

УДК 532.542:519.632:004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В НЕКРУГЛЫХ КАНАЛАХ С ЛЕГКОПРОНИЦАЕМОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

Е. А. ГАЕВ*, О. М. БЕРДНИК**

* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

** Национальный авиационный университет, Киев

Получено 01.11.10

Классическая внутренняя задача гидромеханики о напорном течении вязкой жидкости в трубе произвольного сечения обобщена на случай присутствия у ее стенок легкопроницаемой шероховатости (ЛПШ). Математически это означает, что в линейном случае вместо уравнения Пуассона решается уравнение Гельмгольца с разрывным коэффициентом. Численное решение осуществлено в среде MATLAB; предложены m -функции, выражающие разрывный коэффициент $A(y, z)$ в сложной области через булевы переменные. Рассмотрены эллиптическое, прямоугольное и треугольное сечения. Получены как распределения скорости по сечению, так и коэффициент сопротивления соответствующей трубы с ЛПШ. Достоверность численных решений проверяется на тестовых случаях, для которых или имеются результаты других авторов, или возможно аналитическое решение.

Класична внутрішня задача гідромеханіки про напірний потік в'язкої рідини в трубі довільного перетину узагальнена на випадок присутності поблизу її стінок легкопроничної шорсткості (ЛПШ). Математично це означає, що у лінійному випадку замість рівняння Пуассона розв'язується рівняння Гельмгольца з розривним коефіцієнтом. Чисельний розв'язок здійснено в середовищі MATLAB; запропоновані m -функції, що виражають розривний коефіцієнт $A(y, z)$ у складній області через булеві змінні. Розглянуті еліптичний, прямокутний і трикутний перетини. Отримані як розподіли швидкості по перетину, так і коефіцієнт опору відповідної труби з ЛПШ. Достовірність чисельних розв'язків перевіряється на тестових випадках, для яких або існують результати інших авторів, або є можливим аналітичний розв'язок.

Classical problem of pressure-driven internal viscous flow through a pipe with non-circular cross-section is generalised for presence of an easily penetrable roughness (EPR) near its walls. It means mathematically that in linear case Helmholtz equation with a discontinuous coefficient $A(y, z)$ is solved instead of Poisson equation. Numerical solution is performed in MATLAB environment; m -functions are offered that express discontinuous coefficient through Boolean variables in complex domains. Elliptical, square and triangular cross-sections have been considered. Velocity distributions over cross-sections were obtained as well as resistance coefficients for pipes with EPR considered. Validation of solutions was tested for particular cases for which either results of other authors or analytical solutions are available.

ВВЕДЕНИЕ

В теплотехнике и машиностроительной гидравлике нередко встречаются задачи нахождения параметров потока в каналах некруглого нормального сечения – квадратного или прямоугольного, эллиптического, треугольного, трапецеидального и т.п. Эти задачи были сформулированы в классических монографиях и учебниках [1–5], изучаются в современных учебных пособиях машиностроительного профиля [6, 7] и продолжают исследоваться для разнообразных приложений [8–12].

По методологическим соображениям теоретическое исследование часто начинают с анализа ламинарного движения вязкой несжимаемой жидкости. В то же время миниатюризация ряда устройств в определенных областях современной техники приводит к тому, что такие "ламинарные" решения приобретают и самостоятельное практическое значение. В последние годы интерес исследователей обращен также на движение жидкости в каналах

с пористыми вставками или даже целиком заполненных пористым материалом [12, 13]. Наши исследования моделей легкопроницаемой шероховатости [14–16] привели и нас к задачам ЛПШ в каналах произвольного сечения.

Напорные потоки жидкости через трубы того или иного сечения (круглого и эллиптического, квадратного и прямоугольного, треугольного и трапецеидального) исследовались рядом авторов, начиная с 1930-х годов и до сегодняшнего дня, [7, 9–11, 17–19 и др.]. Наиболее просто ставится задача о *стабилизированном потоке* через такую трубу [4, 18], поскольку достаточно далеко от начала трубы можно положить $\partial/\partial x \equiv 0$ и тем существенно упростить уравнения Навье-Стокса без каких-либо дополнительных физических гипотез. Такие задачи в предположении гладкости стенок сводились к уравнению Пуассона для соответствующей области и допускали или точное решение, или приближенное аналитическое [1, 4, 9, 10 и др.]; для сечений произвольной формы используют и численные методы решения [10, 11].

Для ламинарных течений установлено, что максимальное значение скорости потока U_{max} (оно для всех сечений имеет место на оси трубы) и осредненная по сечению скорость U_{cp} связаны соотношением пропорциональности

$$U_{max} = \alpha_1 U_{cp}. \quad (1)$$

А гидравлическое сопротивление трубы выражается обратнo-пропорциональной зависимостью

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\mathbf{Re}}, \quad (2)$$

где коэффициенты $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 64$ для эллипса [4]; $\alpha_1 = 3/2$ и $\alpha_2 = 24$ в плоской задаче; $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 \approx 57$ для квадратного сечения; $\alpha_1 \approx 2$ и $\alpha_2 \approx 35$ для прямоугольника 2×1 ; $\alpha_1 = 2.22$ (2) и $\alpha_2 = 160$ для равностороннего треугольного сечения [1, 4, 9]. Вообще говоря, эти коэффициенты зависят от деформации γ сечения по отношению к базовой форме; определение γ , линейного размера и \mathbf{Re} дано ниже. Зависимость гидравлического сопротивления $\lambda = \lambda(\mathbf{Re}, a, b, \dots)$ от параметров задачи часто оказывается конечной целью расчета, открывающей возможности практического использования.

Постепенную трансформацию потока от некоторого входного распределения скоростей до окончательного (стабилизированного) относят к *начальной участку*; длина последнего также исследовалась в 1960–1980-е годы как экспериментально, так и расчетным путем [17, 20–22]. Аналогичный вопрос о длине начального участка рассматривали Гаев и Шихалиев для плоского канала с легкопроницаемой шероховатостью [16]. В наше время исследования течений через трубы сложного сечения продолжают как ради уточнения известных зависимостей [23], для определенных технических приложений (например, интенсификация теплообмена искусственной шероховатостью на стенках [7]), так и в более детальной физико-математической постановке с мощными вычислительными инструментами [24–26].

Известно также, что в реальных внутренних потоках сквозь сечение с угловыми точками возникают явления, которые отсутствуют в случае круглого или эллиптического сечения. Так, Никурадзе и Прандтль указывали еще в 1926 г. [19] на наличие слабого движения жидкости в трансверсальном (к основному, аксиальному) направлении. И хотя магнитуда такого вращения жидкости составляет ориентировочно 1% от основного (аксиального, продольного) потока, его влияние является существенным в задачах теплообмена и движения несомых частиц [19, 27–29].

Таким образом, обобщение и дополнение задач, ставших уже классическими, новым элементом – легкопроницаемой шероховатостью (ЛПШ), – актуальны и должны базироваться на указанном предыдущем опыте исследований. Недавняя работа [13] наиболее близка к той задаче, которая рассматривается в настоящей статье. В [13] пористая вставка бесконечной длины заполняет все пространство трубы; в данном же случае пористый материал будет находиться лишь возле стенок. Заторможенное течение в пористой среде взаимодействует со свободным потоком вне ее, так что результирующее течение оказывается более сложным как по физическим явлениям, так и по его математическому описанию.

Средства теоретического исследования, которые использовались в предыдущие годы, были нескольких уровней сложности. В частности, для эллиптического и для сечения в форме равностороннего треугольника двумерное линейное уравнение Пуассона, описывающее поток, решалось аналитически [4]. Для более сложных сечений применялись инженерные методы, которые базировались на грубых интегральных уравнениях движения жидкости или на гидродинамической аналогии [6, 30]. "Строгие" решения для прямоугольного сечения получали методом рядов Фурье [2–4, 9].

При наличии в трубе пористой среды [13, 31] или ЛПШ [32, 33] получаем уравнение Гельмгольца [34] вместо уравнения Пуассона. Ноопан [13], исследуя это уравнение с граничными условиями скольжения и "температурного прыжка" (отвечают якобы микроканалам шириной порядка 0.1 мм), также использует ряды Фурье со слагаемыми $\sin(\pi n y) \cos \frac{\pi z}{b} \left(m - \frac{1}{2}\right)$ для поиска аналитического решения. Мы, однако, используем готовый численный инструмент, который предлагается средой MATLAB [35, 36]. Поскольку он еще не является широко известным, необходимые сведения приводим достаточно подробно.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном канале какого-либо произвольного сечения Ω . Возможные сечения, которые здесь рассматриваются, показаны на рис. 1 с их типичными геометрическими характеристиками (как, например, стороны прямоугольного сечения $2a$ и $2b$ на рис. 1, в, г). Положим, что у стенок трубы имеется некоторый пористый слой высотой h (на рис. 1 заполнен точка-

