ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2011. Том 13, N 2. С. 37 – 43

УДК 301.17.15.13; 532.5; 551.465; 629.76

# МОДЕЛИ КОМПАКТНЫХ КОМПЕНСИРОВАННЫХ ВИХРЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

П. В. ЛУКЬЯНОВ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 14.09.2010*

Обобщается полученное ранее автором работы аналитическое решение, описывающего динамику одномерного стационарного невязкого компактного компенсированного вихря, и указывается на использование его в ряде задач. Это, прежде всего, описание геофизических вихрей: атмосферные вихри и вихри открытого океана, которые имеют компактное в радиальном направлении распределение всех характеристик. Окружная компонента скорости в колонообразном вертолетном вихре также описывается компактным компенсированным вихрем. Важным применением модели компенсированного вихря является описание дорожки Кармана при обтекании крыла, цилиндра и в других подобных задачах. В модели вихревого кольца компонента скорости, которую до сих пор описывали вихрем Рэнкина, также описывается компактным компенсированным вихрем. Доказано для случая общего осесимметричного течения, что компенсированность поля вертикальной завихренности обуславливает компактность области движения: вращательное движение сосредоточено в конечной области.

Узагальнюється отриманий раніше автором роботи аналітичний розв'язок, що описує динаміку одновимірного стаціонарного нев'язкого компактного компенсованого вихора, та вказується на використання його у ряді задач. Це, перш за все, опис геофізичних вихорів: атмосферні вихорі та вихорі відкритого океану, що мають компактний у радіальному напрямку розподіл усіх характеристик. Окружна швидкість у колоноподібному вертольотному вихорі також описується компактним компенсованим вихорем. Важливим застосуванням моделі компенсованого вихора є опис дорожки Кармана при обтіканні крила, циліндра та інших подібних задач. В моделі вихрового кільця компонета швидкості, яку до сих пір описували вихорем Ренкіна, також описується компактним компенсованим вихорем. Для випадку загальної осесиметричної течії доведено, що компенсованість поля вертикальної складової завихреності обумовлює компактність області руху: обертання зосереджено у скінченій області.

The obtained earlier by the author of the paper analytical solution that describes the dynamics of one-dimentional steady invisid compact compensated vortex has been extended and it was pointed to the using of the solutions for a number of problems. First of all, for description of compact geophysical vortexes in atmosphere (tornadoes) and open ocean. The azimuthal velocity in column-like helicopter vortex is also well approximated by compact compensated vortex. Von Karman vortex streets of different natures (flow past cylinder, wing etc.) may well be discribed by compact compensated vortex model. In vortex ring model the velocity component that was described by Rankin vortex before is also described by compact compensated vortex. For the general axis-symmetrical flow, it was proved that vertical vorticity component compensation means compactness of the revolving domain.

*Светлой памяти Вадима Федоровича Козлова посвящается*

## ВВЕДЕНИЕ

В работе В.Ф. Козлова [1] указывается со ссылкой на [2, 3], что, в отличие от моделей с постоянной завихренностью, данные гидрологических наблюдений над реальными вихрями – иные. Согласно ним, завихренность сначала меняет знак при изменении в радиальном направлении, а затем убывает по абсолютной величине до нуля. Там же [1] делается вывод о том, что по сравнению с указанными более правдоподобными представляются модели вихрей с кусочно-постоянным распределением завихренности при наличии не менее двух фронтов (разрывов) этой характеристики и при условии нулевой суммарной интенсивности. Именно указанная статья [1], а также отсутствие простой невязкой модели, описывающей область вращающейся жидкости конечных размеров, послужили стимулом к нахождению простейшего аналитического решения компактного вихря, состоящего из двух областей завихренности разного знака, в целом компенсирующих друг друга. Речь идет о составном вихре, ядро которого представляет собой вращение абсолютно твердого тела, а периферия – не что иное, как вращение жидкости между двумя соосными цилиндрами, в случае вращения внутреннего цилиндра и покоя внешнего. Роль покоящегося цилиндра при этом отводится внешней неподвижной среде (жидкости или газу). Константы определяются из условия компенсированности.

