

УДК 301.17.15; 301.07.13

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КВАЗИГОРИЗОНТАЛЬНОГО ВИХРЯ С ПРИПОВЕРХНОСТНЫМ ДРЕЙФОВЫМ ТЕЧЕНИЕМ, ВЫЗВАННЫМ СТАЦИОНАРНЫМ ВЕТРОВЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

П. В. ЛУКЬЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 17.02.2010

В работе численно решается задача взаимодействия квазигоризонтального компактного вихря с дрейфовым экмановским течением, вызванным стационарным ветровым воздействием. Модель задачи – негидростатическая. Используются полные уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска, осредненные по Рейнольдсу. Для аппроксимации коэффициентов горизонтальной турбулентной диффузии используется модель Смагоринского, а для вертикальных – Прандтля-Обухова. В начальный момент вихрь задается под полем дрейфового течения в непосредственной близости к нему или в нижней части течения. Со временем, из-за вертикальной диффузии, происходит взаимодействие верхней части вихря с дрейфовым течением. Полученные численные результаты согласуются со здравым смыслом: вихрь наклоняется в вертикальной плоскости, а его верхняя часть сносится дрейфовым течением. Взаимодействие можно классифицировать как слабое и сильное. При слабом взаимодействии вихрь просто сносится течением и слабо деформируется на каждом из горизонтов. При сильном взаимодействии горизонтальная структура вихря уже не напоминает свой первоначальный вид.

У роботі чисельно розв'язується задача взаємодії квазигоризонтального компактного вихря з дрейфовою течією, що визвана стаціонарною вітровою дією. Модель задачі – негідростатична. Використовуються повні рівняння Нав'є-Стокса у наближенні Буссинеска, які осереднено за Рейнольдсем. Для апроксимації коефіцієнтів горизонтальної турбулентної дифузії використовується модель Смагоринського, а для вертикальних – Прандтля-Обухова. У початковий момент вихор задається під полем дрейфової течії у безпосередній близьості до неї або у її нижній частині. З часом, із-за вертикальної дифузії, відбувається взаємодія верхньої частини вихора з дрейфовою течією. Отримані результати узгоджуються зі здоровим глуздом: вихор нахилиється у вертикальній площині, а його верхня частина зносится дрейфовою течією. Взаємодію можна класифікувати як слабку та сильну. При слабкій взаємодії вихор просто зносится течією і слабо деформується на кожному з горизонтів. При сильній взаємодії горизонтальна структура вихора вже не нагадує свій початковий вигляд.

In this paper, the interaction of quasihorizonthal vortex and subsurface Ekman drift flow caused by stedy wind effect has been investigated. Reynolds averaged Navier-Stokes equations (RANS) with Boussinesk approximation for density field are used. The model of the problem is non-hydrostatical. Horizontal diffusion is approximated according to Smagorinsky model, and vertical one – by Prandtl-Obuhov model. At initial time moment the vortex is set under drift flow layer close to it or at lower part of the flow. Owing to vertical diffusion, when the time pass vortex become interact with drift flow. Obtained results agree with common sence: vortex bends in vertical cross-section plane and the domain of vortex-drift flow interaction moves along (shifts by) dirft flow. The interaction may be classified as weak one and strong one. When weak interaction, vortex just shifted by drift flow and weakly deformed at each horizon. When strong interaction, the vortex horizontal structure does not resemble it's initial one.

## ВВЕДЕНИЕ

Одним их широкораспространенных в природе типом движений являются ветер. Еще в начале прошлого столетия Экманом были открыты и исследованы течения, вызванные ветровым воздействием [1]. При постоянном ветровом воздействии на водную поверхность в приповерхностном слое, благодаря турбулентной вязкости, генерируются две компоненты скорости: продольная (в направлении ветра) и поперечная (в перпендикулярном направлении). Более подробно этот вопрос изложен в монографии [2]. В то же время, в прибрежной шельфовой зоне наблюдается множество мелкомасштабных вихрей, часть из которых может существовать довольно длительное время (несколько суток) [3, 4]. Взаимодействие таких ви-

хрей с дрейфовым экмановским течением является одним из механизмов как вертикального, так и горизонтального водного обмена в прибрежной шельфовой зоне или в мелководных водоемах, что обуславливает практический интерес к исследованиям в данной области.

