

УДК 532:631.362

КОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА НЕОДНОРОДНОГО ВИБРООЖИЖЕННОГО СЛОЯ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА НАКЛОННОМ РЕШЕТЕ

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ*, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**

* Харьковський національний технічний університет сільськогосподарського господарства,

** Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут"

Получено 14.10.2010

Исследован режим установившихся колебаний скорости в неоднородном виброожигенном слое зерновой смеси при её движении по наклонному плоскому виброрешету. Учтено разделение потока на проходную и сходовую фракции. В функциях Кельвина получено решение задачи гидродинамики, когда кинематический коэффициент вибровязкости смеси является линейной функцией декартовой координаты, перпендикулярной направлению скорости потока. Отдельно рассмотрен частный случай краевой задачи гидродинамики, решение которой выражается в элементарных функциях.

Досліджено режим усталених коливань швидкості в неоднорідному вібророзрідженому шарі зернової суміші при її русі по нахиленому плоскому віброрешеті. Враховано розділення потоку на прохідну та східну фракції. В функціях Кельвіна отримано розв'язок задачі гідродинаміки, коли кінематичний коефіцієнт вібров'язкості суміші є лінійною функцією декартової координати, яка перпендикулярна напрямку швидкості потоку. Розглянуто окремий випадок граничної задачі гідродинаміки, розв'язок якої виражається в елементарних функціях.

The mode of the established fluctuations of speed in non-uniform vibroliquefaction of a layer grain mix is investigated at its motion on a inclined flat vibrosieve. The division of a flow on passible and tailing fraction is taken into account. In Kelvin functions the solution of a problem of hydrodynamics is received, when a kinematical factor of vibroviscosity of a mix is linear function of cartesian coordinate, perpendicular direction of velocity of a flow. The special case of a regional problem of hydrodynamics is separately considered, which solution is expressed in elementary functions.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование движения зерновой смеси связано с интенсификацией сепарирования зерна, которое обычно проходит в условиях вибраций. Вибрации решета ускоряют сегрегацию смеси и вызывают её колебания. Известные гидродинамические теории описывают эти колебания в однородном слое зерна без учета изменения вибровязкости смеси с глубиной. В действительности внутреннее давление и вибровязкость смеси увеличиваются по мере удаления от свободной поверхности вглубь слоя. Это изменение желательно учитывать при разработке уточнённых моделей сепарирования зерна.

Колебания однородного слоя смеси, как вязкой жидкости, рассматривались в [1,2]. В аналогичной постановке краевая задача для неоднородного слоя решена в [3], где предполагалось, что вибровязкость смеси является линейной функцией декартовой координаты. Недостаток использованной аппроксимации заключался в том, что она имеет нулевое значение вязкости на свободной поверхности слоя. Такой результат не согласуется с наличием внутреннего трения в слое зерна при конечной дисперсности частиц, образующих смесь. Сила трения действует и на частицы, выходящие

на свободную поверхность. Поэтому теория, изложенная в [3], требует дальнейшего уточнения. Для её корректировки здесь вводится конечное (ненулевое) значение вибровязкости на свободной поверхности слоя. Кроме того, с помощью конвективного члена в уравнении гидродинамики учитывается влияние на скорость транспортирования смеси отделения проходной фракции от основной движущейся массы. Просеивание проходной фракции рассматривается как просачивание вязкой жидкости через частично проницаемую (перфорированную) граничную поверхность. Такой способ учёта разделения смеси на фракции применялся в [4]. Движение однородной вязкой жидкости по проницаемой поверхности рассмотрено в [5,6] и другой литературе.

