $B_{max}$  зависит от физических свойств биопленки, скорости, а находить ее при отсутствии надежной информации о связи между  $k_d$  и  $L_f$  целесообразно экспериментальным путем. И здесь оправдано по аналогии с гряземкостью загрузки при осветлении суспензии фильтрованием [23, 24] ввести биоёмкость  $a_B n_0$ , где эмпирический коэффициент  $a_B$  заметно меньше единицы и показывает, какую долю чистого порового пространства может в конце концов занять биомасса. Таким образом, концентрация биомассы должна удовлетворять условию

$$\frac{B}{\rho_B} \leq a_B n_0,$$

а ее предельное значение тогда будет

$$B_{max} = \rho_B a_B n_0. \quad (43)$$

Согласно уравнению (18), значению  $\bar{B}_{max}$  отвечает предельная толщина  $\bar{L}_{max}$ , которую следует вычислять по формуле

$$\bar{L}_{max} = \left( a_B \frac{n_0}{n_g} + 1 \right)^{1/3} - 1. \quad (44)$$

При высокой исходной концентрации субстрата  $L_{max}$  можно трактовать как эквивалентную толщину биопленки.

Участок загрузки, где  $\bar{L}_f = \bar{L}_{max}$ , в зависимости от величины  $S_0$  может или охватывать лишь верхнюю ее часть, или распространиться вниз вплоть до выходного сечения. Для него ввиду неизменности  $L_f$  характерно постоянство величины

$$\bar{I} = \bar{I}_{max} = \psi_1 \psi_2 n_g [(1 + \bar{L}_{max})^3 - 1]. \quad (45)$$

Уравнение же массопереноса (31), в котором необходимо  $\bar{I}_{min}$  заменить на  $\bar{I}_{max}$ , теперь решается при условии (24) в безразмерной форме

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{S}_w = 1. \quad (46)$$

Тогда концентрация  $\bar{S}_w$  снижается с глубиной линейным образом, а именно,

$$\bar{S}_w = 1 - \psi_3 \bar{I}_{max} \bar{z}. \quad (47)$$

При таком подходе уже нет практической необходимости в определении толщины слоя инертной биомассы, который, кстати, при высокой концентрации  $S_0$  может вообще отсутствовать. Для анализа структуры биопленок следует использовать формулу (7). Однако модель биопленки требуется, чтобы установить минимальное значение  $\bar{S}_m$  концентрации  $\bar{S}_w$  на участке загрузки с предельной биомассой. Для этого привлекается формула (22), в которой  $\bar{L}_f$  полагается равной  $\bar{L}_{max}$ . Соответствующая  $\bar{S}_m$  глубина  $\bar{z}_m$  в соответствии (39) будет

$$\bar{z}_m = \frac{1 - \bar{S}_m}{\psi_3 \bar{I}_{max}}. \quad (48)$$

Ниже глубины  $\bar{z}_m$  распределение толщины  $\bar{L}_f$  по вертикали на базе модели биопленки описывается зависимостью

$$\bar{z} = \bar{z}_m + \frac{1}{6n_g \psi_3} \int_{\bar{L}_f}^{L_{max}} \frac{P(\xi) d\xi}{(1 + \xi)^3 - 1}. \quad (49)$$

При этом содержание субстрата в воде в промежутке  $\bar{z}_m \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{min}$  будет снижаться от  $\bar{S}_m$  до  $\bar{S}_{wm}$  в соответствии с (22). Наконец, следует значение  $\bar{L}_{min}$  находить из уравнения (21), а  $\bar{S}_w(\bar{z})$  вплоть до глубины  $\bar{z}_0$  – по формуле (33).

Формула для расчета относительных потерь напора в загрузке при применении данного подхода вытекает из общего представления (38) и с учетом особенностей поведения функции  $\bar{L}_f(\bar{z})$ , которая принимает постоянные значения на первом ( $0 \leq \bar{z} \leq \bar{z}_m$ ), третьем ( $\bar{z}_{min} \leq \bar{z} \leq \bar{z}_0$ ) участках и 0 – на четвертом ( $\bar{z}_0 < \bar{z} \leq 1$ ), будет

$$\Delta \bar{h} = \frac{\bar{z}_m}{f(\bar{L}_{max})} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{6n_g\psi_3} \int_{\bar{L}_{min}}^{\bar{L}_{max}} \frac{P(\bar{L}_f)d\bar{L}_f}{[(1 + \bar{L}_f)^3 - 1] \cdot f(\bar{L}_f)} + \quad (50) \\
 & + \frac{\bar{z}_0 - \bar{z}_{min}}{f(\bar{L}_{min})} + 1 - \bar{z}_0.
 \end{aligned}$$

Для расчетов примеров  $P(\bar{L}_f)$  и  $f(\bar{L}_f)$  принимаются согласно (29) и (42). Формула (50) упрощается, если последний из указанных выше участков отсутствует. В частности, при  $\bar{z}_0 \geq 1$  из (50) выпадает  $1 - \bar{z}_0$ , а в третьем слагаемом следует положить  $\bar{z}_0 = 1$ . При  $\bar{z}_{min} \geq 1$  будет

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{h} &= \frac{\bar{z}_m}{f(\bar{L}_{max})} + \\
 & + \frac{1}{6n_g\psi_3} \int_{\bar{L}_{fe}}^{\bar{L}_{max}} \frac{P(\bar{L}_f)d\bar{L}_f}{[(1 + \bar{L}_f)^3 - 1] \cdot f(\bar{L}_f)},
 \end{aligned}$$

где  $\bar{L}_{fe}$  вычисляется из зависимости (49) при  $\bar{z} = 1$ . Наконец, если  $\bar{z}_m \geq 1$ , то в выражении (50) сохраняется только первое слагаемое, причем  $\bar{z}_m$  здесь равно 1.