Работа построена следующим образом. В первой ее части вкратце приводится аналитическое решение компактного компенсированного вихря, состоящего из двух областей завихренности разных знаков. Там же получено решение более сложного вихря, состоящего уже из трех областей завихренности. Такой вихрь также компенсирован. Затем получается решение компактного вихревого течения в кольцевой области. Во второй части приводятся примеры, где можно использовать указанные выше модели вихрей – это задачи моделирования вихрей открытого океана, атмосферных вихрей, описание такого явления как дорожка Кармана, а также течения в вихревом кольце.

## 1. СТАЦИОНАРНЫЕ НЕВЯЗКИЕ КОМПАКТНЫЕ КОМПЕНСИРОВАННЫЕ ВИХРИ

### 1.1. Вихри, состоящие из двух и трех областей завихренности разного знака

Набор используемых в гидромеханике простейших моделей стационарных одномерных вихрей весьма ограничен. Как правило, это модель точечного вихря с гиперболическим распределением скорости и модель вихря Рэнкина. Причем первая модель – это по сути потенциальное (безвихревое), за исключением точечного ядра, вращение жидкости вокруг оси. Простейшим примером стационарного вихря с областью завихренности конечного размера есть вихрь Рэнкина [4]. Однако такое течение имеет два существенных неустранимых недостатка: в неограниченной области его кинетическая энергия равна бесконечности, а в ограниченной – не выполняется условие прилипания на границе, что в обоих случаях нефизично [4]. Поэтому вопрос о нахождении замены модели вихря Рэнкина в тех задачах, где область вращения является конечной, оставался до сих пор открытым. Простые размышления и многолетний опыт работы в данной области принесли желаемые результаты. Было получено общее и частные автомодельные решения задачи о турбуленнтной диффузии вихря [5], а в работе [6] – решение невязкого аналога компактного вихря. Распределения азимутальной скорости $V_\theta$ и вертикальной компоненты завихренности $\omega_z$ в таком вихре описываются следующими выражениями:

$$V_\vartheta = \begin{cases} \dfrac{V_0 r}{a}, & 0 \le r \le a, \\ \dfrac{V_0 a\left(R^2 - r^2\right)}{(R^2 - a^2) r}, & a \le r \le R, \\ 0, & r > R \end{cases}, \tag{1}$$

$$\omega_z = \begin{cases} \dfrac{2V_0}{a}, & 0 \le r \le a, \\ -\dfrac{2V_0 a}{R^2 - a^2}, & a \le r \le R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что поле завихренности (2) является компенсированным, то есть выполняется следующее условие [6]:

$$\int\limits_V \omega_z dV = 0. \tag{3}$$

Возникает логичный вопрос: если уже известны автомодельные решения задач молекулярной [9] и турбулентной [5] диффузии, то что нового дает данная модель. Дело в том, что в автомодельном решении размеры ядра и всего вихря строго определены (в каждый момент времени), в то время как у приведенной модели (1)-(2) такого ограничения нет. Может также возникнуть сомнение о частности компенсированного вихря. Поэтому докажем следующее:

*свойство: одномерное вращающееся движение сосредоточено в конечной области (компактно), если поле завихренности компенсировано.*

Действительно, азимутальная компонента скорости $V_\theta$ выражается через вертикальную компоненту $\omega_z$ завихренности по известной формуле:

$$V_\theta = \frac{1}{r}\int\limits_0^r r\omega_z dr. \tag{4}$$

Если вихрь имеет конечный размер в радиальном направлении, то интеграл по конечной области даст константу, и течение вне области, где завихренность отлична от нуля, будет потенциальным:

$$V_\theta = \frac{\mathrm{C}}{r}, \tag{5}$$

распространяясь до бесконечности. И только условие компенсированности (3) гарантирует конечность области вращения жидкости. Что и требовалось доказать.