Цель статьи – разработка уточненной модели движения зерна по наклонному виброрешету, как слоя неоднородной вязкой жидкости, которая учитывает колебания скорости потока и разделение смеси на фракции в ходе движения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полагая две проекции скорости потока равными нулю, третью проекцию в установившемся режиме колебаний определяем из решения дифферен-

циального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\nu(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} = -g \sin \theta \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$u'_y(0) = 0; u(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2) $u = u(y, t)$ – проекция скорости потока на ось ox ; $\nu = \epsilon v_{\Pi} = \text{const}$; ϵ – коэффициент "живого сечения" решета; v_{Π} – скорость просеивания отделяющейся фракции через перфорированную поверхность решета; g – ускорение свободного падения; θ – угол наклона решета к горизонту; A^* , ω – амплитуда и частота продольных колебаний решета в его плоскости; h – толщина слоя зерновой смеси; t – время; y – декартова координата; $\nu(y)$ – кинематическая вибровязкость смеси, которую аппроксимируем выражением

$$\nu = \nu(y) = \nu_0 + a_* y. \quad (3)$$

Символом ν_0 обозначена кинематическая вибровязкость смеси на свободной поверхности слоя $y = 0$. При $\nu_0 = 0$ аппроксимация (3) совпадает с применявшейся в работе [3], где имеется формула для вычисления коэффициента a_* :

$$a_* = \frac{b_*}{6\omega r_0 \sqrt{(2A^*)^2 - (\rho \delta b_* h)^2}}.$$

Здесь $b_* = 0.7f(\pi r_0)^2 g \cos \theta$; $\delta = \pi(4M\omega^2)^{-1}$; f – коэффициент внутреннего трения в смеси плотности ρ ; r_0 , M – эквивалентные радиус и масса зёрен, образующих смесь.

Система координат и направления потока показаны на рис. 1.

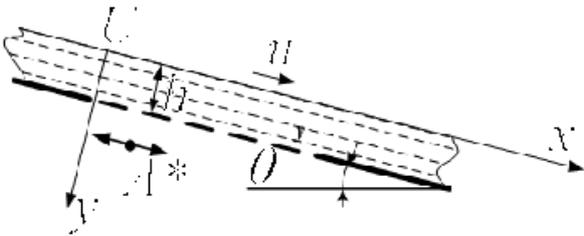


Рис. 1. Расчетная схема

2. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Учитывая выражение (3), уравнение (1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \frac{1-s}{\nu} \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{1}{a_*^2 \nu} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g \sin \theta}{a_*^2 \nu}, \quad (4)$$

где $s = \epsilon v_{\Pi} a_*^{-1} < 1$.

Решение (4) ищем в виде суммы

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t), \quad (5)$$

слагаемые которой удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d^2 u_1}{d\nu^2} + \frac{1-s}{\nu} \frac{du_1}{d\nu} = -\frac{g \sin \theta}{a_*^2 \nu}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \nu^2} + \frac{1-s}{\nu} \frac{\partial u_2}{\partial \nu} - \frac{1}{a_*^2 \nu} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

и граничным условиям:

$$\left. \frac{du_1}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_0} = 0;$$

$$u_1(\nu_1) = 0; u_2(\nu_1) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (8)$$

Здесь $\nu_1 = \nu_0 + a_* h$, $\nu_0 > 0$.

Выражение (6) понижается до линейного дифференциального уравнения первого порядка. Его решение, удовлетворяющее краевым условиям (8), имеет вид

$$u_1(\nu) = \frac{g \sin \theta}{a_*^2 (1-s)} \left(\nu_1 - \nu + \frac{\nu^s - \nu_1^s}{s \nu_0^{s-1}} \right). \quad (9)$$

Учитывая (7) и (8), функцию $u_2(y, t)$ представим суммой

$$u_2(\nu, t) = \mathbf{Re} w(\nu) \cdot \sin(\omega t) + \mathbf{Im} w(\nu) \cdot \cos(\omega t), \quad (10)$$

в которой $w(\nu)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\nu^2} + \frac{1-s}{\nu} \frac{dw}{d\nu} - \frac{i\omega}{a_*^2 \nu} w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (11)$$