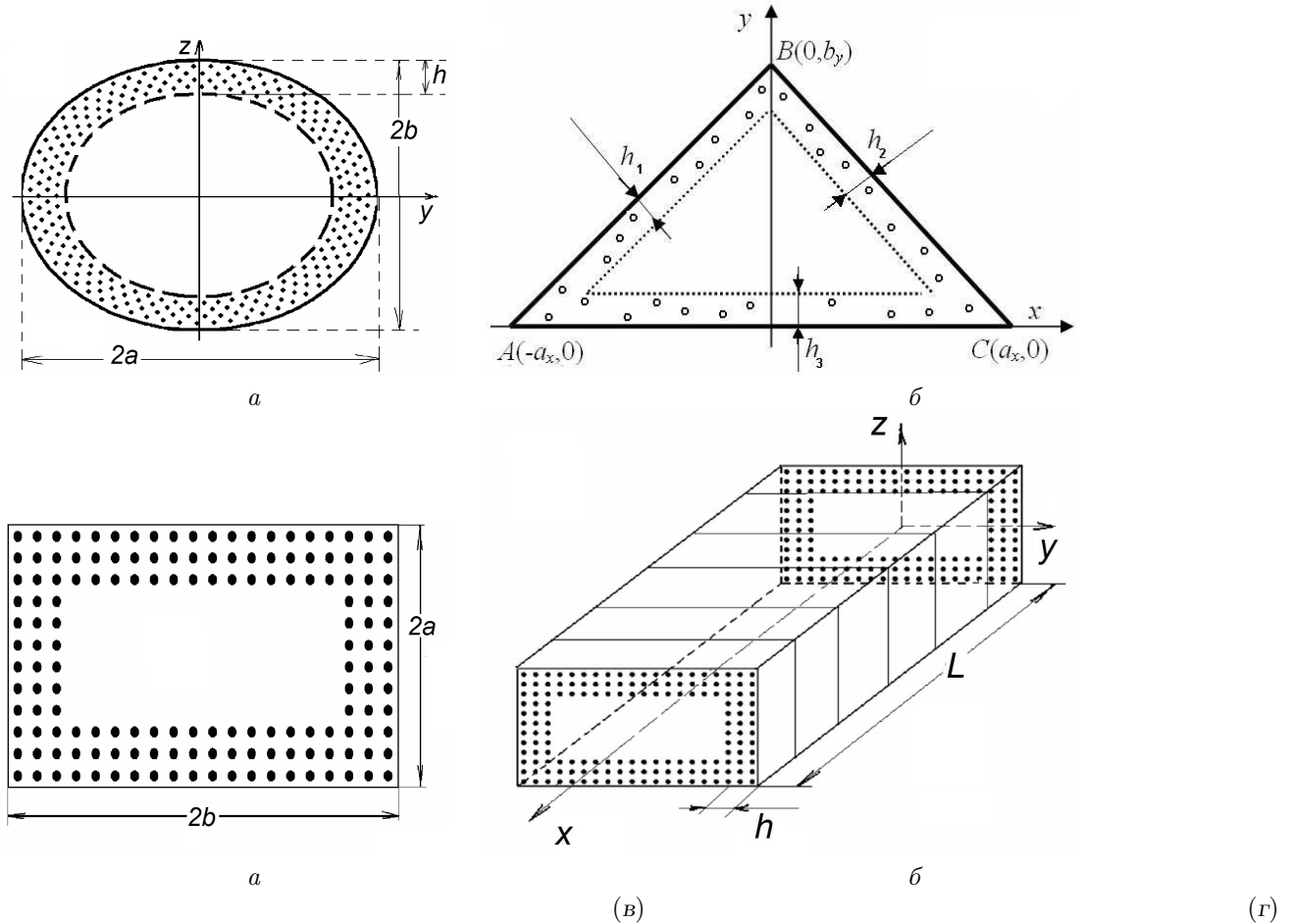


Рис. 1. Схемы труб различного сечения с указанием параметров сечений:
 а – эллиптическое, б – треугольное, в – прямоугольное;
 г – расположение сечений с ЛПШ вдоль трубы (прямоугольный случай)

ми). Его можно представить себе физически состоящим из малых сфер, равномерно "вмороженных" в пространстве.

Декартовы координаты $\{x, y, z\}$ считаем такими, что ось Ox направлена вдоль трубы, а координаты $\{y, z\}$ задают точки в нормальном сечении. Размещение начала координат в каждом расчетном случае будет оговорено отдельно. Так же как в [2, 4, 19] и др., полагаем, что поток жидкости стабилизирован вдоль координаты x , так что $\partial U / \partial x \equiv 0$. Поэтому общие уравнения Навье Стокса упрощаются до одного двумерного эллиптического уравнения [4]:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = -p' + f_*(y, z; U), \quad (3)$$

которое действует в области сечения Ω , и где сила $f_*(y, z; U)$ должна моделировать влияние пористой среды, заполняющей канал полностью [13]

или частично [14, 16, 31] (где p' – продольный градиент давления).

Известны, по меньшей мере, две модели пористой среды – Бринкмана-Форцхаймера [13, 31] и Гаева [14–16]. Первая основана на моделях теории фильтрации и, на наш взгляд, адекватна более плотным пористым пластам и более медленным движениям жидкости, чем рассмотрено здесь. Принимаем вторую модель, которая исходит из установленных аэродинамических закономерностей обтекания единичных тел [4, 30] и где разрывная сила справа моделирует "осредненное" воздействие легкопроницаемой шероховатости (ЛПШ):

$$f_*(y, z, U) = \begin{cases} 0, & (y, z) \notin \text{ЛПШ}, \\ -nk\rho U, & (y, z) \in \text{ЛПШ} \end{cases} \quad (4)$$

(возможно и квадратичное представление этой силы, которое будет рассмотрено в отдельной публи-

кации). Граничным условием данной двумерной задачи является прилипание жидкости к стенкам трубы:

$$U = 0 \quad \text{при} \quad (y, z) \in \partial\Omega. \quad (5)$$

Кроме того, в качестве условий сопряжения [14] следует требовать непрерывности $U(y, z)$ и $\partial U/\partial y, \partial U/\partial z$ при переходе через границу ЛПШ.

В случае плоского канала (параметры прямоугольного сечения таковы, что $\gamma = b/a \rightarrow \infty$) такая задача рассмотрена в [14]; в случае отсутствия ЛПШ, когда $f_*(y, z, U) \equiv 0$, получают квадратичный профиль скорости с максимумом на оси Ox :

$$W = -\frac{p'a^2}{2\mu}. \quad (6)$$

Круглая труба с ЛПШ уже рассмотрена ранее [32]; при этом указано, что наибольшее возможное значение скорости имеет место на оси трубы

$$W \stackrel{Df}{=} U(0) = -\frac{1}{4\mu} p' R^2 \quad (7)$$

и достигается, естественно, в отсутствие ЛПШ. Кроме того, были рассчитаны потоки через эллиптическое и прямоугольное сечения с ЛПШ [33]. Здесь задача обобщается на сечение произвольной формы Ω с ЛПШ у стенок.

Проведем обезразмеривание задачи. Если за масштабы длины и скорости выбрать отвлеченные пока величины L и W , то задача (2), (5) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{z}^2} = -\bar{p}' + \begin{cases} 0, & (\bar{y}, \bar{z}) \notin \text{ЛПШ}, \\ \bar{A} \cdot \bar{U}, & (\bar{y}, \bar{z}) \in \text{ЛПШ}. \end{cases} \quad (8)$$

При этом безразмерное давление $\bar{p}' = p' L^2 / (\mu W)$ оказывается константой, если масштаб W выбирать пропорциональным градиенту физического давления p' , как в (3) или (7). Параметры

$$\bar{A} = -L^2 k n / \nu \quad \text{и} \quad \bar{h} = h / L \quad (9)$$

имеют смысл соответственно безразмерных плотности и высоты ЛПШ. Имеем уравнение Пуассона, если $A = 0$ или $h = 0$, и уравнение Гельмгольца с разрывным коэффициентом $\bar{A}(\bar{y}, \bar{z})$ перед U в общем случае. Граничным условием принимается условие прилипания к стенкам (4).

В дальнейшем знак безразмерности (черту) будем опускать. Алгоритм численного решения остается единым для всех форм сечения. Лишь значение коэффициентов и определение области, где находится ЛПШ, будут зависеть от формы сечения.

При этом наиболее сложным вопросом является определение разрывной функции для треугольного сечения. Рассмотрим возможные случаи.

2. РЕШЕНИЕ ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ СЕЧЕНИЙ КАНАЛА

2.1. Эллиптический канал

Эллиптическое сечение (рис. 1, а) наиболее близко к круговому, уже рассмотренному в [33]. Оно характеризуется двумя параметрами a и b , полюсами. Полагаем, что вдоль стенки трубы положена бесконечной длины пористая среда (ЛПШ) высотой h .