В защиту приведенного решения можно сослаться на работу [7], в которой говорится о том, что вне ядра вихря течение является не чисто потенциальным. И, что особо важно, в указанной работе приводится, со ссылкой на [8], интерполяционная формула для скорости ограниченных в пространстве вихрей в виде:

$$V(r)=\frac{\Gamma_c}{2\pi r}\left[1-\exp\left(-\alpha r^2\right)\right]+\frac{\omega r}{2}, \qquad (6)$$

где $\Gamma_c$ и $\omega$ – соответственно циркуляция и угловая скорость (константы).

Если теперь сравнить решение (6) и выражение (1) с соответствующими зависимостями вихря Рэнкина, то именно на последнее слагаемое и отличаются указанные соотношения от потенциального решения вне ядра. Так что решение (6) – это по сути экспериментальное подтверждение компактного компенсированного вихря (1).

Доказанное свойство справедливо не только для одномерных невязких стационарных течений. Поскольку для произвольного трехмерного осесимметричного вращения имеет место соотношение

$$\omega_z=\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rV_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial V_r}{\partial\theta}, \qquad (7)$$

то условие компенсированности поля завихренности, описываемого выражением (3), влечет за собой компактность поля азимутальной скорости. А это означает, в свою очередь, что вне конечной области отсутствует какое-либо вращение, что позволяет применять (7) уже к трехмерным вихревым (или в общем случае вращательным) движениям, как вязким, так и невязким.

Было проведено подробное изучение класса автомодельных решений, соответствующих ненулевым моментам завихренности с номерами, большими, чем $n=3$. Оно показало существование вихрей с тремя и более областями завихренности чередующихся знаков. Поле скорости в таких вихрях теперь состоит из двух областей: течения внутри и противотечения во внешней области. На рис. 1 приведены графические зависимости, соответствующие автомодельному решению при $n=4$.

Рассмотрим невязкий компенсированный вихрь с тремя областями постоянной завихренности. Имеем:

$$\omega_z=\begin{cases}\Omega_0, & 0\le r\le a,\\ \Omega_1, & a\le r\le R_1,\\ C, & R_1,\le r\le R_2,\\ 0, & r>R_2.\end{cases} \qquad (8)$$

Найдем поле азимутальной скорости, соответствующее (8). Для этого воспользуемся соотношением (4). В первой области $(0\le r\le a)$ получается то же выражение, что и ранее. Во второй области $a\le r\le R_1$ имеем:

$$V_\theta=\frac{1}{r}\int\limits_0^a r\Omega_0 dr+\frac{1}{r}\int\limits_a^r r\Omega_1 dr=$$
$$=\frac{\Omega_0 a^2}{2r}+\frac{\Omega_1\left(r^2-a^2\right)}{2r}.$$

Аналогично, для третьей области $(R_1\le r\le R_2)$ получается следующее выражение для скорости:

$$V_\theta=\frac{\Omega_0 a^2}{2r}+\frac{\Omega_1\left(R_1^2-a^2\right)}{2r}+\frac{C\left(r^2-R_1^2\right)}{2r}.$$

Наконец, в четвертой области вне вихря $(r>R_2)$ имеем:

$$V_\theta=\frac{\Omega_0 a^2}{2r}+\frac{\Omega_1\left(R_1^2-a^2\right)}{2r}+\frac{C\left(R_2^2-R_1^2\right)}{2r}.$$

Константу $C$ находим из условия компенсированности:

$$V_\theta=\Omega_0 a^2+\Omega_1\left(R_1^2-a^2\right)+C\left(R_2^2-R_1^2\right)=0.$$

Откуда

$$C=-\frac{\Omega_0 a^2+\Omega_1\left(R_1^2-a^2\right)}{\left(R_2^2-R_1^2\right)}.$$