## 5. ТРЕТИЙ ПОДХОД

Наращение биомассы в биореакторах-фильтрах жестко ограничивается ее самоокислением (дыханием) для обеспечения жизненных функций энергией, выеданием простейшими животными, отрывом фрагментов биопленок за счет силового воздействия потока жидкости. Третий подход позволяет определять изменение характеристик биофильтрации и биопленки по высоте при любых значениях коэффициента  $\mu_m$  благодаря детальному учету в исходной математической модели всех трех вышеперечисленных процессов. Следовательно, отпадает необходимость в экспериментальном определении и использовании в расчетах параметров  $B_{max}$ ,  $L_{max}$ . Итак, предлагается рассматривать, по сути, интегральный коэффициент скорости отрыва фиксированной биомассы  $k_d$ , как следующую сумму [25 – 27]:

$$k_d = k_{dec} + k_{pr} + k_{det}.$$

Здесь все коэффициенты ( $k_{dec}$  характеризует дыхание,  $k_{pr}$  – выедание,  $k_{det}$  – отрыв) измеряются в час<sup>-1</sup>, но только  $k_{det}$  тесно связан с размерами биопленки и со скоростью течения. Поэтому оправданно считать коэффициенты  $k_{dec}$ ,  $k_{pr}$  постоянными. В то же время, коэффициент  $k_{det}$  является значимой функцией от толщины  $L_f$  и средней

скорости воды в порах  $u$ . А так как скорость  $u$  выражается через  $L_f$ :

$$u = \frac{\rho_B V_0}{\rho_B n_0 - B(L_f)}, \quad (51)$$

то в общем случае можно считать, что

$$k_d(L_f) = k_{dec} + k_{pr} + k_{det}(\bar{L}_f). \quad (52)$$

Очевидно, что по мере приближения величины  $B$  к значению  $\rho_B n_0$  толщина  $\bar{L}_f$  устремится к условному предельному значению  $\bar{L}_{lim}$ , при котором суммарный объем биопленок сравнивается с объемом исходного порового пространства. Кстати, оно вычисляется по формуле

$$\bar{L}_{lim} = \left( \frac{n_0}{n_g} + 1 \right)^{1/3} - 1. \quad (53)$$

Тогда  $u$ , согласно (51), неограниченно растет, так что имеются физические предпосылки для подобного же увеличения коэффициентов  $k_{det}$ ,  $k_d$ . Таким образом, функция  $k_{det}(L_f)$  контролирует фактическое содержание биомассы и размеры биопленок и при моделировании должна обеспечить изменение концентрации  $B$  и толщины  $L_f$  в реальных диапазонах. Поэтому большое значение приобретает выбор этой функции. Существующие модели отрыва закрепленной биомассы, как показал их анализ, не позволяют подобрать такую  $k_{det}(L_f)$  и вместе с ней  $k_d(L_f)$ , которые бы достоверно отразили характер этого процесса с приближением  $L_f$  к  $L_{lim}$ . Поэтому ниже будут выполнены лишь фактически некоторые оценочные расчеты, опираясь на гипотетическую модель отрыва, вид которой подсказан наиболее подходящими для таких целей известными моделями. Для построения расчетных зависимостей функция  $k_d(L_f)$  представляется в виде [28]

$$k_d = k_{d0} \cdot \varphi(\bar{L}_f), \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned}
 \varphi(\bar{L}_f) &= \bar{k}_{dec} + \bar{k}_{pr} + \bar{k}_{det}^0 \theta(L_f), \\
 \bar{k}_{dec} &= k_{dec}/k_{d0}, \quad \bar{k}_{pr} = k_{pr}/k_{d0}, \\
 \bar{k}_{det}^0 &= k_{det}^0/k_{d0}, \quad k_{d0} = k_{dec} + k_{pr} + k_{det}^0.
 \end{aligned}$$

Тогда выражение для  $\bar{I}$  принимает вид

$$\bar{I} = \psi_1 \psi_2 n_g \varphi(\bar{L}_f) [(1 + \bar{L}_f)^3 - 1], \quad (55)$$

причем в представлении для  $\psi_2$  следует  $k_d$  заменить на  $k_{d0}$ .

Теперь, чтобы не дублировать громоздкие формализмы при реализации третьего подхода с  $k_d =$

$= k_d(\bar{L}_f)$ , пропонується воспользуватися залежностями, виведеними для випадку  $k_d = \text{const}$  (перший підхід), замінивши в них  $\psi_2$  на  $\psi_{20} \cdot \varphi(\bar{L}_f)$ , де  $\psi_{20} = k_{d0}/\mu_m$ . Таким чином, відносну товщину біоплівки на вході в загрузку слід визначати з рівняння (28), в якому замість  $\psi_2$  береться  $\psi_{20}\varphi(\bar{L}_f)$ . Розподіл же  $\bar{L}_f$  по висоті загрузку знаходиться з допомогою рівняння (29), в якому

$$P(\xi) = \frac{2}{\gamma} + \frac{4}{\gamma(1 + \bar{L}_f)^3} - \frac{\psi_{20}\varphi(\bar{L}_f)}{3n_g(1 + \bar{L}_f)^2} + \frac{4\psi_{20}\varphi(\bar{L}_f)}{3n_g(1 + \bar{L}_f)^5} + \frac{\psi_{20} [4 - (1 + \bar{L}_f)^3]}{3n_g(1 + \bar{L}_f)^5} \frac{d\varphi}{d\bar{L}_f}. \quad (56)$$