Изложим кратко основные научные результаты исследований. К ним относятся работы, где в двумерном приближении в горизонтальной плоскости рассмотрен снос вихря дрейфовым течением, работы по моделированию экмановского слоя с дрейфовым течением и, наконец, работы по циркуляции (вертикальный обмен) вод в шельфовых зонах с учетом ветрового воздействия.

В работе [5] представлен анализ симметричных циркуляций вращающегося бароклинного течения, на которое воздействует стационарный тер-

мический ветер. Также учитывается механизм турбулентной диффузии в виде модели Лапласа (постоянное трение). Решается двумерная задача. Ось симметрии направлена вдоль горизонтальной оси и общие трехмерные уравнения переписаны в терминах функции тока в вертикальной плоскости. Показано, что под действием вертикального сдвигового течения происходит искривление гидродинамических полей.

Представляет также интерес работа [6], где изучается циркуляция прибрежных вод с учётом ветрового воздействия. Учитываются сила Кориолиса, турбулентная диффузия и адвекция. Недостатком этой работы является двумерность модели, которая рассматривает течение лишь в вертикальной плоскости.

Следующие две работы относятся к изучению непосредственно экмановского дрейфового течения. В первой из них [7] представлены результаты моделирования нестационарного экмановского слоя. Однако к данной работе она не имеет непосредственного отношения. Во второй работе [8] представлены результаты численного моделирования ветровых течений в стратифицированных водоёмах. Общие трехмерные уравнения движения рассматриваются в приближении гидростатики и "твёрдой крышки". Полученные результаты тестовых задач хорошо согласуются с классическими решениями Экмана.

Таким образом, задача взаимодействия вихря с дрейфовым течением является новой и, следовательно, представляет научный интерес.

## 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Задача ставится следующим образом. В прямоугольной декартовой системе координат с осью  $Oz$ , направленной вертикально вверх, рассматривается слой устойчиво стратифицированной жидкости конечной толщины  $D$ , имеющий дно ( $z = 0$ ) и свободную поверхность ( $z = D$ ). На водной (свободной) поверхности задается постоянное ветровое воздействие. В приповерхностном слое задается известное экмановское дрейфовое течение. Под этим слоем или на его нижней границе располагается компактный трехмерный квазигоризонтальный вихрь. В дальнейшем происходит взаимодействие двух течений – дрейфового и вихревого. Этому способствует вертикальная диффузия вихря.

Важно отметить, что оба течения имеют пространственную анизотропию: вертикальный мас-

штаб гораздо меньше горизонтального.

Поскольку ветровое дрейфовое течение и вихревое течение имеют разную природу, необходимо пространственно-временные масштабы одного явления представить в виде масштабов другого явления. В данной задаче изучается поведение вихря под действием внешнего фактора – дрейфового течения. Поэтому логично выразить масштабы дрейфового течения через масштабы вихревого течения. Это означает, что толщину экмановского слоя нужно выразить через вертикальный масштаб вихря, а амплитуды поперечной и продольной компонент дрейфового течения – через амплитуду скорости в вихре.

Пусть  $l_x = l_y = l_h$  – горизонтальный,  $l_v$  – вертикальный масштаб вихря соответственно;  $\delta = l_v/l_h$ ;  $V_h$  – горизонтальный масштаб скорости;  $b = V_h^2/l_v$  – масштаб плавучести.