С учетом вышеизложенного, поля $\omega_z$ и $V_\theta$ для рассматриваемого компактного компенсированного вихря имеют следующий вид:

$$\omega_z=\begin{cases}\Omega_0, & 0\le r\le +a\\ \Omega_1, & a\le r\le R_1,\\ -\dfrac{\Omega_0 a^2+\Omega_1\left(R_1^2-a^2\right)}{R_2^2-R_1^2}, & R_1\le r\le R_2,\\ 0, & r>R_2.\end{cases}$$

$$V_\theta=\begin{cases}0.5\Omega_0 r, & 0\le r\le a,\\ \dfrac{\Omega_0 a^2+\Omega_1\left(r^2-a^2\right)}{2r}, & a\le r\le R_1,\\ \dfrac{\Omega_0 a^2+\Omega_1\left(R_1^2-a^2\right)}{2r}- \\ -\dfrac{\left[\Omega_0 a^2+\Omega_1\left(R_1^2-a^2\right)\right]\left(r^2-R_1^2\right)}{\left(R_2^2-R_1^2\right)2r}, \\ R_1\le r\le R_2, \\ 0, & r>R_2.\end{cases}$$

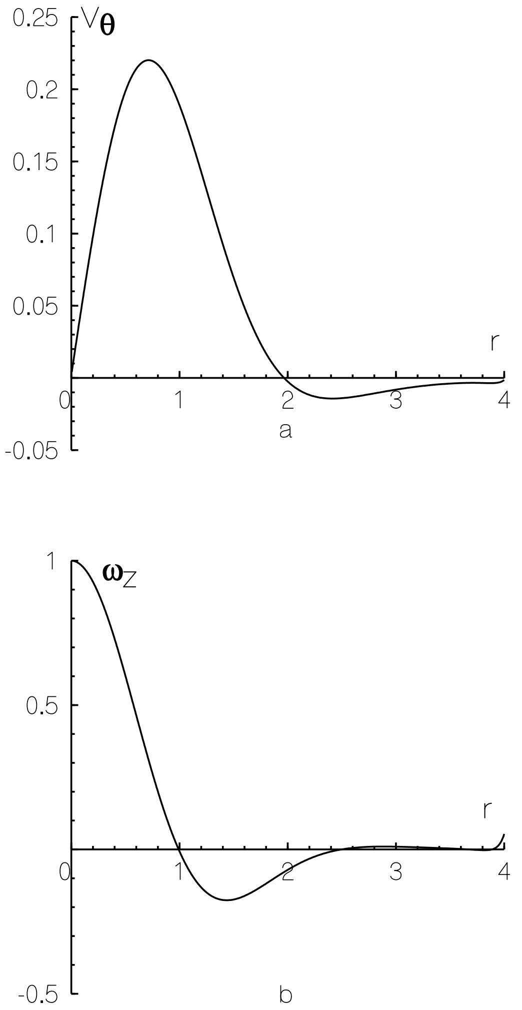


Рис. 1. Азимутальная скорость ($a$) и вертикальная компонента завихренности ($b$)

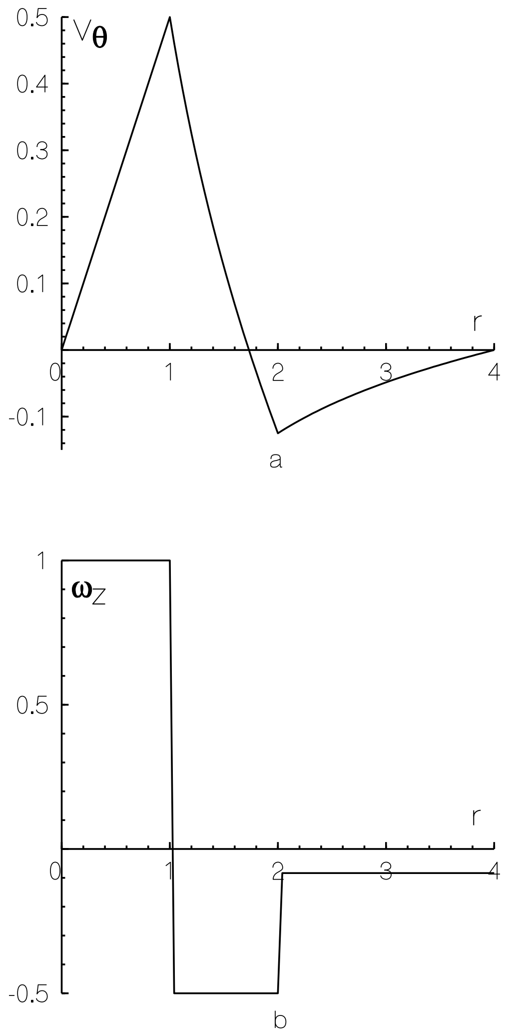


Рис. 2. Азимутальная скорость ($a$) и вертикальная компонента завихренности ($b$) вихря, состоящего из трех зон постоянной завихренности

На рис. 2 приведены кинематические характеристики компенсированного вихря, состоящего из трех областей постоянной завихренности. Графические зависимости согласуются со своими аналогами, соответствующими автомодельному решению, и представленными на рис. 1.