Мінімальна відносна товщина біоплівки визначається з аналога рівняння (21)

$$3n_g\bar{L}_{min}(1 + \bar{L}_{min})^2 - \psi_{20}\varphi(\bar{L}_{min}) = 0. \quad (57)$$

Процедура розрахунку зміни концентрації  $\bar{S}_w$  на нижній частині загрузку залишається такою ж, як і при першому підході, але з урахуванням заміни  $\psi_2$  на  $\psi_{20}\varphi(\bar{L}_{min})$ . Отже, послідовно визначаються  $\bar{z}_{min}$  за залежністю (29) при  $\bar{L}_f = \bar{L}_{min}$ ,  $\bar{I}_{min}$  – по (30),  $\bar{S}_{wm}$  – по (22), і на кінець шукана  $\bar{S}_w(\bar{z})$  в межах від  $\bar{z}_{min}$  до  $\bar{z}_0$  – по формулі (33). При цьому глибина  $\bar{z}_0$ , на якій вичерпується субстрат, визначається за формулою (34). Нарешті, втрати  $\Delta\bar{h}$  пропонується знаходити за формулою (40), де  $P(\bar{L}_f)$  має вигляд (56).

Застосування двох основних підходів до моделювання біофільтрації з описаних вище трьох в характерних для нього умовах ілюструється рядом прикладів. Предметом розрахунків стали відносні характеристики біоплівки (товщини її і шару інертної біомаси), біофільтрації (концентрація субстрату, функція його витрати, втрати напора в об'ємі загрузку). Значення початкових параметрів були вибрані після аналізу обширної літератури, що містить результати математичного моделювання і експериментальних досліджень дійства біопленок в пористих середовищах, наприклад [29 – 32], і більшість з них зафіксовані, а саме:  $\mu_m = 0.2 \text{ год}^{-1}$ ,  $\rho_B = 10^5 \text{ гХПК/м}^3$ ,  $Y = 0.5$ ,  $D = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{год}$ ,  $L_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $\gamma = 25 \text{ м/год}$ ,  $L_m = 1 \text{ м}$ ,  $V_0 = 5 \text{ м/год}$ . Решта параметрів в окремих прикладах варіювалися в досить широких межах. Так, початкова концентрація субстрату змінювалася від 25 до 100 гХПК/м<sup>3</sup>,  $a_B$  – від 0.3 до 0.7. Коефіцієнт  $\bar{k}_d$  при використанні другого підходу мав єдине значення ( $0.0075 \text{ год}^{-1}$ ), а в сумі третього підходу приймався в вигляді спеціальної функції від  $\bar{L}_f$ .

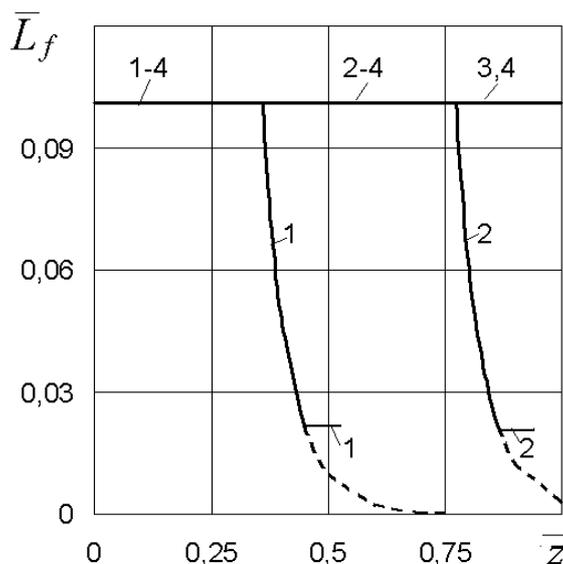


Рис. 1. Зміна відносної товщини біоплівки по висоті загрузку:  
1 –  $S_0 = 25$ ; 2 –  $S_0 = 50$ ;  
3 –  $S_0 = 75$ ; 4 –  $S_0 = 100$ ; - - - по формулі (19)

В першу чергу були виконані розрахунки товщин, концентрацій, втрат при прийнятті гіпотези про існування в пористій середі граничного рівня заповнення її вільного простору біомасою (другий підхід). Багаточисленні розрахунки проводилися переважно при звичайному для параметра грязеемкості значенні  $a_B = 0.5$ . Початкова концентрація  $S_0$  змінювалася дискретно (25, 50, 75, 100). На рис. 1 наведені дані про відносну товщину біоплівки, отримані для нижньої частини загрузку з допомогою формули (49). Для її верхньої частини ( $0 \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{min}$ ) значення  $\bar{I}_{max}$  визначено за формулою (44) і дорівнює 0.1006. При більших значеннях біоплівки мають однакову, максимальну товщину по всій висоті загрузку. Різке ж зменшення  $\bar{L}_f$  відзначається при менших  $S_0$ , причому величина  $S_0$  суттєво впливає на глибину  $\bar{z}_m$ , яка при  $S_0$ , рівній 25 і 50, мала значення 0.359 і 0.774 відповідно. Зазначене зменшення товщини  $\bar{L}_f$  відбувається в шарі  $[\bar{z}_m, \bar{z}_{min}]$ , нижче якого вона залишається, згідно (21), постійною і рівною 0.02 до глибини  $\bar{z}_0$ , де субстрат закінчується. Якщо ж не вимагати дотримання рівності (17) і продовжити розрахунки при  $\bar{z} > \bar{z}_{min}$  по формулі (49), то величина  $\bar{L}_f$  на виході з загрузку, як показано на рис. 1 пунктирними лініями, стане зникаючою малою при  $S_0 = 25$ , або ж буде значимо малою (0.003) при  $S_0 = 50$ .