Каждое из движений (вихрь и дрейфовое течение) описывается соответствующими уравнениями [2, 9]. В приведенных масштабах их совместная динамика описывается следующей системой безразмерных уравнений:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + F_v^2 W \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Ro}} V_y + \frac{1}{\text{Re}_h} \nabla_H^2 V_x + \frac{1}{\text{Re}_v \delta^2} \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + F_v^2 W \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\text{Ro}} V_x + \frac{1}{\text{Re}_h} \nabla_H^2 V_y + \frac{1}{\text{Re}_v \delta^2} \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$F_v^2 \delta^2 \left( \delta \frac{\partial W}{\partial t} + V_x \frac{\partial W}{\partial x} + V_y \frac{\partial W}{\partial y} + F_v^2 W \frac{\partial W}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + b + F_v^2 \left( \frac{1}{\text{Re}_h} \nabla_H^2 W + \frac{1}{\text{Re}_v \delta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + F_v^2 \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_x \frac{\partial b}{\partial x} + V_y \frac{\partial b}{\partial y} + F_v^2 W \frac{\partial b}{\partial z} - W = \frac{1}{\text{Sc}} \left( \frac{1}{\text{Re}_h} \nabla_H^2 b + \frac{1}{\text{Re}_v \delta^2} \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \right), \quad (5)$$

где  $(V_x, V_y, W)$ ,  $p$ ,  $b$  – безразмерные значения компонент вектора скорости, а также отклонения полей давления и плотности от состояния устойчивой вертикальной стратификации;  $\text{Re}_h = V_0 l_h / A_m$ ,  $\text{Re}_v = \text{Re}_h \delta$ ,  $F_v = V_0 / N l_v$ ,  $\text{Ro} = V_0 l_h / 2\Omega$ ,  $N^2 = \partial \bar{b} / \partial z$ ,  $\text{Sc} = A_m / A_h = K_z / \chi_z$  – соответственно горизонтальное и вертикальное числа Рейнольдса, число Фруда, число Россби, квадрат частоты Брента-Вайсяля, число Струха-

ля;  $V_0$  – масштаб скорости в вихревом движении в начальный момент времени.

Коэффициенты горизонтального турбулентного обмена аппроксимируются согласно модели Смагоринского [10]:

$$A_m = \left[ \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 \right] \times C_m \frac{1}{2} \Delta x \Delta y,$$

$$A_h = \frac{A_m C_h}{C_m},$$

где  $C_m, C_n$  – постоянные;  $C_m = 0.1, C_h = 0.2C_m; \Delta x, \Delta y$  – горизонтальные размеры расчетной сетки. Индексы  $m, h$  относятся соответственно к диффузии поля скорости и плотности.

Для определения коэффициентов вертикального турбулентного обмена используется модель Прандтля-Обухова [8, 11], согласно которой

$$\begin{cases} K_Z = (0.05h)^2 \sqrt{B} + K_{min} & \text{при } B \geq 0 \\ K_{min} & \text{при } B < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Здесь

$$B = \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 + b;$$

$h$  – глубина квазиоднородного слоя, определяемая по первой от поверхности расчетной точке, в которой выполняется условие

$$(0.05z_k)^2 \sqrt{B|_{z=z_k}} \leq K_{min},$$

где  $K_{min}$  – фоновое значение коэффициента вертикального турбулентного обмена,  $z_k$  находится из последнего неравенства.

*Граничные условия задачи*

*На дне.* Условия прилипания:

$$V_x = 0; \quad V_y = 0; \quad W = 0.$$

Условие отсутствия градиента плавучести:

$$\frac{\partial b}{\partial z} = 0.$$

*На свободной поверхности.* С учетом малости горизонтальных градиентов вертикальной компоненты скорости, постоянное касательное напряжение ветра:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = - \left( \frac{D\tau_0}{\rho K_z V_h} \right) \tau_x; \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = - \left( \frac{D\tau_0}{\rho K_z V_h} \right) \tau_y. \quad (7)$$

В выражениях (7)  $V_h$  – масштаб горизонтальной скорости дрейфового течения;  $\tau_0$  – характерное значение ветрового напряжения на свободной поверхности.

Равенство нулю возмущения давления  $p = 0$  и плавучести  $b$ .