По аналогии, можно ввести понятие модели обобщенного, то есть состоящнго из $n$ областей завихренности постоянного значения, компактного компенсированного вихря. При этом значения завихренности будут известны для всех, кроме одной области. Это значение определяется из условия компенсированности. Если в конкретной задаче известно еще какое-то условие, налагаемое на поле скорости или завихренности, то его можно также использовать, и количество неизвестных констант, подлежащих определению, может быть больше, чем одна.

### 1.2. Кольцевой компактный компенсированный вихрь

Компактное вихревое течение в кольце представляет как теоретический, так и практический интерес. Речь идет о вращающемся движении жидкости (или газа) вокруг неподвижной области цилиндрической формы.

Функция вертикальной компоненты завихренности в кольцевом вихре имеет следующий вид:

$$\omega_z = \begin{cases} \Omega_0, & r_0 \le r \le r_0 + a, \\ C, & r_0 + a \le r \le r_0 + R \\ 0, & r > r_0 + R, \end{cases} \qquad (9)$$

где $C$ – константа, определяемая из условия компенсированности:

$$\int\limits_{r_0}^{r_0+R} \Omega_z r dr = \int\limits_{r_0}^{r_0+a} \Omega_z r dr + \int\limits_{r_0+a}^{r_0+R} \Omega_z r dr =$$

$$= \int\limits_{r_0}^{r_0+a} \Omega_0 r dr + C \int\limits_{r_0+a}^{r_0+R} r dr = 0.$$

Вычислив интегралы, имеем:

$$\frac{\Omega_0\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right)}{r} + \frac{C\left((r_0+R)^2 - (r_0+a)^2\right)}{r} = 0.$$

Откуда получаем:

$$C = -\frac{\Omega_0\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right)}{\left((r_0+R)^2 - (r_0+a)^2\right)}.$$

Окончательно, поле завихренности имеет следующее распределение:

$$\omega_z = \begin{cases} \Omega_0, \quad r_0 \le r \le r_0 + a, \\ -\dfrac{\Omega_0\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right)}{(r_0+R)^2 - (r_0+a)^2}, \\ r_0 + a \le r \le r_0 + R, \\ 0, \quad r > r_0 + R. \end{cases} \qquad (10)$$

Поле азимутальной скорости, соответствующее (10), найдем согласно выражения (4). Во внутренней области $r_0 \le r \le (r_0 + a)$ получаем:

$$V_\theta = \frac{1}{r}\int\limits_{r_0}^{r_0+r} \Omega_0 r dr = \frac{\Omega_0\left((r_0+r)^2 - r_0^2\right)}{2r}.$$

Во внешней части кольца $(r_0+a) \le r \le (r_0+R)$:

$$V_\theta = \frac{\Omega_0\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right)}{2r} + \frac{1}{r}\int\limits_{r_0+a}^{r_0+R} C r dr =$$

$$= \frac{\Omega_0\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right)}{2r} + \frac{C\left(r^2 - (r_0+a)^2\right)}{2r}. \qquad (11)$$

Подставляя в выражение (11) значение константы $C$ из решения (10), получаем:

$$V_\theta = \frac{\Omega_0}{2r}\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right) -$$

$$-\frac{\Omega_0}{2r}\frac{\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right)\left((r_0+R)^2 - (r_0+a)^2\right)}{\left((r_0+R)^2 - (r_0+a)^2\right)} = 0$$

во всей области вне кольца $r > (r_0 + R)$.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ КОМПАКТНОГО ВИХРЯ К ЗАДАЧАМ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ И АЭРОГИДРОАКУСТИКИ

### 2.1. Примеры компактных вихрей в океане и атмосфере

Приведенные в данной работе модели компактных компенсированных вихрей могут быть использованы при моделировании соответствующих процессов динамики морей и океанов в качестве невязкого приближения в начальный момент времени. В работе [1] получена модель компактного компенсированного сферического вихря. А в работе [10] приведено (см. рис. 1) распределение азимутальной скорости, качественно очень схожее на (1), см. также рис. 2, *а*. Хотя и получилось оно как частный случай более общего решения, использующего специальные функции.