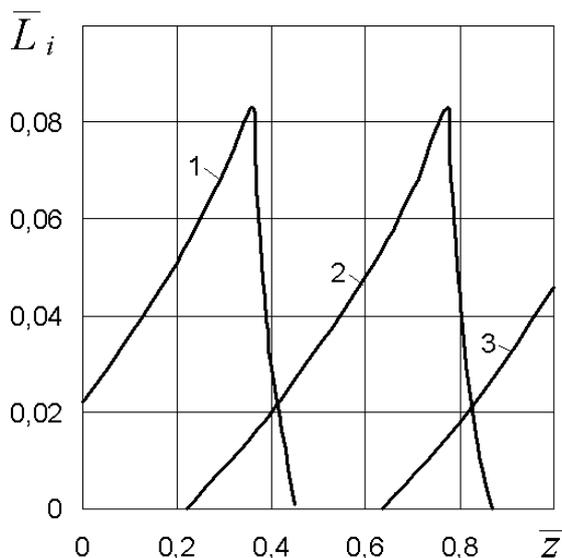


Рис. 2. Изменение относительной толщины слоя инертной биомассы по высоте загрузки:  
1 –  $S_0 = 25$ ; 2 –  $S_0 = 50$ ; 3 –  $S_0 = 75$

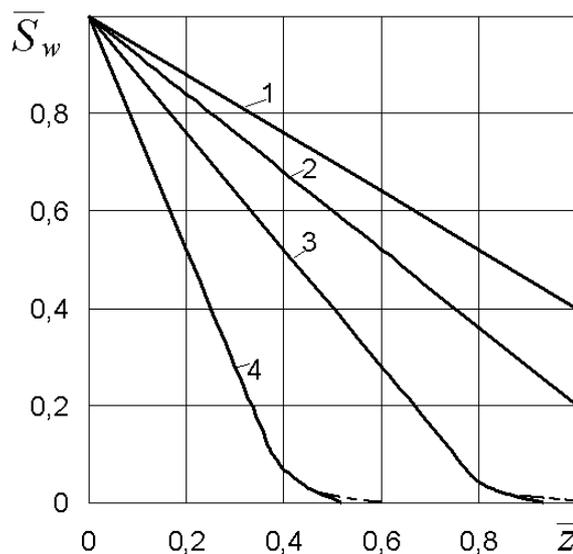


Рис. 3. Изменение относительной концентрации субстрата по высоте загрузки:  
1 –  $S_0 = 100$ ; 2 –  $S_0 = 75$ ;  
3 –  $S_0 = 50$ ; 4 –  $S_0 = 25$ ; - - - по форм. (22), (49)

Изменения в структуре биопленок в связи с разным их положением в загрузке иллюстрируются рис. 2. При наименьшем в примерах исходном содержании субстрата ( $S_0 = 25$ ) уже на входе в загрузку биопленки содержат инертную биомассу, причем ее количество растет с глубиной вплоть до отметки  $\bar{z}_m$ , а затем быстро убывает до 0 на глубине  $\bar{z}_{min}$  (кривая 1). При  $S_0 = 50$  в верхней части загрузки (до глубины 0.221) вся биомасса является активной, а ниже ситуация повторяется – рост  $\bar{L}_*$  до максимального значения 0.083 при  $\bar{z}_m = 0.774$  и падение до 0 при  $\bar{z}_{min} = 0.869$ . Еще большая исходная концентрация ( $S_0 = 75$ ) ведет к тому, что все биопленки до глубины  $\bar{z}_m = 0.636$  будут полностью обеспечены субстратом. Количество же инертной биомассы, начиная с этой глубины, будет расти до выходного сечения. Наконец, при  $S_0 = 100$  вся биомасса в загрузке оказывается активной и значит, везде  $\bar{L}_* = 0$ .

Кривые распределения концентрации  $S_w$  по высоте загрузки, рассчитанные при тех же исходных данных и представленные на рис. 3, имеют, главным образом, линейный характер, а основной расчетной формулой стала (47). При  $S_0$ , равной 25, 50, линейный участок кривых  $\bar{S}_w(\bar{z})$  заканчивается на глубине  $\bar{z}_m$ , где значения  $\bar{S}_w$  составили 0.138 и 0.067. Удаление остатка субстрата происходило в слое  $[\bar{z}_m, \bar{z}_0]$ , причем уменьшение  $\bar{S}_w$  с глубины  $\bar{z}_m$  до глубины  $\bar{z}_{min}$  определялось по формулам (22), (49), а между глубинами  $\bar{z}_{min}$  и  $\bar{z}_0$  –

по формуле (33) (кривые 3, 4). Штрихом показаны участки линий  $\bar{S}_w - \bar{z}$  на промежутках  $[\bar{z}_{min}, \bar{z}_0]$  без учета постоянства  $\bar{L}_f, \bar{I}$ , что, как видно из рис. 3, почти не отражается на общей картине снижения  $\bar{S}_w$  с глубиной и его выходном значении. В случаях  $S_0$ , равной 75 и 100, ввиду постоянства  $\bar{L}_f$  и  $\bar{I}$  функция  $\bar{S}_w(\bar{z})$  была линейной на всем интервале значений  $\bar{z}$ . При этом относительное выходное содержание субстрата оказалось большим (0.2 и 0.4 соответственно).