Условие непокидания частицами жидкости свободной поверхности:

$$\frac{d\eta}{dt} = W,$$

которое заменяется на приближенное условие

$$W = 0.$$

В начальный момент вихрь задается азимутальной компонентой скорости  $V_\vartheta$  в компактном виде:

$$V_\vartheta = 2V_0 \alpha^2 \exp \left[ -\alpha^2 \left( \frac{r^2}{L_0^2} \right) \right] \times \left( \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^{-4} (z - (z_0 + a_1))^2 (z - (z_0 - a_2))^2, \quad (8)$$

где  $V_0, L_0, z_0$  – соответственно начальный масштаб скорости, горизонтальный масштаб вихря и положения центра вихря (горизонт);  $a_1, a_2$  – толщины верхней и нижней частей вихря;  $\alpha$  – константа, характеризующая внутреннюю структуру вихря.

Стационарное дрейфовое течение задается известным решением [2] в виде

$$V_x^d = V_h \exp(-z) \cos(z), \quad V_y^d = -V_h \exp(-z) \sin(z), \quad (9)$$

где  $V_x^d, V_y^d$  – продольная и поперечная компоненты вектора скорости соответственно. Решение (9) – частный случай более общего решения при  $\tau_x = \tau_y = \tau_0$ .

Для оценки пограничных течений используется вертикальное число Экмана [2]:

$$E_V = \frac{2K_Z}{fD^2}, \quad (10)$$

где  $f$  – параметр Кориолиса.

Характерный масштаб вертикального экмановского слоя определяется по формуле:

$$\delta_E = DK_Z^{0.5}. \quad (11)$$

С учетом того, что  $f = 2\Omega = 2 \cdot 7.3 \cdot 10^{-5} c^{-1}$ , имеем:

$$\delta_E = 139.186\sqrt{K_Z}. \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что чем сильнее турбулентная диффузия, тем толще экмановский слой. Следует также отметить, что толщина экмановского слоя приближенно равна трем характерным масштабам  $\delta_E$ . Это типично для экспоненциального затухания.

Укажем на ограничение задачи. При горизонтальном масштабе водного вихря в сотни раз меньшем соответствующего масштаба атмосферного вихря, ветер можно считать однородным по горизонтальным координатам. Иначе – нет.

Система уравнений (1)–(5) решалась численно с помощью расщепления по пространственным переменным с использованием формул прогонки и применения метода коррекции давления. Подробности алгоритма изложены в работе [12].

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Особенностью рассматриваемой в работе задачи являются количественные соотношения характеристик вихря и дрейфового течения. Пусть в начальный момент вихрь находился на значительном, то есть сопоставимом с его толщиной, расстоянии до нижней (условной) границы дрейфового течения. Тогда взаимодействия по сути не происходит. Далее во всех приведенных ниже примерах вихрь задавался в непосредственной близости к области нижней границы дрейфового течения. Задавать вихрь внутри дрейфового течения нельзя: у него не будет осесимметричной структуры. В данной работе исследуется как раз начало с продолжением взаимодействия вихря с дрейфовым течением.

### 2.1. Слабое взаимодействие вихря с дрейфовым течением

К первой серии примеров отнесем слабое взаимодействие вихря с дрейфовым течением. Под термином "слабое" понимается качественная картина, когда на каждом горизонте вихрь отчетливо выражен на фоне дрейфового течения. В качестве примера рассматривался вихрь с начальными вертикальным и горизонтальными размерами 70 м и 2 км соответственно. Глубина слоя жидкости задавалась равной 80 м, а начальный горизонт центра