В гидравлике стремятся выбирать масштаб длины L как некий «эквивалентный гидравлический радиус», универсальный для любых сечений, например, в виде отношения площади S к периметру P [2, 4, 30]:

$$L = R_\vartheta = 2 \frac{S}{P}. \quad (10)$$

В каждом из исследованных ниже сечений такая возможность была проверена и отвергнута. В данном случае соотношение (10) привело бы к громоздким математическим выражениям, поскольку периметр P вычисляется через эллиптический интеграл. Поэтому Л.Г. Лойцянский [4] выбирает масштаб длины в виде

$$L \stackrel{Df}{=} ab \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}}. \quad (11)$$

Однако ничто не мешает сделать еще более простой выбор, на котором мы и останавливаемся:

$$L \stackrel{Df}{=} b \quad (b - \text{“полувысота” эллипса}), \quad W = -\frac{L^2 p'}{4\mu}. \quad (12)$$

Инструмент PDE Toolbox (Partial Differential Equations Tool) математического пакета MATLAB, где реализован численный метод конечных элементов, предполагает приведение дифференциальных уравнений в частных производных математической физики к стандартному виду

$$-\text{div}(c \cdot \text{grad } U) + a \cdot U = f \quad (13)$$

с пометкой его типа (эллиптического в данном случае). С учетом выбранных масштабов (12), $c = 1$ и в записи (5) получаем коэффициент $f = 4$. Что же касается коэффициента a из уравнения (5), то здесь возникла определённая сложность, поскольку он должен задаваться по-разному внутри ЛПШ и вне ее, $a = a(y, z)$. Решение этой проблемы в программной среде MATLAB облегчается

возможностью совмещать операции между арифметическими и булевыми переменными ("нестандартная" особенность, отсутствующая во многих иных языках программирования). На этом основании, для реализации коэффициента $a(y, z)$, разрывного при переходе через границу ЛППШ, создана специальная m -функция:

Листинг m -функции $ellipse.m$
для эллиптического сечения:

```
function EPR= ellipse(x ,y, a, b, h, A)
%Комментарий: ф-я задает EPR, плотность ЛППШ
%в эллиптическом сечении:
% EPR=A в слое высотой h у стенок, и
% EPR=0 в середине эллиптической трубы,
%  $x^2/(a-h)^2 + y^2/(b-h)^2 = 1$ .
% a и b – безразмерные полуоси эллипса;
% A – плотность ЛППШ согласно (2) или (4).
EPR=A*((x/(a-h)).^2+(y/(b-h)).^2 > 1);
```

В ней использовано, что для точки $M(y, z)$ булева величина $y^2/(a-h)^2 + z^2/(b-h)^2 > 1$ принимает значение *true*, если M лежит внутри слоя ЛППШ, и значение *false*, если M лежит ближе к центру эллипса, вне ЛППШ. В этой функции параметры a и b , полуоси, произвольны. Однако, с учетом выбора масштабов (12), следует брать $b = 1$ и $a = \gamma = a/b = var$ (вытянутость эллипса).

Для поиска численного решения поставленной задачи действовали в MATLAB следующим образом.

1. В среде `pdetool` задали геометрию области эллипса через вершины $(-\gamma; 0)$, $(0; 1)$, $(\gamma; 0)$ и $(0; -1)$.

2. В меню "PDE Specification..." указываем тип дифференциального уравнения (Elliptic) и его коэффициенты $c=1$, $f=4$, $a=ellipse(x,y,gamma,1,h,A)$ с конкретными численными значениями для $gamma$, h и A .

3. Граничными условиями ("Specify Boundary conditions...") выбрали условия Дирихле (Dirichlet) со значениями параметров $h=1$, $r=0$.

4. Триангулировали область решения (Mesh > Initialize Mesh) и несколько раз "измельчали" сетку (Refine Mesh) для достижения достаточной точности расчета. (Три-четыре "измельчения" равномерной адаптирующейся сетки, соответственно 4 609 или 18 177 треугольных разбиений эллиптической области Ω – приемлемый компромисс между временем счета и его точностью).

5. С помощью меню Solve > Solve PDE запустили вычисления.

6. Визуализировали результат, рис. 2, строя трёхмерное распределение скорости $U(y, z)$ или изотахи в исследуемом сечении Ω ("Plot > Plot

Solution").

7. Экспортировали в среду MATLAB все нужные для дальнейшего параметры ("Boundary > Export Decomposed Geometry..." "PDE > Export PDE Coefficients..." "Mesh > Export Mesh...") и результат расчета ("Solve > Export Solution..."). С их учетом далее определяются наибольшая скорость U_0 , средне-расходная скорость U_{cp} и вычисляется коэффициент сопротивления λ , чему посвящен отдельный раздел в данной статье.

Такое "ручное выполнение" легко может быть автоматизировано (запрограммировано) средствами MATLAB, что и было сделано для каждого из сечений. Учет упомянутых в (4) «условий сопряжения» обеспечен тем, что MATLAB ищет непрерывные решения даже для разрывного коэффициента $a(y, z)$. Распределения скоростей потока вязкой жидкости через эллиптическое сечение вытянутостью $\gamma = a/b = 2$ с высотой ЛППШ $h = 0.4$ представлены на рис. 2 и 3. На первом из них дано трёхмерное поле скорости вдоль трубы и проекции линий равных скоростей (изотахи). Естественно, что изолинии имеют вид эллипсов, сгущающихся в месте больших градиентов скорости. Обращает на себя внимание изгиб профилей и уменьшение скорости в слое ЛППШ. Более отчетливо изгиб виден на рис. 3, где представлены распределения скорости в двух взаимно-перпендикулярных сечениях эллипса. Кроме того, на рис. 3 исследуется влияние плотности ЛППШ, $A = var$. Одинаковым номером указаны соответствующие распределения скорости в указанных сечениях. Можно видеть, что чем ЛППШ плотнее, тем жидкость тормозится сильнее, и в пределе $A \rightarrow \infty$ все течение сосредотачивается в центре канала, который представляет собой эллипс, уменьшенный на ширину h . Более подробный анализ дан на стр. 10.

Расчет можно проверить сопоставлением с известным решением для эллиптической трубы в случае отсутствия ЛППШ, $h = 0$ или $A = 0$. Если решение [4] переписать в принятых здесь масштабах, то будем иметь

$$U = 2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \left(1 - \frac{y^2}{\gamma^2} - z^2 \right).$$

Оно отвечает нашему с высокой точностью. Случай $h \neq 0$ и $A \neq 0$ можно сопоставить с аналитическим решением [32] для круглой трубы, $\gamma = 0$. Также имеем хорошее соответствие.

2.2. Прямоугольный канал

Различные аспекты течения через прямоугольный канал изучались в работах [9, 12, 17–24, 28,

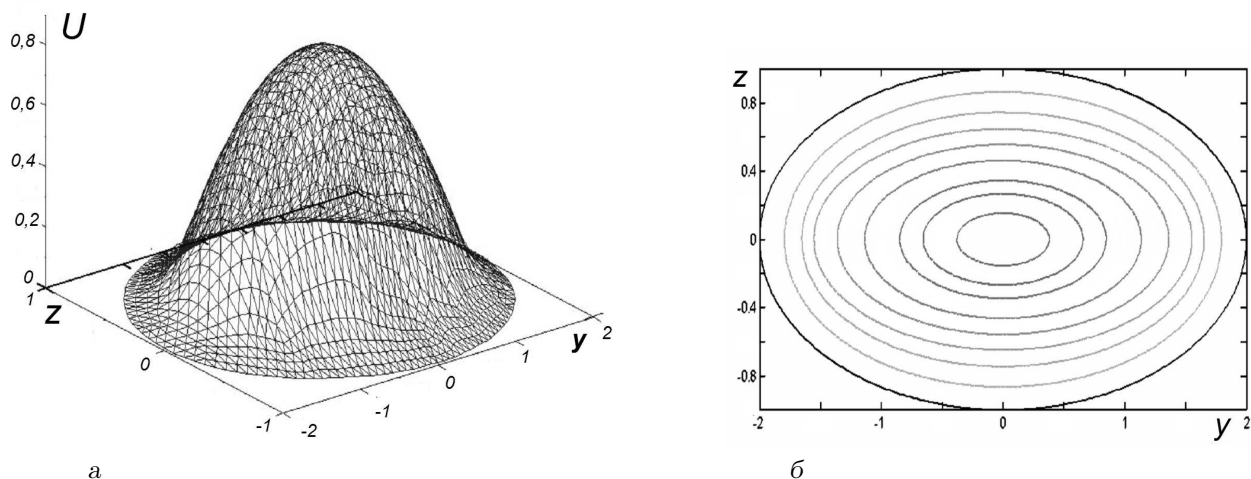


Рис. 2. Профили скорости через эллиптическое сечение $a = 2, b = 1$ с ЛППШ у стенок высотой $h = 0.40$ и плотностью $A = 100$: а – трехмерное представление; б – изохоры

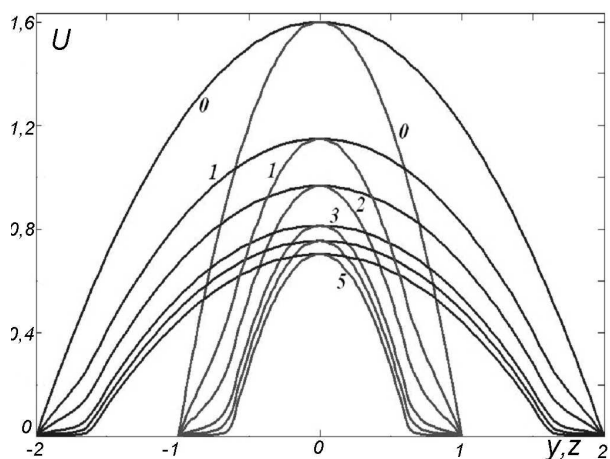


Рис. 3. Изменение распределений скорости через эллиптическое сечение $a = 2, b = 1$ с ЛППШ у стенок высотой $h = 0.40$ и различной плотностью A : 0 – $A = 0$, 1 – $A = 10$; 2 – $A = 50$; 3 – $A = 100$; 4 – $A = 200$; 5 – $A = 400$