Последующие рисунки иллюстрируют поведение таких важных с точки зрения водоочистки и функционирования фильтра характеристик как относительные выходная концентрация субстрата  $\bar{S}_{we} = \bar{S}_w(1)$  и полные потери напора при изменении его исходной концентрации  $S_0$  от 0 до 100 гХПК/м<sup>3</sup>. В расчетах  $\bar{S}_{we}$  последовательно варьировались модельные параметры  $a_B$  (рис. 4) и  $k_d$  (рис. 5). Малость максимальной емкости для биомассы ( $a_B = 0.3$ ) обусловила появление субстрата на выходе из загрузки уже при  $S_0 > 35$  (кривая 1 на рис. 4). Если же  $a_B$  равен 0.5 и 0.7, то фильтр не в состоянии обеспечить удаление всего субстрата из загрязненных им вод только при  $S_0 > 60$  и  $S_0 > 80$  соответственно. Дальнейший рост  $S_0$  в рассмотренных примерах ведет к ускоренному нарастанию  $\bar{S}_{we}$ , а значит к резкому ухудшению качества фильтрата. Аналогичную форму имеют и кривые  $\bar{S}_{we}(S_0)$  при разных значениях  $k_d$

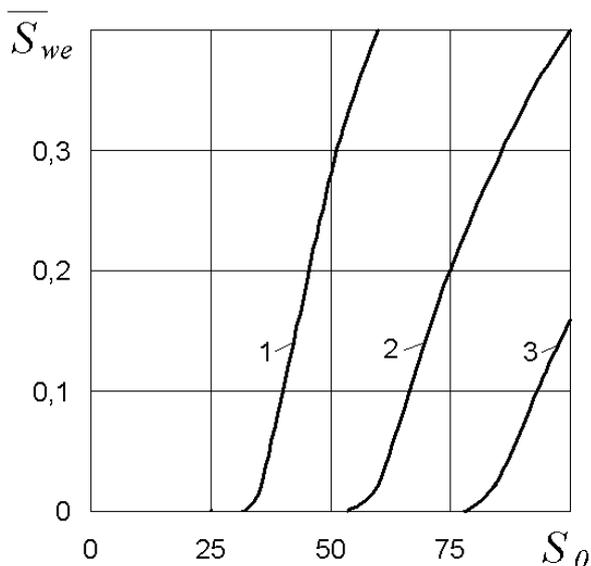


Рис. 4. Графики зависимости  $\bar{S}_{we}(S_0)$ :  
 1 –  $a_B = 0.3$ ; 2 –  $a_B = 0.5$ ; 3 –  $a_B = 0.7$

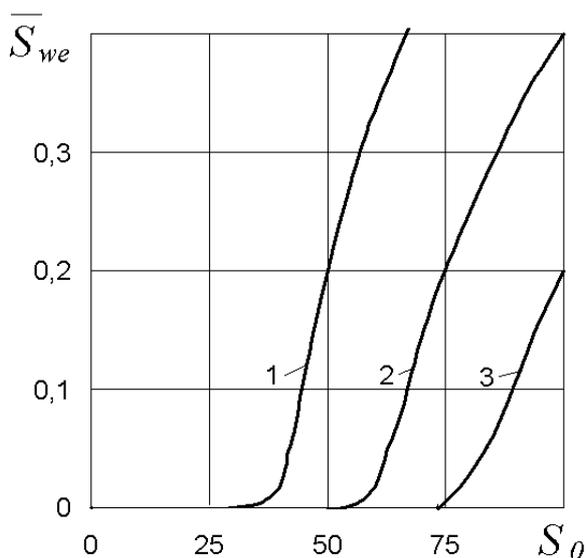


Рис. 5. Графики зависимости  $\bar{S}_{we}(S_0)$ :  
 1 –  $k_d = 0.005$ ; 2 –  $k_d = 0.0075$ ; 3 –  $k_d = 0.01 \text{ час}^{-1}$

(рис. 5). Увеличение  $k_d$  означает, что субстрат при одной и той же биомассе ( $a_B = 0.5$ ) и равновесном состоянии биомассы будет срабатываться быстрее. Примерные минимальные значения  $S_0$ , из-за превышения которых концентрация  $\bar{S}_w$  становится значимой, составили 35 при  $\bar{k}_d = 0.005$ ; 53.5 – при  $\bar{k}_d = 0.0075$ ; 73.5 – при  $\bar{k}_d = 0.01$ . В целом рис. 4, 5 свидетельствуют о высокой чувствительности результатов водоочистки к коэффици-