и граничным условиям:

$$\mathbf{Im} w(\nu_1) = 0; \quad \mathbf{Re} w(\nu_1) = A^* \omega; \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\nu} (\mathbf{Im} w(\nu))|_{\nu=\nu_0} = 0; \quad \frac{d}{d\nu} (\mathbf{Re} w(\nu))|_{\nu=\nu_0} = 0.$$

Общим решением (11) является выражение

$$w(\nu) = \xi^s \left[(c_1 + ic_2) \exp\left(i \frac{s\pi}{2}\right) I_s\left(\xi \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right)\right) + (c_3 + ic_4) \times \exp\left(-i \frac{s\pi}{2}\right) K_s\left(\xi \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right)\right) \right], \quad (13)$$

в котором $\xi = \frac{2}{a_*} \sqrt{\omega \nu}$; c_1, c_2, c_3, c_4 – вещественные произвольные постоянные; $I_s(z), K_s(z)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индекса s .

Используя формулы [7]

$$I_s \left(\xi e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = e^{-i\frac{s\pi}{2}} [ber_s(\xi) + ibei_s(\xi)]; \tag{14}$$

$$K_s \left(\xi e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = e^{i\frac{s\pi}{2}} [ker_s(\xi) + ikei_s(\xi)],$$

вещественную и мнимую части решения (13) выражаем через функции Кельвина $ber_s(z), bei_s(z), ker_s(z), kei_s(z)$:

$$\mathbf{Re} w = \xi^s [c_1 ber_s(\xi) - c_2 bei_s(\xi) + c_3 ker_s(\xi) - c_4 kei_s(\xi)]; \tag{15}$$

$$\mathbf{Im} w = \xi^s [c_1 bei_s(\xi) + c_2 ber_s(\xi) + c_3 kei_s(\xi) + c_4 ker_s(\xi)].$$

Подставив выражение (13) и его производную по y в (12), получаем систему четырех алгебраических уравнений с неизвестными c_1, c_2, c_3, c_4 :

$$c_1 ber_s(\eta) - c_2 bei_s(\eta) + c_3 ker_s(\eta) - c_4 kei_s(\eta) = A^* \omega \eta^{-s};$$

$$c_1 bei_s(\eta) + c_2 ber_s(\eta) + c_3 kei_s(\eta) + c_4 ker_s(\eta) = 0;$$

$$c_1 br - c_2 bi + c_3 kr - c_4 ki = 0;$$

$$c_1 bi + c_2 br + c_3 ki + c_4 kr = 0. \tag{16}$$

$$\text{Здесь } \eta = \frac{2}{a_*} \sqrt{\omega \nu_1}; \quad \zeta = \frac{2}{a_*} \sqrt{\omega \nu_0};$$

$$br = s \cdot ber_s(\zeta) + \zeta \cdot ber'_s(\zeta); bi = s \cdot bei_s(\zeta) + \zeta \cdot bei'_s(\zeta);$$

$$kr = s \cdot ker_s(\zeta) + \zeta \cdot ker'_s(\zeta); ki = s \cdot kei_s(\zeta) + \zeta \cdot kei'_s(\zeta);$$

штрихом обозначены производные функций Кельвина по ζ .

Решив систему (16), находим постоянные:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};$$

$$c_3 = c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2; \quad c_4 = -c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1. \tag{17}$$

В формулах (17)

$$\Delta = [ber_s + \delta_1 ker_s(\eta) + \delta_2 kei_s(\eta)]^2 + [bei_s + \delta_1 kei_s(\eta) - \delta_2 ker_s(\eta)]^2;$$

$$\Delta_1 = A^* \omega \eta^{-s} [ber_s(\eta) + \delta_1 ker_s(\eta) + \delta_2 kei_s(\eta)];$$

$$\Delta_2 = -A^* \omega \eta^{-s} [bei_s(\eta) + \delta_1 kei_s(\eta) - \delta_2 ker_s(\eta)];$$

$$\delta_1 = -\frac{br \cdot kr + bi \cdot ki}{(kr)^2 + (ki)^2}; \quad \delta_2 = \frac{bi \cdot kr - br \cdot ki}{(kr)^2 + (ki)^2}.$$