37, 39]. Аналогичное нашему течению в прямоугольном канале с силой $f = AU$, действующей во всей области Ω , рассматривалось в [13]. В случае прямоугольного сечения масштаб длины можно было бы выбрать как „эквивалентный радиус” (10), [23]:

$$L = R_э = 2 \frac{S}{P} = \frac{ab}{a+b}, \quad (14)$$

что часто и делают в гидравлике (S и P – соответственно площадь сечения и его периметр; $2a, 2b$ – стороны прямоугольника, рис. 1,в). Тогда сопоставлять решение следовало бы с течением через круглую трубу радиуса $R = L$. Однако мы "во-

зьмем за эталон" вязкое течение между двумя бесконечно-широкими пластинами ("плоская труба") и выберем масштаб длины как полувысоту канала $L = a$ и масштаб скорости по (3). В результате получим для (5) коэффициенты $c = 1$ и $f = 2$. Что же касается разрывной функции $a(y, z)$, то m -функция для прямоугольника требует несколько более сложного логического выражения:

Листинг m -функции *rectangle.m*

для прямоугольного сечения:

```
function EPR = rectangle(x, y, Gamma, ...
                        h1, h2, h3, h4, A)
```

```
%Комментарий: ф-я задает EPR, плотность ЛППШ
```

```
%по сечению прямоугольника
```

```
% -Gamma < x < Gamma, -1 < y < 1.
```

```
% Gamma=b/a – вытянутость прямоугольника,
```

```
% h1, h2, h3, h4 – высота ЛППШ у каждой его стороны,
```

```
% и A – плотность ЛППШ согласно (8).
```

```
EPR=A-A*(x>-Gamma+h1).*(x<Gamma-h2).*...
```

```
(y < 1-h3).*(y > -1+h4).
```

Здесь $(x > -Gamma + h1), (x < Gamma - h2), (y < Gamma - h3)$ и $(y > -Gamma + h4)$ – булевы выражения, которые приобретают значение 1 (*true*), если выполняются условия в скобках, и значение 0 (*false*) при их невыполнении. Очевидно, что построенная из булевых выражений величина EPR будет приобретать численное значение 0, если точка (x, y) принадлежит внутреннему прямоугольнику, свободному от элементов ЛППШ, и значение A, если она лежит в области ЛППШ во внешнем прямоугольнике. (Использована также стандартная MATLAB-операция "поэле-

ментного умножения" .*, [35, 36]). Следовательно, выходная величина EPR ведет себя искомым образом. Предложенная функция учитывает возможное различие высоты ЛПШ h_1, h_2, h_3, h_4 возле каждой из стенок. Реализация численного решения следовала тому же алгоритму 1–7. Количество триангуляционных ячеек прямоугольной области Ω растет примерно как четвертая степень количества операций Refine Mesh (пункт 4); для компромисса между временем счета и его точностью достаточно 3–4 операций измельчения (соответственно 5 625 и 22 257 треугольных ячеек).

На этом заканчивается первый этап вычислений для конкретного прямоугольного сечения (характеризуется вытянутостью $\gamma = b/a$) и конкретных параметров ЛПШ A и h . Его результатом являются распределения скорости потока по прямоугольному сечению. В качестве примера на рис. 4, а представлено трехмерное распределение скоростей потока через прямоугольное сечение 4×2 с ЛПШ у стенок $h = 0.4$ плотностью $A = 50$. Этот же расчет дополнен исследованием влияния плотности ЛПШ A , рис. 4, б.

Достоверность расчетов доказана сопоставлением с аналитическим решением для квадратного сечения [4, 9].

2.3. Треугольный канал

Трубы треугольного сечения также встречаются в гидравлике и теплотехнике [2, 7]. Известно простое и красивое решение задачи Пуассона, соответствующей течению вязкой жидкости через призматическую трубу с равносторонним треугольником в сечении [4]. Здесь рассмотрим более общий случай сечений в виде равнобедренного треугольника; основные обозначения даны на рис. 1, б.

"Правильный" выбор масштаба длины как радиус "эквивалентной" круглой трубы R_3 (10) имело бы следующий громоздкий вид:

$$R_3 = \frac{ab}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a\gamma}{1 + \sqrt{1 + \gamma^2}},$$

где $\gamma = b/a$ – условная мера вытянутости треугольника (при $\gamma = \sqrt{3}$ треугольник равносторонний). Более удобным нам представляется линейный масштаб в виде

$$L = \frac{b}{2}.$$

А масштаб W принимаем как скорость на оси круглой трубы без ЛПШ (7) с радиусом $R = L = \frac{1}{2}b$. Безразмерное уравнение Гельмгольца снова имеет вид (5) со значениями коэффициентов

$c = 1$ и $f = 4$. Отнесение всех размеров сечения к L геометрию задачи не меняет, однако размерный треугольник рис. 1, б перейдет в аналогичный с параметрами $\gamma = 2a/b$ и $\bar{b} = 2$; равностороннему треугольнику отвечает $\gamma = 2/\sqrt{3} \approx 1.1547$.

Как и для предыдущих сечений, в PDE Toolbox MATLAB проблема сводится к написанию m -функции для коэффициента $a(x, y)$ уравнения (5), задающего разрывную плотность ЛПШ. Однако здесь вид m -функции не столь очевиден, хотя и требует лишь элементарных выкладок.

Расстояние точки (x, y) от прямой AB определяется, как известно, через запись уравнения прямой AB "в отрезках", рис. 1, б, и приводит к формуле

$$L_{AB}(x, y) = \frac{|-bx + ay - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если точка (x, y) лежит в исследуемом треугольнике, то условием ее нахождения внутри ЛПШ высотой h_1 при стороне AB будет

$$L_{AB}(x, y) \leq h_1. \quad (15)$$

Аналогичное условие имеет место для h_2 -близости точки к прямой BC , $L_{BC}(x, y) \leq h_2$, где

$$L_{BC}(x, y) = \frac{|bx + ay - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

На основании этих формул составляем окончательное условие «Точка $M(x, y)$ лежит внутри ЛПШ при стенках треугольника ABC »:

$$(x \leq h_3) | (L_{AB}(x, y) \leq h_1) | (L_{BC}(x, y) \leq h_2);$$

когда это условие *истинно* – (x, y) лежит внутри ЛПШ, когда *ложно* – (x, y) вне ЛПШ (знаком $|$ в MATLAB обозначают дизъюнкцию, операцию „ИЛИ“). Теперь необходимая m -функция включается в себя две подфункции:

Листинг m -функции *Triangle.m* для треугольного сечения:

```
function EPR=Triangle(x, y, aX, bY, h1, h2, h3, A)
%Функция для канала треугольного сечения с вершинами
% A(-aX,0), B(0,bY), C(aX,0),
%что равна 0 в середине канала (вне ЛПШ высот h1, h2 и h3)
%и равна A внутри ЛПШ высот h1, h2 и h3,
%расположенных у стенок канала AB, BC, CA.
Logic=(y <= h3)|(Lab(x, y, aX, bY) <= h1)| ...
(Lbc(x, y, aX, bY) <= h2);
EPR=A* Logic;
%Для равностороннего сечения брать aX=2/sqrt(2).
function R=Lab(x, y, aX, bY)
```

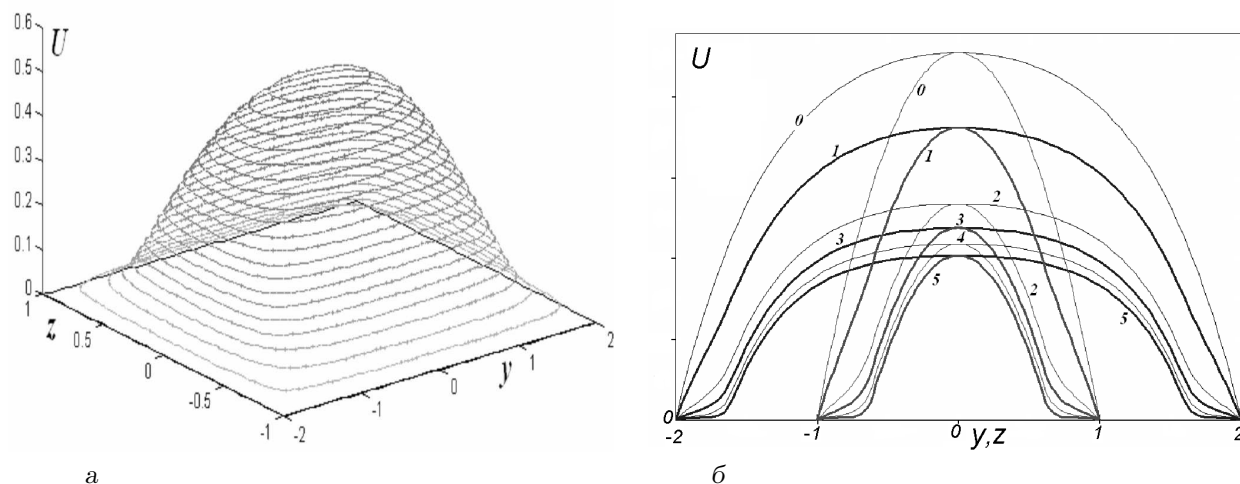


Рис. 4. а – трехмерное распределение скоростей потока через прямоугольное сечение 4×2 при ЛПШ у стенок $h = 0, 40$ и $A = 50$; б – распределения скорости в двух перпендикулярных сечениях при различной плотности ЛПШ A : 0 – $A = 0$; 1 – $A = 10$; 2 – $A = 50$; 3 – $A = 100$; 4 – $A = 200$; 5 – $A = 400$

%Подпрограмма

% расстояния точки (x,y) от прямой АВ,

% где $A(-aX,0)$ и $B(0,bY)$.