В работе [11] рассмотрены мезомасштабные колонообразные вихри с размерами 10–100 м в нормальных атмосферных течениях и в 10–50 раз большими в областях, где преобладает термическая конвекция. На рис. 2 и 3, *в* [11] можно найти примеры торнадо, состоящие из трех областей завихренности чередующихся знаков. Известно, что торнадо имеют четко выраженную внешнюю границу: разрушая практически все на своем пути, такой вихрь не оказывает воздействия на находящиеся вблизи сооружения. Сказанное позволяет использовать приведенное решение в виде компактного компенсированного вихря с тремя областями завихренности в качестве нулевого приближения при моделировании торнадо.

### 2.2. Моделирование дорожки Кармана в различных задачах гидроаэромеханики

Важным, с точки зрения прикладных задач, аспектом гидроаэромеханики служит моделирование такого являения как дорожка Кармана, образующаяся при обтекании цилиндра, крыла и др.

твердых поверхностей, т. е. шахматная последовательность вихрей одинаковой интенсивности, но разной направленности. В настоящее время большинство исследователей пользуются при моделировании указанных вихрей либо моделью точечного вихря, либо моделью вихря Рэнкина или его вязким аналогом – вихрем Лэмба-Озеена. Если серьезно задуматься над физикой явления схода дорожки вихрей, то станет очевидно: только в те моменты времени, когда образовалась пара вихрей, применяемые модели, хотя и грубо, но соответствуют рассматриваемому процессу. Ровно половина времени – когда количество вихрей есть нечетным и они суммарно не являются компактными, – использование некомпактных моделей вихрей оказывается неправомерным. Важно даже не то, насколько точно модель соответствует эксперименту. Принципиальным моментом является величина суммарной кинетической энергии системы нечетного числа некомпактных вихрей – бесконечность, что нефизично. Уже можно найти в литературе одну из первых попыток [12] описания дорожки Кармана за цилиндром в виде изолированного Гауссина [5, 9]. Хотя модель компактного компенсированного вихря является невязким приближением, у нее есть преимущества по сравнению с изолированным гауссианом. Если в изолированном гауссиане размеры областей завихренности одного знака строго соотносятся между собой, то у компактного компенсированного вихря (1), (2) существует произвол: размеры области завихренности не зависят друг от друга.

### 2.3. Структура течения в вихревом кольце

Вихревое кольцо состоит из ламинарного ядра и хаотической области атмосферы [13]. В качестве модели в вихревом кольце используется вихрь Рэнкина. Однако он не соответствует физике явления, поскольку имеет два серьезных недостатка. Во-первых, вихрь Рэнкина – не компактный, а во-вторых, вместе со своим вязким аналогом – вихрем Лэмба-Озеена – он инерционно устойчив по Рэлею [14], что не соответсвует хаотическому движению частичек в атмосфере вихревого кольца.

Иное дело – использование модели компактного компенсированного вихря [6], см. также формулы (1), (2). Она не содержит указанные выше недостатки. Во-первых, область течения в вихревом кольце имеет конечный размер; во-вторых, атмосфера вихря инерционно неустойчива, поскольку описывается решением задачи о вращении жидкости между двумя соосными цилиндрами в случае вращения внутреннего цилиндра. Как известно, такое движение инерционно неустойчивое.

Кроме того, в [13] указывается, что атмосфера вихря не является строго потенциальной (как у вихря Рэнкина). Это также соответствует компактному компенсированному вихрю: его внешняя часть количественно не намного отличается от потенциального течения.