Таким образом, согласно (5), (9), (10) и (17), вычисление скорости потока смеси, с учетом ее колебаний, сводится к формуле

$$u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{a_*^2 (1-s)} \left(\nu_1 - \nu + \frac{\nu^s - \nu_1^s}{s \nu_0^{s-1}} \right) + \xi^s [c_1 \times ber_s(\xi) - c_2 bei_s(\xi) + c_3 ker_s(\xi) - c_4 kei_s(\xi)] \sin(\omega t) + \xi^s [c_1 bei_s(\xi) + c_2 ber_s(\xi) + c_3 kei_s(\xi) + c_4 ker_s(\xi)] \times \cos(\omega t). \tag{18}$$

В решении (18) индекс функций Кельвина зависит от ν_{II} и ϵ . Так учитывается влияние скорости просеивания проходовой фракции на решетке на скорость потока смеси по виброрешете. Константы $c_j, j = \overline{1, 4}$, входящие в (18), выражаются через вибровязкость слоя и параметры колебаний решета по формулам (17).

При расчете удельной производительности решета $\overline{Q}(t)$ и усредненной по толщине слоя скорости потока $u_{cp} = h^{-1} \overline{Q}(t)$ используем интеграл

$$\overline{Q}(t) = \int_0^h u(y, t) dy = \frac{a_*}{2\omega} \int_{\zeta}^{\eta} \xi u(\xi t) d\xi. \tag{19}$$

Он также выражается через функции Кельвина, поскольку [7]

$$\int \xi^{s+1} \begin{bmatrix} ber_s(\xi) \\ ker_s(\xi) \end{bmatrix} d\xi = \frac{\xi^{s+1}}{\sqrt{2}} \times \begin{bmatrix} bei_{s+1}(\xi) - ber_{s+1}(\xi) \\ kei_{s+1}(\xi) - ker_{s+1}(\xi) \end{bmatrix};$$

$$\int \xi^{s+1} \begin{bmatrix} bei_s(\xi) \\ kei_s(\xi) \end{bmatrix} d\xi = -\frac{\xi^{s+1}}{\sqrt{2}} \times \begin{bmatrix} bei_{s+1}(\xi) + ber_{s+1}(\xi) \\ kei_{s+1}(\xi) + ker_{s+1}(\xi) \end{bmatrix}.$$

Подставляя соотношение (18) в (19), получаем формулу для расчета удельной производительности решета:

$$\overline{Q}(t) = \frac{g \sin \theta}{a_*^2 (1-s^2)} \left(\frac{1+s}{2} a_* h^2 + \frac{1}{a_* s \nu_0^{s-1}} [\nu_1^{s+1} - \nu_0^{s+1} - (1+s) h a_* \nu_1^s] \right) + \frac{a_*}{2\sqrt{2}\omega} [(c_1 \Phi_1 - c_2 \Phi_2 + c_3 \Phi_3 - c_4 \Phi_4) \times \sin(\omega t) + (c_1 \Phi_2 + c_2 \Phi_1 + c_3 \Phi_4 + c_4 \Phi_3) \cos(\omega t)].$$

Здесь

$$\Phi_1 = \eta^{s+1} [bei_{s+1}(\eta) - ber_{s+1}(\eta)] - \zeta^{s+1} \times [bei_{s+1}(\zeta) - ber_{s+1}(\zeta)];$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \zeta^{s+1}[bei_{s+1}(\zeta) + ber_{s+1}(\zeta)] - \eta^{s+1} \times \\ &\quad \times [bei_{s+1}(\eta) + ber_{s+1}(\eta)]; \\ \Phi_3 &= \eta^{s+1}[kei_{s+1}(\eta) - ker_{s+1}(\eta)] - \zeta^{s+1} \times \\ &\quad \times [kei_{s+1}(\zeta) - ker_{s+1}(\zeta)]; \\ \Phi_4 &= \zeta^{s+1}[kei_{s+1}(\zeta) + ker_{s+1}(\zeta)] - \eta^{s+1} \times \\ &\quad \times [kei_{s+1}(\eta) + ker_{s+1}(\eta)].\end{aligned}$$