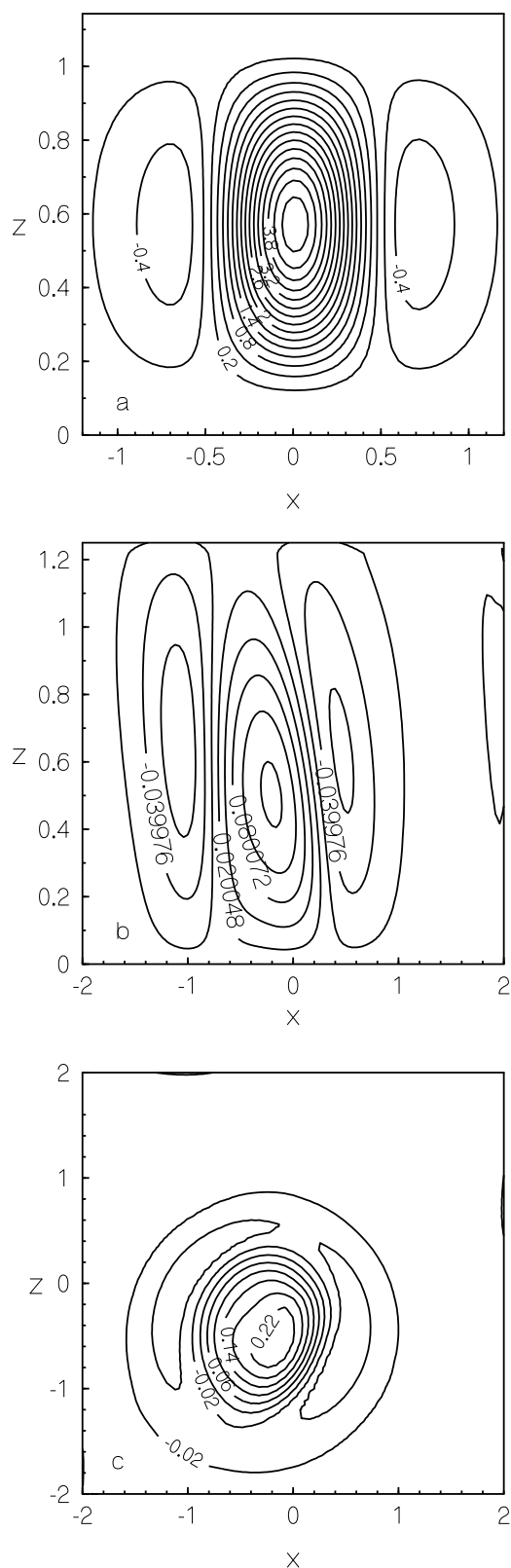


Рис. 1. Изолинии вертикальной компоненты завихренности в плоскости ( $y = 0$ ) в момент времени  $t = 0$  (a) и  $t = 4$  (b), а также на горизонте 3 м от поверхности в момент времени  $t = 4$  (c)