$R = \text{abs}(-bY*x + aX*y - aX*bY) / \text{sqrt}(aX^2 + bY^2)$;

function R=Lbc(x,y,aX,bY)

%Подпрограмма

% расстояния точки (x,y) от прямой ВС,

% где $B(0,bY)$ и $C(aX,0)$.

$R = \text{abs}(bY*x + aX*y - aX*bY) / \text{sqrt}(aX^2 + bY^2)$;

%Конец программы Triangle.m.

Как видим, она допускает различные высоты h_1 , h_2 и h_3 у сторон треугольника АВ, ВС и АС соответственно, рис. 1,б. С учетом принятого обезразмеривания следует подставлять $bY = 2$, а aX может быть произвольным; значение $aX = 2/\sqrt{3}$ отвечает равносоставленному треугольнику. Последовательность расчета вязкого течения через треугольное течение в пакете PDE Toolbox – те же этапы 1 – 7, п. 3.1.

На рис. 5, а представлено трехмерное распределение скорости ламинарного потока через треугольное сечение для одного из расчетных случаев; на рис. 5, б – отвечающие этому расчету изотакхи течения. Их форма напоминает закругленные треугольники; изотакхи сгущаются в центральной части канала вне ЛПШ, где скорости резко возрастают (мы вынуждены были удалить часть линий, чтобы избежать муарового эффекта, дающего ложное впечатление). Следующая пара рис. 6 показывает влияние плотности ЛПШ A на распределение скорости в двух сечениях; при этом взяты два “продольных разреза” трубы сечения по высо-

те треугольника (рис. 1, б) и параллельно оси Ox через точку максимума скорости (естественно, координаты этого “центра сечения” $O(0,2/3)$). Как видим, при течениях через ЛПШ жидкость тормозится, и увеличение плотности ЛПШ A ухудшает протекание жидкости через канал (штриховыми линиями показан случай $A=0$, т. е. ЛПШ отсутствует). Движение внутри ЛПШ может даже прекратиться полностью при большом A (кривая 5 рис. 6). В части сечения, свободной от препятствий, течение также ослабевает, но не прекращается.

Полученные численные результаты можно сравнить с решением [4] для равносоставленного треугольника без ЛПШ: имеет место совпадение с высокой точностью.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Можно видеть по результатам расчетов, что ЛПШ (т. е. пористый слой вдоль стенок трубы) существенно влияет на движение жидкости в призматической трубе любого сечения, и это влияние в целом уже охарактеризовано: ЛПШ тормозит поток, через нее протекающий. Тормозящее влияние ЛПШ передается и в свободную от ЛПШ часть сечения трубы. Чем плотнее ЛПШ, заполняющая слой высоты h , тем слабее в ней течение. Количественно это можно характеризовать влиянием плотности A на наибольшую скорость в сечении трубы U_{max} ; такие данные представлены на рис. 7, а. Естественно, что все кривые выходят на асимптоту, поскольку при очень больших A (тео-

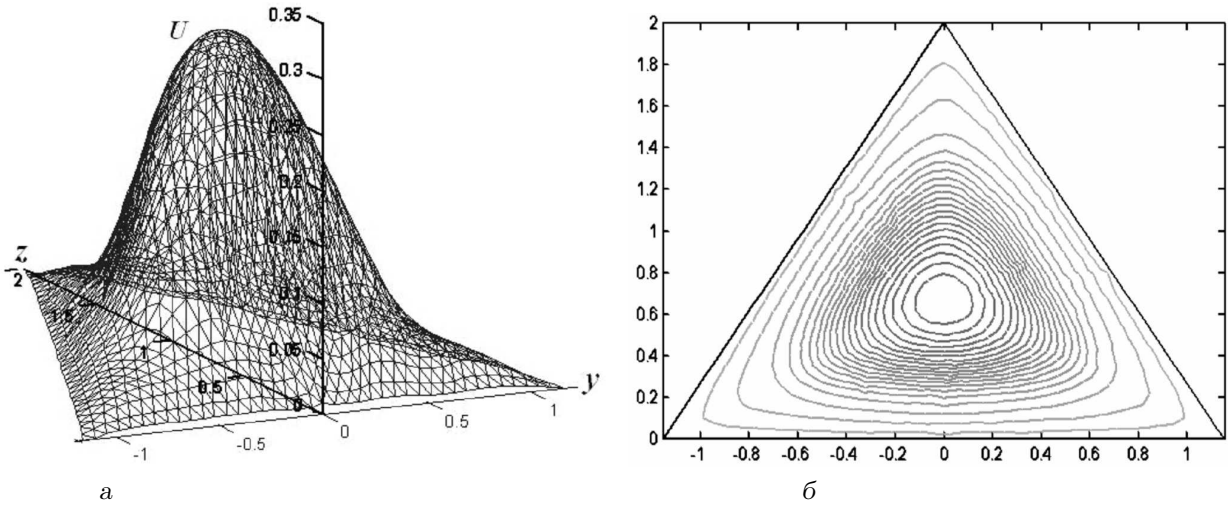


Рис. 5. Трехмерное распределение скоростей потока через сечение в виде равностороннего треугольника с ЛПШ у стенок $h = 0,3$, $A = 100$ (а); отвечающие ему изотахи (б)

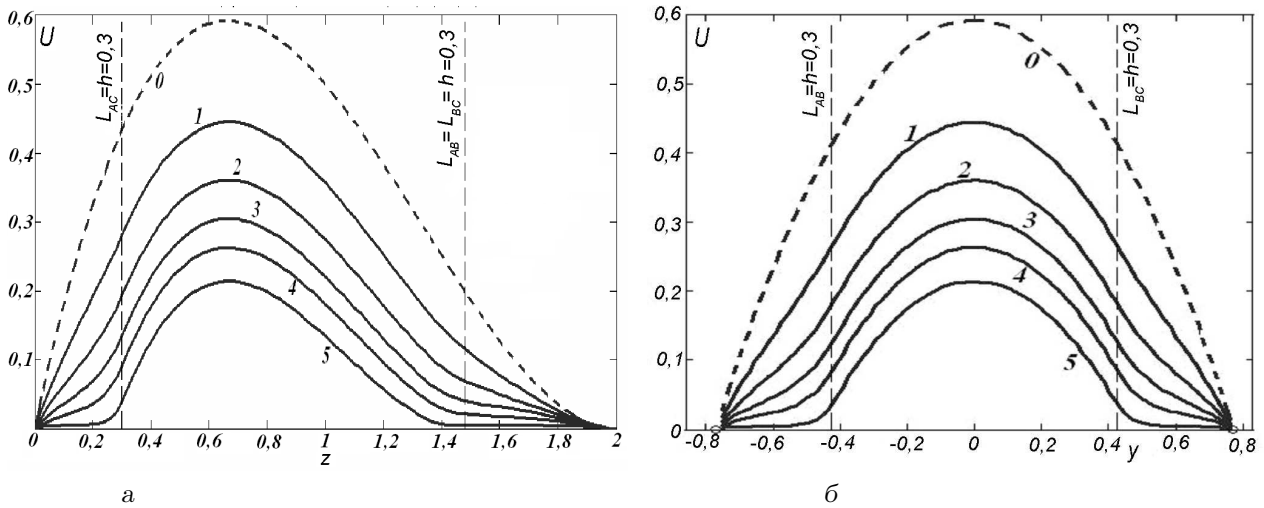


Рис. 6. Изменение распределения скорости в зависимости от плотности ЛПШ A в двух продольных сечениях треугольного равностороннего канала с ЛПШ у стенок высотой $h = 0,3$:

а – сечение по оси симметрии треугольника, (см. рис. 1, б);

б – сечение параллельно основанию треугольника, проходящее через точку максимума скорости (0 – ЛПШ отсутствует, $A = 0$; 1 – $A = 20$; 2 – $A = 50$; 3 – $A = 100$; 4 – $A = 200$; 5 – $A = 900$)

ретически, при $A \rightarrow \infty$) все течение сосредотачивается в свободной от ЛПШ области канала.

Естественно, уменьшается и средне-расходная скорость течения через канал с ЛПШ. В гидравлике всегда интересуются отношением наибольшей скорости к этой средней, U_{max}/U_{cp} . Известно, что при ламинарном режиме течения и в каждом выбранном сечении канала это отношение постоянно; некоторые данные были приведены во "Введении". Это не так при турбулентном течении. Тем не менее, часто принимают

$U_{max}/U_{cp} \approx const$, и приближенное значение этой "постоянной" используют при решении практических задач. Так поступают, например, при выводе уравнений плановой гидравлики [41–44]. И в нашем исследовании, поэтому, указанное отношение подробно анализировалось. Рис. 7, б представляет полученные данные: можно видеть, сколь сильно A влияет на отношение скоростей. Это следует учитывать при использовании моделей плановой гидравлики для течений с проницаемой шероховатостью у дна.