В частном случае, когда $s = 1/2$, решение рассматриваемой задачи представляется комбинацией элементарных функций, поскольку к ним сводятся функции Кельвина. Действительно:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} ber_{1/2}(\xi) \\ bei_{1/2}(\xi) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \left(e^{\xi_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\xi_1 + \frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\xi_1 + \frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} - e^{-\xi_1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \begin{bmatrix} \cos\left(\xi_1 - \frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\xi_1 - \frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \right); \\ \begin{bmatrix} ker_{1/2}(\xi) \\ kei_{1/2}(\xi) \end{bmatrix} &= \frac{\pi}{\sqrt{2\xi}} e^{-\xi_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\xi_1 + \frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\xi_1 + \frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}; \\ ber_{3/2}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \left(e^{\xi_1} \left[\cos\left(\xi_1 + \frac{5\pi}{8}\right) - \frac{1}{\xi} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \cos\left(\xi_1 + \frac{3\pi}{8}\right) \right] + e^{-\xi_1} \left[\cos\left(\xi_1 - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{\xi} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \cos\left(\xi_1 - \frac{3\pi}{8}\right) \right] \right); \\ bei_{3/2}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \left(e^{\xi_1} \left[\sin\left(\xi_1 + \frac{5\pi}{8}\right) - \frac{1}{\xi} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sin\left(\xi_1 + \frac{3\pi}{8}\right) \right] - e^{-\xi_1} \left[\sin\left(\xi_1 - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{\xi} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sin\left(\xi_1 - \frac{3\pi}{8}\right) \right] \right); \\ ker_{3/2}(\xi) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\xi}} e^{-\xi_1} \left[\cos\left(\xi_1 + \frac{7\pi}{8}\right) - \frac{1}{\xi} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\xi} \cos\left(\xi_1 + \frac{\pi}{8}\right) \right]; \\ kei_{3/2}(\xi) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\xi}} e^{-\xi_1} \left[\sin\left(\xi_1 + \frac{7\pi}{8}\right) + \frac{1}{\xi} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin\left(\xi_1 + \frac{\pi}{8}\right) \right].\end{aligned}$$

Здесь $\xi_1 = \xi/\sqrt{2}$.

При таком разделении фракций определение кинематических характеристик потока смеси, как и в моделях однородной среды [1], [2], связано с вычислением показательной и тригонометрических функций.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И ИХ АНАЛИЗ

С целью апробации полученных решений краевой задачи проведены вычисления изменений скорости потока смеси при следующих исходных данных: $\rho=750 \text{ кг/м}^3$; $f = 0.47$; $M=0.00004 \text{ кг}$; $r_0=0.001825 \text{ м}$; $h=0.008 \text{ м}$; $v_{\Pi}=0.0025 \text{ м/с}$, которые соответствуют зерновой смеси пшеницы [3]. Работу решета характеризовали параметрами: $\theta = 5^\circ$; $A^*=0.0075 \text{ м}$; $\omega=41.86 \text{ с}^{-1}$; $\epsilon = 0.4$.