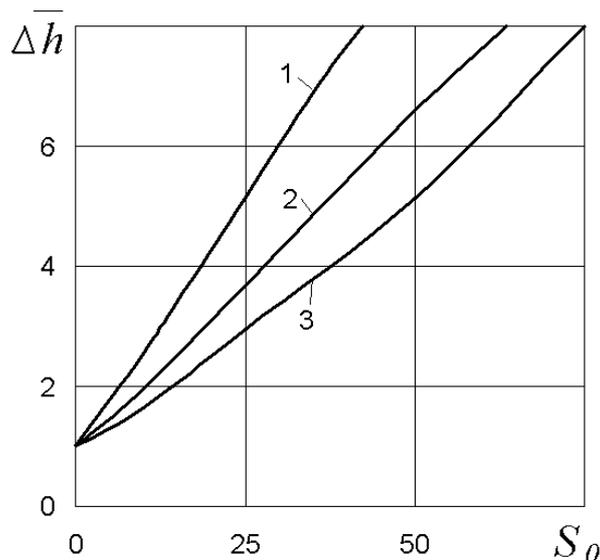


Рис. 6. Графики зависимости  $\Delta \bar{h}(S_0)$ :  
 1 –  $k_d = 0.005$ ; 2 –  $k_d = 0.0075$ ; 3 –  $k_d = 0.01 \text{ час}^{-1}$

ентам  $a_B, \bar{k}_d$ .

Наконец, по формуле (50) при тех же значениях  $a_B, \bar{k}_d$ , интервале для  $S_0$  и  $m_1 = 3$  [33] рассчитывались потери напора. Соответствующие кривые  $\Delta \bar{h}(S_0)$  изображены на рис. 6 и демонстрируют значительный рост величины  $\Delta \bar{h}$  как с увеличением  $S_0$ , так и с уменьшением  $\bar{k}_d$ . Действительно, усиленная убыль биомассы, способствуя улучшению фильтрационных условий, обуславливает ощутимое сокращение потерь напора в загрузке.

Ключевую роль во втором подходе играет параметр биоемкости  $a_B$ , который можно находить разными способами. Надежным является непосредственное измерение максимальной концентрации биомассы  $B_{max}$  и затем вычисление  $a_B$  с помощью (43). Следует заметить, что коэффициент  $a_B$  не есть обобщенная константа, поскольку с увеличением скорости  $u$  он должен уменьшаться. Более физически обоснованным представляется его установление в ходе расчетов динамики биомассы с углубленным учетом закономерностей ее отрыва. И здесь необходимо иметь детальную информацию о связи коэффициента  $k_d$  со скоростью  $u$  и концентрацией  $B$  так, чтобы в конечном итоге удалось построить зависимость  $k_d = k_d(\bar{L}_f)$ . Для примеров, согласно [2, 22], выбрана степенная форма зависимости  $k_{det}$  от текущей пористости  $n$ :

$$k_{det} = n(\bar{L}_f)^{-m_2}. \tag{58}$$

Исходя из (58) и опорного значения  $k_d(0.05) = 0.0075 \text{ час}^{-1}$  при  $k_{dec} + k_{pr} = 0.0035 \text{ час}^{-1}$  оконча-

тельно принято

$$k_{det}(\bar{L}_f) = 0.004 \cdot 0.305^{m_2} [1 - n_g(1 + L_f)^3]^{-m_2}.$$

Значения остальных модельных параметров ( $\mu_m$ ,  $\rho_B$ ,  $n_0$ ,  $Y$ ,  $D_s$ ,  $L_0$ ,  $\gamma$ ,  $L_m$ ,  $V_0$ ) остались прежними. Результаты расчетов толщины  $\bar{L}_f$  и концентрации  $\bar{S}_w$  при  $m_2 = 2, 3$ ,  $S_0 = 25, 100$ , даны на рис. 7, 8. Их быстрое уменьшение с глубиной объясняется высокой интенсивностью комплексного процесса переработки субстрата микроорганизмами, которая контролируется величиной  $k_d$ . Поэтому субстрат устраняется главным образом в верхней части загрузки, где  $k_d$  имеет большие значения. При этом он частично разлагается, а частично трансформируется в микробиальную массу. Одновременно существенная часть биомассы, соразмерная с ее приростом, отрывается и обуславливает уже вторичное (биологическое) загрязнение, которое требует отдельного серьезного рассмотрения. В рамках принятой модели биофильтрации величина  $\bar{L}_f$  стабилизируется на глубине  $\bar{z} = \bar{z}_{min}$  и остается постоянной до глубины  $\bar{z}_0$ , ниже которой нет условий для жизнедеятельности микроорганизмов вследствие истощения субстрата. В частности, при  $S_0 = 100$ ,  $m_2 = 2$  получены значения  $\bar{z}_{min} = 0.383$ ,  $\bar{L}_{min} = 0.0168$ ,  $z_0 = 0.393$ . Кстати, выраженная неравномерность в распределении биомассы по высоте загрузки обуславливает значительные потери напора в ней. В последнем примере их относительная величина даже при  $m_1 = 2$  превышает 4.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Легкоразлагаемые органические вещества (субстрат) эффективно удаляются при доочистке сточных вод путем фильтрования через зернистую загрузку (биофильтрация). С течением времени в ней образуется система биопленок (биомасса), которые прочно закреплены на зернах пористой среды. Непосредственно утилизация субстрата происходит внутри биопленок и обеспечивается его переносом за счет молекулярной диффузии. Рост биомассы в конце концов оказывается сбалансированным с ее убылью вследствие процессов самоокисления, отрыва и выедания простейшими. В первом приближении оправдано считать, что скорость роста биомассы не лимитируется содержанием субстрата. Принятие подобного допущения позволяет выполнять углубленные теоретические исследования биофильтрации, которое обнаруживает высокую чувствительность к параметрам, характеризующим динамику биомассы. Указанные