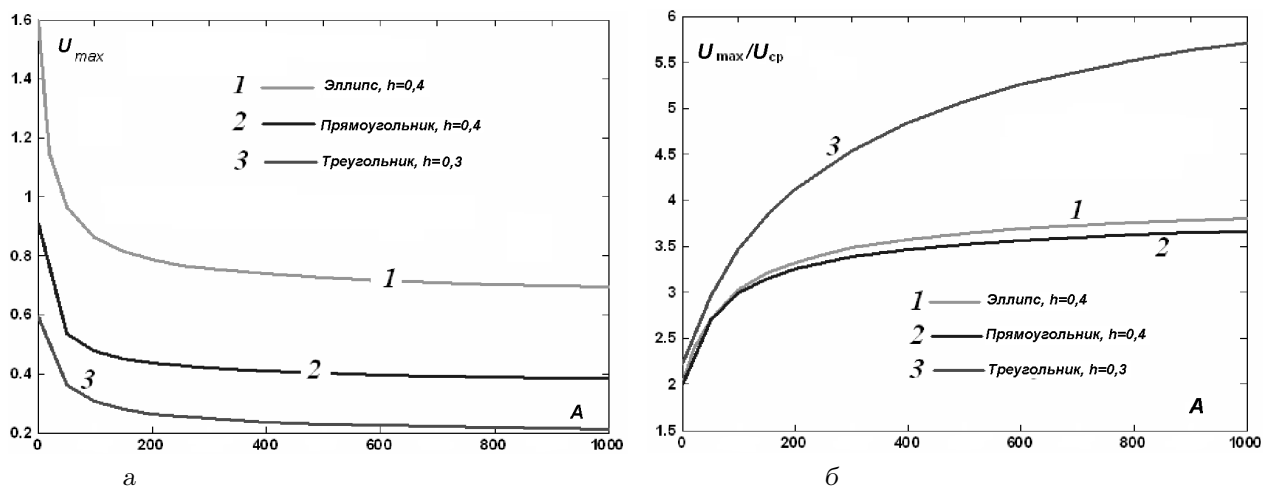


Рис. 7. Влияние A , плотности ЛПШ на максимальную скорость U_{max} на оси сечения (а), и на отношение максимальной к средне-расходной скорости $\frac{U_{max}}{U_{cp}}$ (б):
 1 – эллиптическое сечение с ЛПШ высотой $h = 0.40$,
 2 – прямоугольное сечение с $h = 0.40$, 3 – треугольное сечение с $h = 0.30$

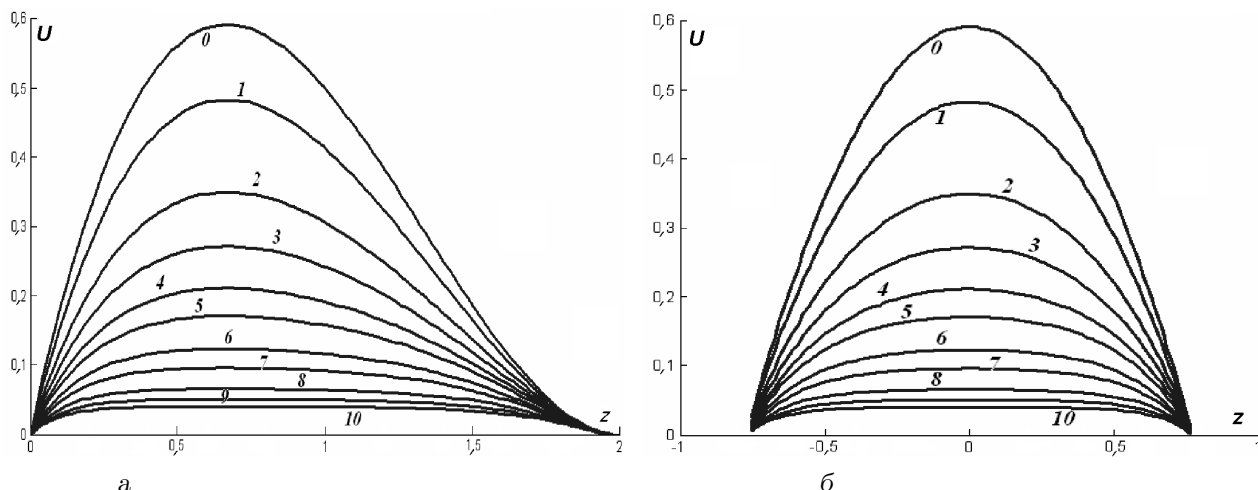


Рис. 8. Распределения скорости во взаимно-перпендикулярных плоскостях трубы равностороннего треугольного сечения, полностью заполненных ЛПШ: 0 – $A = 0$; 1 – $A = 2$; 2 – $A = 6$; 3 – $A = 10$; 4 – $A = 15$; 5 – $A = 20$; 6 – $A = 30$; 7 – $A = 40$; 8 – $A = 60$; 9 – $A = 80$; 10 – $A = 100$;
 а – сечение треугольного основания плоскостью через $O(0, 0)$ и $B(0, 2)$, (см.рис. 1);
 б – сечение треугольника горизонтальной плоскостью через максимум U

Практический интерес представляет исследование напорных течений в трубах, полностью заполненных пористым наполнителем. Уже говорилось, что примером такого исследования является работа [13], где для прямоугольного сечения используется, правда, иная модель пористой среды. Полное заполнение сечения – частный случай данной задачи. Так, для равностороннего треугольного сечения пустого от ЛПШ пространства не останется при $h \geq 2/3$. Такие расчеты проведены.

На рис. 8 представлены профили скорости в трубе, полностью заполненной легкопроницаемой средой. В плоскости, где есть симметрия, они кажутся параболическими при малых A . Но при большой плотности пористой среды A профили вылаживаются в центре канала, как бы теряя тормозящее влияние стенок. Касательно сопротивления заполненного канала, можно показать на основании расчетов, что комплекс $\lambda \cdot Re$ растет примерно по линейной зависимости от A .

Поле скорости исследуемых течений $U(y, z)$ является двумерным, неизменяющимся вдоль Ox . Движение частиц жидкости поступательно вдоль Ox , но в то же время – и с компонентами вращения

$$2\omega_x = 0, \quad 2\omega_y = \partial U / \partial z, \quad 2\omega_z = -\partial U / \partial y.$$

Рассмотрим, как наличие ЛПШ изменяет абсолютную величину вектора завихренности $\vec{\omega} = \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$, который лежит в плоскости сечения Ω

$$\Gamma = |\vec{\omega}|^2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right). \quad (16)$$

Соответствующий пересчет найденных полей течений также может быть легко выполнен в MATLAB; результаты приведены на рис. 9 и 10. Их следует сравнить с изотопами, данными для соответствующих сечений на рис. 2, б и 5, а.

Изолинии завихренности в случае эллипса с гладкими стенками, левый (рис. 9, а), являются собой эллипсы, "распрямляющиеся в бесконечность". Следует исследовать роль угловых точек в сечении. Известно, что они вызывают слабые вторичные течения в трубе, [5, 27, 38]. Вторичные течения, однако, принципиально не могут быть исследованы в "ламинарной постановке", поскольку она исходит из того, что $U_y \equiv 0$, $U_z \equiv 0$. Все же поле ротора (16) представляет некоторый интерес [27]. Для прямоугольного сечения с гладкими стенками оно представлено на рис. 10, а: можно сказать, что изолинии овальной формы "разрываются" возмущениями, исходящими из угловых точек; при этом смена режима происходит на удалении примерно 0.40 от вертикальных стенок. В экспериментальных исследованиях турбулентных течений в прямоугольном канале [19, 27, 28, 46] особое внимание обращалось на вторичные движения жидкости в поперечном направлении. При этом изотопах получались не близкими к овальным, а деформированными, вытянутыми к угловым точкам. Имеет место слабое движение жидкости по биссектрисам к стенке, [5, 19, 27, 28, 46]. В наших же расчетах, как и в работе [17], изотопах овальны (яйцеобразны) для всех сечений. Это еще раз свидетельствует о том, что данное явление специфично для турбулентности, "позволяющей" пульсации жидкости в сторону от главенствующего направления Ox . Более подробно проблема вторичных течений, сложная и все еще недостаточно исследованная, обсуждается в монографии [38].

Можно ожидать, что введение в поток проницаемой шероховатости некоторой высоты h и плотности A существенно изменит поле течения. Правый рис. 9 дает пример изменений, которые ЛПШ

$h = 0,40$ и $A = 30$ порождает в эллиптической трубе (граница пористой среды дана штриховой линией). Правый же рис. 10 сочетает влияние ЛПШ и угловых точек: поле ротора "воспроизводится" в свободной части сечения (ограничена тонкой линией) и значительно деформируется внутри ЛПШ. (Следует оговорить, что часть изолиний нами убрана, чтобы на рисунках не возникало ложных муаровых узоров).

4. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРУБ НЕКРУГОВЫХ СЕЧЕНИЙ

В практической гидравлике напорных течений часто достаточно установить лишь связь между градиентом давления p' и расходом жидкости Q , т.е. коэффициент гидравлического сопротивления λ . Интегрируя полученные в п. 3.1–3.3 распределения скорости через то или иное сечение, имеем безразмерный расход жидкости и среднюю скорость:

$$Q = \iint_{\Omega} U(y, z) dy dz, \quad U_{cp} = \frac{Q}{F}, \quad (17)$$

где F – площадь сечения Ω . С учетом того, что численный расчет предоставляет результат в виде таблицы скоростей $\{U_{ij}\}$ в серединах треугольных площадок $\{y_i, z_j\}$ с еще неизвестными площадями $\{F_{ij}\}$, первую формулу следует использовать в следующем дискретизованном виде:

$$Q \approx \sum_{i,j} U_{ij} F_{ij} \quad (18)$$

(здесь i, j – принятая в MATLAB нумерация триангуляционных площадок). Еще одна оценка точности расчетов – это сумма всех площадей $\sum_{i,j} F_{ij}$, которая должна приобретать значение площади сечения Ω (точнее, в MATLAB запрограммировано, что $\sum_{i,j} F_{ij}$ дает $4F$, но это результат деления в (17) не изменяет). Массив площадей триангуляционных площадок $\{F_{ij}\}$ можно получить в PDE Toolbox MATLAB посредством "экспорта" результатов в рабочее пространство (п. 7 алгоритма), исполняя команду:

```
>> [K,F]=asmpde(b,p,e,t,c,a,f);
```

(знак >> показывает исполнение из командной строки).

"Гидравлическое сопротивление" λ вводят как коэффициент пропорциональности между градиентом давления и напором средней скорости, т.е. [2, 4, 23]

$$p' \stackrel{Df}{=} - \frac{\lambda}{2L} \frac{\rho U_{cp}^2}{2} \quad (19)$$

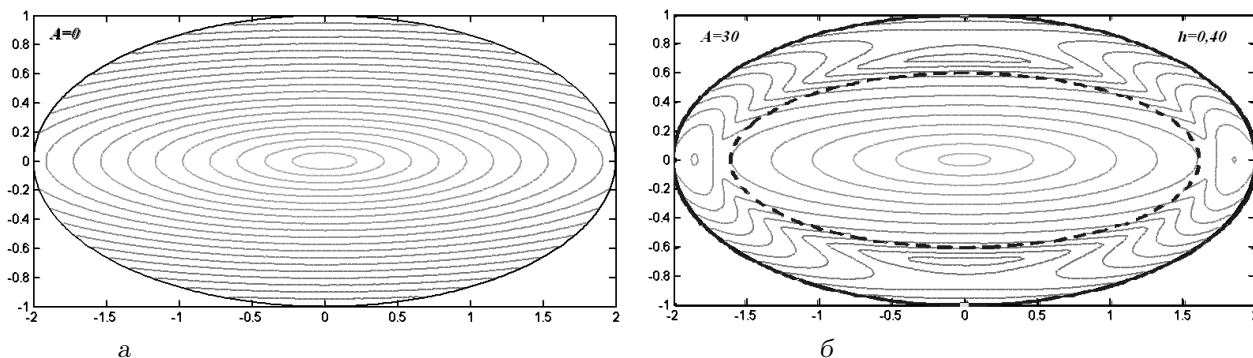


Рис. 9. Изолинии модуля завихренности (16) в эллиптической трубе с гладкими стенками (а) и при наличии ЛПШ $h = 0,40$, $A=30$ (б)

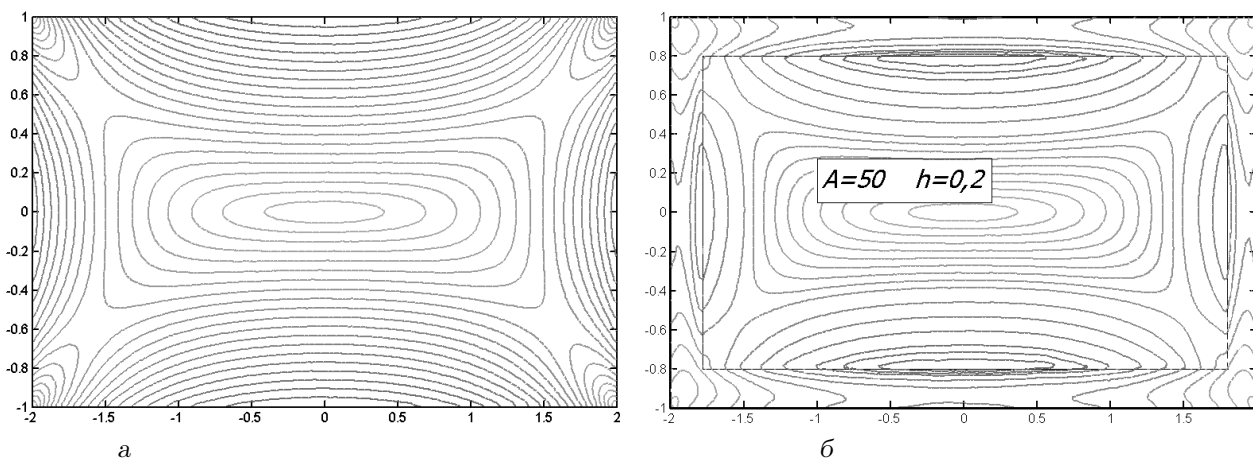


Рис. 10. Изолинии модуля завихренности (16) в прямоугольной трубе 2×1 с гладкими стенками (а) и при наличии ЛПШ $h = 0,20$, $A=50$ (б)

(в отличие от (15), здесь речь идет о размерной средней скорости U_{cp} ; $2L$ – характерный "диаметр" области Ω). Выделяя в (19) число Рейнольдса, построенное по осредненной скорости

$$\mathbf{Re} = \frac{2LU_{cp}}{\nu}, \quad (20)$$

преобразуем (19) к виду

$$p' = - \frac{\lambda \rho \nu U_{cp}}{8L^2} \mathbf{Re} = - \lambda \mathbf{Re} \bar{U}_{cp} \frac{\mu W}{8L^2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lambda \mathbf{Re} = \frac{\alpha_2}{\bar{U}_{cp}}, \quad (21)$$

как в (2). Коэффициент $\alpha_2 = - \frac{8p'L^2}{\mu W}$ постоянен, так как оба используемых масштаба скорости W ,

(3) или (7), пропорциональны $-\frac{p'L^2}{\mu}$. Получаем, что для эллипса и треугольника $\alpha_2 = 32$, поскольку использован масштаб (7). В то же время, для прямоугольного сечения использовали (3), принимая плоское течение за базу сравнения. Поэтому $\alpha_2 = 16$.

Формула (21) обобщает известные формулы для исследованных здесь сечений на случай наличия ЛПШ у стенок канала; через величину в знаменателе \bar{U}_{cp} она учитывает высоту h и плотность ЛПШ A . Необходимые расчеты проводим в MATLAB:

```
>> Area=sum(F); Q=sum(u.*F);
>> Us=Q/Area, LambdaRe=Alfa2/Us
```

Результирующие зависимости $\lambda \mathbf{Re} = \varphi(A, h, \gamma)$ представлены на рис. 9. Естественно, что присутствие ЛПШ у стенок ухудшает гидравлику трубы; приведенные графики показывают роль как высо-

ты ЛПШ h , так и ее плотности A .

Все кривые исходят из точек на оси абсцисс, отвечающих известным данным при отсутствии ЛПШ. При таком сопоставлении следует иметь в виду те линейные масштабы, для которых получены соответствующие известные формулы (1) и (2). Для эллиптического сечения, например, известно значение $\alpha_2 = 64$, [4]. Однако оно получено для "эквивалентного диаметра" по (11). Преобразуя определение величин λ по (19) и Re по (20) к принятому здесь масштабу (17), получаем $\alpha_2 = 40$. Аналогично – для сечения в виде треугольника. Масштаб для прямоугольника у нас совпадает с [4].

Данные о сопротивлении труб легко получить в эксперименте. Тем не менее, имеется лишь один автор, Kouwen [45], который провел подобные измерения для открытого канала. Данная работа, надеемся, будет способствовать проведению аналогичных экспериментов. Практическое использование ЛПШ должно подразумевать компромисс между дополнительными потерями "на гидравлику" с выигрышем целевой функции (например – увеличением теплоотдачи).

ВЫВОДЫ

Задача о ламинарном стабилизированном потоке вязкой жидкости в призматическом канале произвольного сечения обобщена на случай присутствия легкопроницаемой шероховатости у стенок канала. Соответствующее уравнение Гельмгольца с разрывной правой частью решалось численно с помощью PDE Toolbox MATLAB. Для каждого вида сечений (прямоугольного, эллиптического и треугольного) предложена необходимая m -функция, отражающая скачек силы внутри и вне ЛПШ. Любое другое сечение может быть рассчитано в MATLAB аналогичным образом.

Получены распределения продольной скорости потока в зависимости от относительной высоты ЛПШ h и ее безразмерной плотности A . Рассчитана зависимость коэффициента гидравлического сопротивления λ как функция от Re , а также h и A , что обобщает известные зависимости $\lambda = c_2/Re$ на присутствие двух дополнительных параметров задачи.