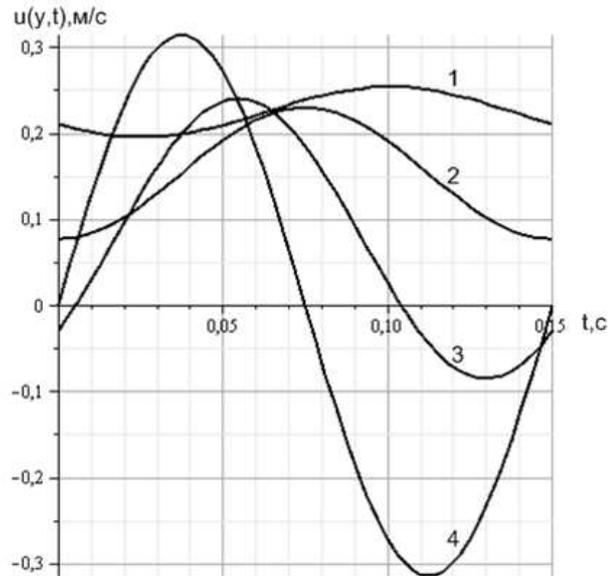


Рис. 2. Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте неоднородного слоя: 1 — $y/h=0.25$; 2 — $y/h=0.5$; 3 — $y/h=0.75$; 4 — $y/h=1$; $\nu_0=0.000005 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$

Вычисленные по (18) значения $u(y, t)$ для различных y графически показаны на рис. 2, 3.

ВЫВОДЫ

Расчёты с помощью полученных решений показали, что амплитуды колебаний скорости потока быстро убывают с удалением от поверхности решета (с уменьшением y). На свободной поверхности слоя скорость потока близка к постоянному значению, которое зависит от величины ν_0 . Идентификация этого параметра по результатам экспериментов позволяет повышать адекватность математической модели движения зерновой смеси на плоском наклонном решете в стационарном режиме его работы.

В заключение подчеркнем, что из-за просеивания части смеси толщина движущегося слоя меня-

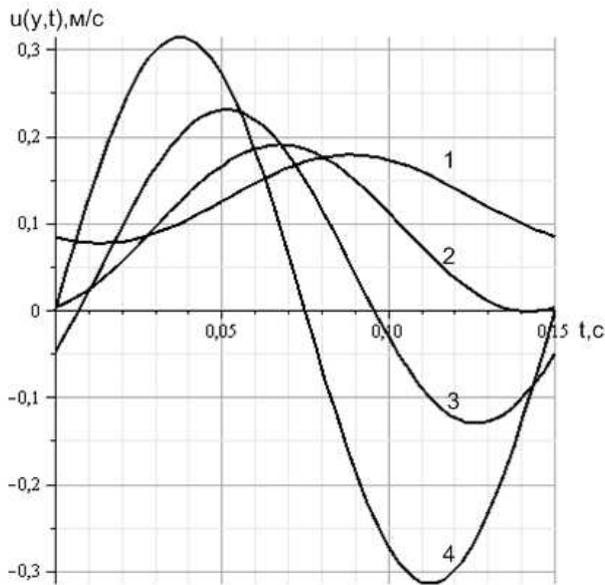


Рис. 3. Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте неоднородного слоя: 1 – $y/h=0.25$; 2 – $y/h=0.5$; 3 – $y/h=0.75$; 4 – $y/h=1$; $\nu_0=0.000005 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$

ется по длине решета. Но выше при постановке и решении краевой задачи этим изменением прене-

брегали. Поэтому изложенная теория касается лишь того случая, когда объем просеиваемой фракции мал по сравнению с общим объемом зерновой смеси, движущейся по поверхности виброрешета.

1. Тищенко Л. Н., Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. К расчёту движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // Вібрації в техніці та технологіях.– 2009.– N 1.– С. 109–113.
2. Тищенко Л. Н., Ольшанский В. П. О влиянии поперечных колебаний плоского решета на движение по нём слоя зерновой смеси // Динамика и прочность машин. Вестник НТУ "ХПИ" – Харьков: НТУ ХПИ.– 2009.– Вып.30.– С. 167–176.
3. Тищенко Л. Н., Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Гидродинамика сепарирования зерна.– Харьков: Міськдрук, 2010.– 174 с.
4. Тищенко Л. Н., Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. О гидродинамической модели движения зерновой смеси по наклонному плоскому решету // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво).–Полтава:Пол.НТУ.– 2009.– Вип.3(25),Т.1.– С. 181–193.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М: Наука, 1973.– 847 с.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М: Наука, 1974.– 712 с.
7. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами).– М: Наука, 1979.– 832 с.