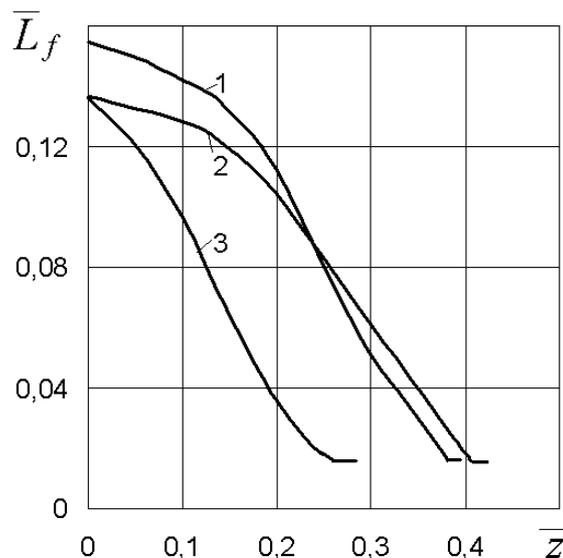


Рис. 7. Изменение относительной толщины биопленки по высоте загрузки:  
1, 2 -  $S_0 = 100$ , 3 -  $S_0 = 25$ ;  
1, 3 -  $m_2 = 2$ , 2 -  $m_2 = 3$

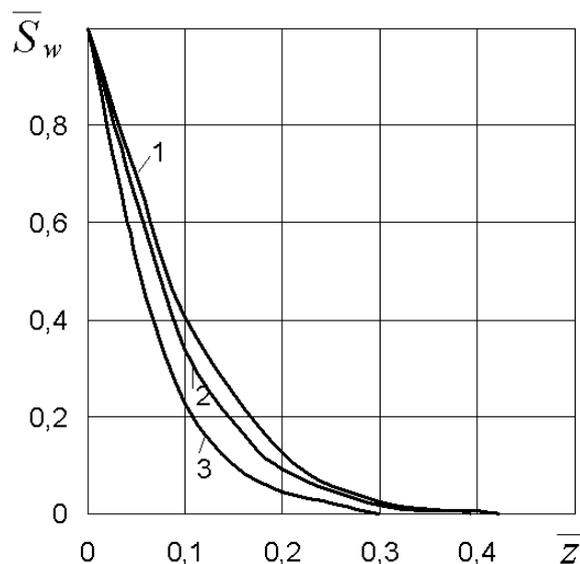


Рис. 8. Изменение относительной концентрации субстрата по высоте загрузки:  
1, 2 -  $S_0 = 100$ , 3 -  $S_0 = 25$ ;  
1 -  $m_2 = 3$ , 2, 3 -  $m_2 = 2$

параметры могут изменяться в широких пределах, что предопределило реализацию трех подходов к формальному описанию комплексного процесса биологической очистки воды. Наиболее перспективными в практическом отношении являются второй и третий подходы, отражающие осо-

бенности накопления и осветлительного действия большого количества биомассы. В частности, предложены на основе известных моделей ее отрыва формализация данного процесса и способ ее учета при определении характеристик биофильтрации. В целом данные многочисленных расчетов на базе второго и третьего подходов носят иллюстративный характер ввиду большого количества модельных параметров и их высокой вариабельности. Тем не менее, они свидетельствуют о полезности разработанного расчетного инструмента при изучении закономерностей биофильтрации, обосновании рациональных технологических и конструктивных параметров, оценке точности приближенных решений более сложных задач. Результаты теоретического анализа указывают на возможность формирования в ходе биофильтрации сильного вторичного загрязнения. В связи с этим представляется целесообразной организация специальных экспериментов с целью надежного нахождения коэффициента скорости отрыва биопленки в зависимости от скорости течения жидкости, концентрации биомассы (толщины биопленки). В отсутствие же достоверной информации о влиянии потока жидкости на биомассу предпочтительнее второй подход, при котором оправданно применение усредненных (эффективных) значений параметров и, в частности, параметра биомассы, определяемого эмпирическим путем.