Показано, сколь сильно наличие ЛПШ меняет структуру течения. Но при большой плотности ЛПШ A течение «воспроизводит исходное» в меньшем размере, в свободной от ЛПШ части трубы. Практически использовать ЛПШ следует, вероятно, лишь при малых A , достигая некоторого

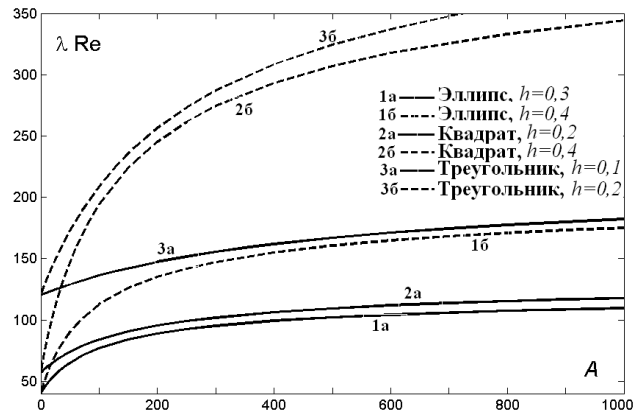


Рис. 11. Гидравлическое сопротивление каналов различного сечения (1 – эллипс, 2 – квадрат, 3 – треугольник) в зависимости от плотности ЛПШ A и ее высоты h

компромисса между полезными явлениями в потоке и ухудшением его гидравлики.

Было бы интересно рассмотреть влияние ЛПШ на трансверсальное вторичное течение, которое имеет порядок 1% от основного [19, 27, 28, 46]. Это явление, однако, не может быть рассмотрено в "ламинарной" постановке. Тем не менее, результаты могут быть использованы для его моделирования, согласно [29], или в дальнейшем – для моделирования возникновения неустойчивости [37, 39] и турбулентности.

1. Шиллер Л. Движение жидкостей в трубах. – М.-Л.: ОНТИ, 1932. – 230 с.
2. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – М.: Энергия, 1967. – 412 с.
3. Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982. – 472 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 742 с.
6. Андрийчук М.Д., Коваленко А.А., др. Аэрогидромеханика: учебн. пособие. – Луганск: ВНУ им. В. Даля, 2009. – 516 с.
7. Павловський В.Г. Особливості гідродинаміки і теплообміну в некруглих каналах. – Харків: НТУ "ХП", 2006. – 104 с.
8. Khalifa M.M.A., Trupp A.C. Measurements of fully developed turbulent flow in a trapezoidal duct. Experiments in Fluids. – 1988. – 6. – P. 344–352.
9. Филиппов В.М. Экспериментальное исследование развития ламинарного течения в квадратном канале. Аэромеханика. – М.: Наука. – 1976. – С. 217–229.
10. Кныш Л.И. Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических каналах некруглого поперечного сечения // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки. – 2009. – т. IX. – С. 31 – 40.

11. Бабич А.П., Евдокимов Д.В. Расчет течения Пуазейля в канале сложного сечения // Матеріали ІІ міжн. наук. конф. "Прикладні проблеми аеро-гідромеханіки та тепломасопереносу". – Дніпропетровськ: ДНУ, 2010.– С. 17–18.
12. Kuznetsov A.V. Flow in a Curved Porous Channel with a Rectangular CrossSection // J. of Porous Media.– 2008.– **11**.– P. 241–246.
13. Hooman K. Heat and fluid flow in a rectangular microchannel filled with a porous medium // Int.j.Heat and Mass Transfer.– 2008.– **51**, № 25–26.– P. 5804–5810.
14. Гаев Є.О. Моделі легкопроникної шорсткості для задач гідромеханіки і теплофізики. Дис. докт. техн. наук.– К.: ІГМ НАН України, 2000.– 345с.
15. Flow and Transport Processes with Complex Obstructions: Applications to Cities, Vegetative Canopies, and Industry (Ye.A. Gayev and J.C.R. Hunt editors) // NATO Science Series.–Springer Publ., 2006.– **236**.– P. 350.
16. Гаев Е.А., Шихалиев С.З. Длина входного участка канала с линейной легкопроницаемой шероховатостью // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– Вып. 5 (77).– С. 13–19.
17. Han I.S. Hydrodynamic entrance length for incompressible flow in rectangular ducts //Trans. ASME, J. Applied Mechanics.– 1960.– V.27, p.3.– P. 403-408.
18. Карлсон, Хорнбек. Численный расчет ламинарного течения на начальном участке канала квадратного сечения // Тр. Америк. об-ва инж.-мех. – 1973.–**40**, Сер. E, № 1.– С.26–32.
19. Gessner F.B., Jones J.B. On some aspects of fully-developed turbulent flow in rectangular channels // J. Fluid Mech.– 1965.– **23**.– P. 689–713.
20. Спэрроу, Хиксон, Шевит. Экспериментальное исследование развития ламинарного потока в прямоугольных трубах // Тр. Америк. об-ва инж.-мех. – 1967.– **89**, Сер. D, № 1.– С. 131–140.
21. Уигинтон, Долтон. Несжимаемое ламинарное течение в начальном участке канала прямоугольного сечения // Тр. Америк. об-ва инж.-мех.– 1970.–**37**, Сер. E, № 3.– С.282–284.
22. Beavers G.S., Sparrow E.M., Magnuson R.A. Experiments on hydrodynamically developing flow in rectangular ducts of arbitrary aspect ratio // Int. J. Heat and Mass Transfer.– 1970.– **13**, N 4.– P. 689–701.
23. Бутенко А.Г. Сопrotивление труб прямоугольного поперечного сечения. // Труды Одесского политехн. ун-та.– 2003.– Вып. 1(19).– С. 221–224.
24. Huser A., Birigen S. Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow in a Square Duct // J. Fluid Mech.– 1993.– **257**.– P. 65–95.
25. Березин С.Б., Комарова Е.С., Пасконов В.М. Суперкомпьютерное исследование нестационарных трехмерных течений несжимаемой жидкости в каналах прямоугольного сечения на основе модели Навье-Стокса // Вычислительные методы и программирование.– 2008.–**9**.– С. 395–400.
26. Попов А.Г., Прохур Н.З., Химич А.Н. Алгоритмы расчета вязких течений на МІМD-компьютерах // УСиМ.– 2008.– № 2.– С. 60–63.
27. Brundrett E., Baines W.D. The production and diffusion of vorticity in duct flow // J. Fluid Mech.– 1964.– **19**.– P. 375–394.
28. Mellling A., Whitelaw J.H. Turbulent flow in a rectangular duct // J. Fluid Mech.– 1976.– **78**, p. 2.– P. 289–315.
29. Сурков С.В. Волновая модель вторичных течений в призматических каналах // Труды Одесского политехн. ун-та.– 2002.– Вып. 2(18).– С. 184–188.
30. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопотивлениям.– М.: Машиностроение, 1975. – 558 с.
31. Федоровська М.В. Чисельний аналіз розвитку течії рідини у каналі з оберненою сходиною, що заповнена пористим середовищем // Вісник донецького ун-ту, Сер. А: Природничі науки.– 2002. – Вып. 1.– С. 190–194.
32. Гаев Є.О., Бердник О.М. Одновимірна ламінарна течія через круглу трубу з легкопроникною шорсткістю // Промислова гідраліка і пневматика.– 2008.– №4(22).– С.34-38.
33. Бердник О. М. Моделювання потоку в еліптичному каналі з легкопроникною шорсткістю // Труды научно-технической конф. "Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях" (КМНТ-2010). Харьков, 2010.– Ч.1.– С.46-48.
34. Кошляков Н.С., Глинер Н.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Учебное пособие.– М.: Высшая школа, 1970.– 712 с.
35. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB7.– СПб.: БХВ-Петербург, 2005.– 1104 с.
36. Гаев Є.О., Нестеренко Б.М. Універсальний математичний пакет MatLab і типові задачі обчислювальної математики: Навч.посібник.– К.: НАУ, 2004.– 176 с.
37. Uhlmann M., Nagata M. Linear stability of flow in an internally heated rectangular duct // J. Fluid Mech.– 2006.– **551**.– P. 387–404.
38. Корнилов В.И. Пространственные пристенные турбулентные течения в угловых конфигурациях. РАН СО: ИТПМ. – Новосибирск: Наука, 2000.– 398 с.
39. Tatsumi T., Yoshimura T. Stability of the laminar flow in a rectangular duct // J. Fluid Mech.– 1990.– **212**.– P. 437–449.
40. Струтинський С. Теоретичні дослідження гідродинамічних процесів регульованої гідростатичної опори на основі методу ламінарної аналогії // Промислова гідраліка і пневматика.– 2008.– №4(22).– С. 60–66.
41. Емцев Б.Т. Двухмерные бурные потоки. – М.: Энергия, 1967. – 212 с.
42. Шеренков И.А. Прикладные плановые задачи гидравлики спокойных потоков. – М.: Энергия, 1978. – 240 с.
43. Rodi W. Turbulence Models and Their Applications in Hydraulics. A State-of-the-Art Review. 3rd edition. – IAHR Monograph Series, A.A.Balkema: Rotterdam/Brookfield, 2000. – 104 pp.
44. Gayev Ye. Theoretical modelling of river flows with penetrable roughnesses.– Report to Institute of Hydromechanics, University of Karlsruhe, March 1997. - 45 pp.
45. Kouwen N. Field estimation of the biomechanical properties of grass // J. Hydraulic Research.– 1989.– **26**(5).– P. 559–569.
46. Тепакс Л.А. Равномерное турбулентное движение в трубах и каналах.– Таллин: Валгус, 1975.–255 с.