И, наконец, следует отметить, что модель вихревого кольца широко используется при изучении звука вихревыми структурами. Так, колонообразный вертолетный вихрь имеет компактное поле окружной скорости, что хорошо аппроксимируется формулами (1), (2). Звук в вертолетном вихре генерируется турбулентными вихрями Тейлора, невязким приближением которых может служить компактный компенсированный вихрь (1), (2). Само же появление вихревых колец указывает на инерционную неустойчивость течения в вертолетном вихре, что также согласуется с циркуляционной теоремой Рэлея.

## ВЫВОДЫ

1. В работе приведены простейшие модели невязких вихрей конечных размеров. К ним относятся компактный компенсированный вихрь, состоящий из двух областей завихренности одного знака, поле скорости в котором суть твердотельное вращение ядра и течение между двумя соосными цилиндрами. При этом роль внутреннего вращающегося цилиндра отводится ядру вихря (с постоянным значением завихренности), а роль внешнего неподвижного цилиндра выполняет окружающая среда, находящаяся в состоянии покоя.

2. Строго доказано, что в общем случае осесимметричного движения компенсированность поля вертикальной компоненты завихренности определяет компактность области вращения жидкости.

3. Модель компактного вихря обобщена на случай трех и более областей постоянной завихренности. Приведено решение задачи для области кольцевой формы, что может быть использовано для моделей топографических вихрей.

4. Указано на недостатки существующих моделей, описывающих различные физические процессы с участием компактных вихрей и предложено использование компактного компенсированного вихря в качестве альтернативы.

1. *Козлов В.Ф.* Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей // Известия АН ФАО.– 1992.– Т.28, № 6.– С. 615-624.

2. *Newton J.L., Aagaard K., Coachman L.K.* Baroclinic eddirs in the Arctic Ocean // Deep-Sea Res.– 1974.– V.21, № 9.– P. 707-720.
3. *Joyce T.M., Kennelly M.A.* Upper-ocean velocity structure of Gulf-Stream warm-core ring 82B // J.Geophys. Res.– 1985.– V.90, №C5.– P. 8839-8844.
4. *Meleshko Vaycheslav V. and Aref Hassan* A bibliography of Vortex Dynamics 1858-1956 // Advances in Applied Mechanics.– 2006.– V. 41.– P. 197-292.
5. *Лукьянов П.В.* Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // Прикл.гідром.– 2006.– Т. 8 (80), №3.– С. 63-77.
6. *Лук'янов П.В.* Одновимірні моделі компактних вихрів // Наукові вісті НТУУ КПІ.– 2010.– Т. 8 (80), №4.– С. 145-150.
7. *Лейбович С.* Устойчивость и разрушение вихрей: современное состояние и перспективы // Аэрокосм. техника.– 1985.– Т. 3, № 4.– С. 162-181.
8. *Escudier M.P., Borstein J., and Maxworthy T.* The Dynamics of Confined Vortices // Proceeding of the Royal Society of London.– 1982.– V. A382.– P. 335-360.
9. *Hopfinger E.J., Heijst G.J.F. van.* Vorticies in rotating fluids. // Annu. Rev. Fluid Mech.– 1993.– V. 25.– P. 241-289.
10. *Соколовский М.А.* Численное моделирование нелинейной неустойчивости осесимметричных двухслойных вихрей. // Известия АН ФАО.– 1992.– Т.28, № 6.– С. 615-624.
11. *Арсеньев С.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.Н.* Самоорганизация торнадо и ураганов в атмосферных течениях с мезомасштабными вихрями // ДАН.– 2004.– №4.– С. 541-546.
12. *Горшков К.А., Соустова И.А., Сергеев Д.А.* Об устойчивости вихревых дорожек в стратифицированной жидкости // Изв. РАН, ФАО.– 2007.– Т.43, №6.– С. 851-860.
13. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Колебание вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерации звука // Успехи физических наук.– 2000.– Т. 170, №7.– С. 713-742.
14. *Lord Rayleigh* On the Dynamics of Revolving Fluids // Proc. Roy. Soc.– 1917.– A. 93.– P. 148-154.