1. *Elenter D., Milferstedt K., Zhang W., Hausner M., Morgenroth E.* Influence of detachment on substrate removal and microbial ecology in a heterotrophic/autotrophic biofilm // *Water Res.*– 2007.– 41.– P. 4657–4671.
2. *Liu Y., Tay J.-H.* The essential role of hydrodynamic shear force in the formation of biofilm and granular sludge // *Water Res.*– 2002.– 36.– P. 1635–1665.
3. *Rittmann B.E.* The effect of shear stress on biofilm loss rate // *Biotechnol. and Bioeng.*– 1982.– 24.– P. 501–506.
4. *Morgenroth E., Wilderer P.A.* Influence of detachment mechanisms on competition in biofilms // *Water Res.*– 2000.– 34, N 2.– P. 417–426.
5. *Speitel G.E., DiGiano F.A.* Biofilm shearing under dynamic conditions // *J. Environ. Eng. ASCE.*– 1987.– 113.– P. 464–475.
6. *Mason C.A., Hamer G.* Cryptic growth in *Klebsiella pneumoniae* // *Appl. Microbiol. Biotech.*– 1987.– 25.– P. 577–584.
7. *Rittmann B.E., Brunner C.W.* The nonsteady-state biofilm process for advanced organic removal // *J. Water Pollut. Control. Fed.*– 1984.– 56(7).– P. 874–880.
8. *Jih C.-G., Huang J.-S.* Effect of biofilm thickness distribution on substrate-inhibited kinetics // *Water Res.*– 1994.– 28, N 4.– P. 967–973.
9. *Kissel J.C., McCarty P.L., Street R.L.* Numerical simulation of mixed-culture biofilm // *J. Env. Engin.*– 1984.– 110, N 2.– P. 393–412.
10. *Rittmann B.E., McCarty P.L.* Model of steady-state biofilm kinetics // *Biotechnol. Bioengng.*– 1980.– 22.– P. 2343–2357.
11. *Harremoes P.* Biofilm kinetics. In *Water Pollution Microbiology.* Mitchell(ed). // Wiley, N Y. – 1978.– V.2.– P. 71–109.
12. *Rauch W., Vanhocren H., Vanrolleghem P.A.* A simplified mixed-culture biofilm model // *Water Res.*– 1999.– 33, N 9.– P. 2148–2162.
13. *Choy K.K.H., Ko D.C.K., Cheung C.W., Porter J.F., McKay G.* Film and intraparticle mass transfer during the adsorption of metal ions onto bone char // *J. Colloid. Interface Sci.*– 2004.– 271.– P. 284–295.
14. *Hamdi M.* Biofilm thickness effect on the diffusion limitation in the bioprocess reaction: biofloc critical diameter significance // *Bioprocess. Eng.*– 1995.– 12.– P. 193.
15. *Jarvie M.E., Hand D.W., Bhuvendralingam S., Crittenden J.C., Hokanson D.R.* Simulating the performance of fixed-bed granular activated carbon adsorbers: removal of synthetic organic chemicals in the presence of background organic matter // *Water Res.*– 2005.– 39.– P. 2407–2421.
16. *Deviny J.S., Ramesh J.* A phenomenological review of biofilter models. Review // *Chem. Eng. Sci.*– 2005.– 113.– P. 187–196.
17. *Perez J., Picioreanu C., Van Loosdrecht M.* Modeling biofilm and floc diffusion processes based on analytical solution of reaction-diffusion equations // *Water Res.*– 2005.– 39.– P. 1311–1323.
18. *Rittmann B.E., Stilwell D.* Моделирование биологических процессов в обработке питьевой воды: интегральная модель биофильтрации // *Вода и экология.*– 2002.– N 3.– P. 13–29.
19. *Героль Н.Н., Журба М.Г., Семчук Г.М., Якимчук Б.Н.* Доочистка сточных вод на зернистых фильтрах.– Ровно: Специальное издание СПООО “Типографія, Левобережна”, 1998.– 92 с.
20. *Bielefeldt A.R., Illangasekare T., Uttecht M., LaPlante R.* Biodegradation of propylene glycol sand and associated hydrodynamic effects in sand // *Water Res.*– 2002.– 36.– P. 1707–1714.
21. *Taylor S.W., Jaffe P.R.* Biofilm growth and the related changes in the physical properties of a porous media. 1. Experimental investigation // *Water. Resour. Res.*– 1990.– 26, N 9.– P. 2153–2159.
22. *Bancole A., Brissaud F., Gagne T.* Oxidation processes and clogging in intermittent unsaturated infiltration // *Water Sci. Tech.*– 2003.– 48, N 11–12.– P. 139–148.
23. *Алексеев В.С., Коммунар Г.М., Шержуков Б.С.* Массоперенос в водонасыщенных горных породах. Серия: Гидрогеология, инженерная геология.– Т.11. – М.: ВИНТИ, 1989.– 143 с.
24. *Поляков В.Л.* Фильтрация суспензии с переменным содержанием взвеси через однородную загрузку при нелинейной кинетике массообмена // *Доп. НАН України.*– 2009.– N 12.– С. 61–68.
25. *Laurent P., Prevost M., Cigana J., Niquette P., Servais P.* Biodegradable organic matter removal in biological filter evaluation of CHABROL model // *Water Res.*– 1999.– 33, N 6.– P. 1387–1398.
26. *Lishman L.A., Murphy K.L.* The significance of hydrolysis in microbial death and decay // *Water Res.*– 1994.– 28, N 11.– P. 2417–2419.
27. *Low E.W., Chase H.A.* Reducing production of excess biomass during wastewater treatment // *Water Res.*– 1999.– 33, N 5.– P. 1119–1132.

28. *Cunningham A.B., Characklis W.G., Abedeen F., Crawford D.* Influence of biofilm accumulation on porous media hydrodynamics // *Environ.Sci.Tech.*– 1991.– 25.– P. 1305–1311.
29. *Олейник А.Я., Василенко Т.В., Рыбаченко С.А., Хамад Ихаб Ахмад.* Моделирование процессов доочистки хозяйственно-бытовых сточных вод на фильтрах // *Проблемы водопостачання, водовідведення та гідраліки.* - Київ: КНУБА.– 2006.– Вип.7.– С. 85–97.
30. *Хенце М., Армоэс П., Ля-Кур-Янсун И., Арван Э.* Очистка сточных вод.– М.: Мир, 2006.– 480 с.
31. *Alpkwist E., Picioreanu C., Van Loosdrecht M.C.M., Heyden A.* Three dimensional biofilm model with individual cells and continuum EPS matrix // *Biotechnol.Bioeng.*– 2006.– 94(5).– P. 961–979.
32. *Lapidou C.S., Rittmann B.E.* A unified theory for extracellular polymeric substances, soluble microbial products and active and inert biomass // *Water Res.*– 2002.– 36.– P. 2711–2720.
33. *Мици Д.М., Мельцер В.З.* Гидравлическое сопротивление зернистой пористой среды в процессе коагуляции // *Докл. АН СССР.*– 1970.– 192, N 2.– С. 304–306.