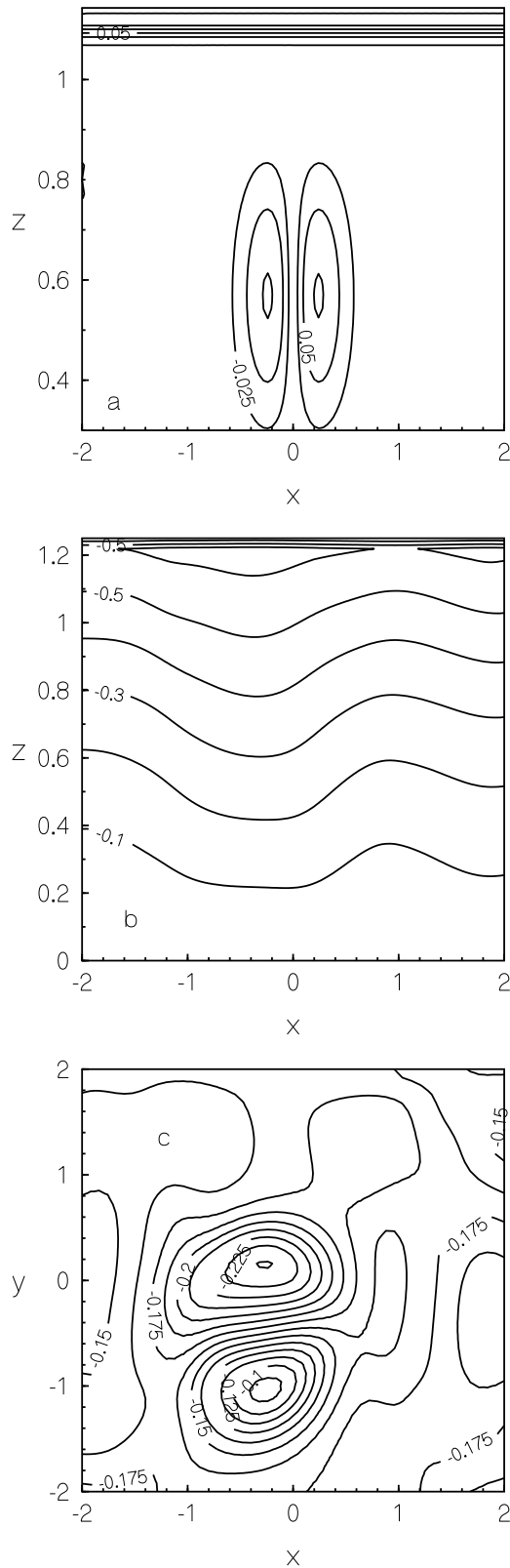


Рис. 2. Изолинии  $V_y$  в вертикальной плоскости ( $y = 0$ ) в моменты времени  $t = 0$  (а) и  $t = 4$  (б), а также на горизонте 3 м от поверхности в момент времени  $t = 4$  (в)

вихря – 40 м. Данные анализировались в вертикальной плоскости  $y = 0$  и на горизонте  $z = 77$  м, то есть на расстоянии трех метров от свободной поверхности. На этом горизонте происходит заметное взаимодействие вихря и дрейфового течения. Начальная амплитуда скорости в вихре задавалась равной 0.25 м/с, а амплитуда скорости дрейфового течения – 0.6 м/с. Частота Брента-Вайсяля, характеризующая величину стратификации, задавалась равной  $N = 0.004 \text{ с}^{-1}$ . Величина тангенциального напряжения, создаваемая ветром, задавалась равной 0.25 Н/м. Она одного и того же порядка, что наблюдается в природе [13] Соответственно, безразмерные параметры, присутствующие в уравнениях, описывающих задачу, следующие:  $Fr=1.785$ ,  $Re_V = 70000$ ,  $\delta = 0.035$ ,  $\delta_{ek} = 0.0374$  (заметим, что  $Re_V \delta^2 = 85.75$  всего лишь),  $Ri=0.3136$ ,  $Ro=2.43$ .

На рис. 1 показаны распределения поля завихренности в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Видно, что вихрь сносится течением, но слабо деформируется в горизонтальной плоскости. Это также заметно по распределению поля скорости в горизонтальном сечении (см. рис. 2, с). Хотя при этом в вертикальном сечении поле горизонтальной компоненты скорости меняется существенно (рис. 2, б). Поле возмущений плотности (плавучести) изменяется гораздо сильнее (см. рис. 3): верхняя часть возмущений вообще очень мала, то есть вихрь оказывается хорошо перемешан в области взаимодействия с дрейфовым течением. Это может объясняться более быстрым вырождением во времени поля возмущений плотности (плавучести).

## 2.2. Сильное взаимодействие вихря с дрейфовым течением

С увеличением силы ветрового воздействия и, соответственно, скорости дрейфового течения, исследуемое в работе взаимодействие становится более сильным. Во второй серии экспериментов амплитуда скорости дрейфового течения задавалась равной 0.6 м/с. Был рассмотрен вихрь с теми же пространственными масштабами, что и ранее, но с начальной амплитудой скорости 0.5 м/с. Кроме того, стратификация задавалась в два раза слабее:  $N = 0.002 \text{ с}^{-1}$ . Соответствующие безразмерные параметры задачи следующие:  $Fr=2.14285$ ,  $Re_V = 42000$ ,  $\delta = 0.035$ ,  $Ri=0.2177$ ,  $Ro=1.4585$ ,  $\delta_{ek} = 0.0374$ .

Сравнение рис. 1, а с рис. 4, а показывает, что в во втором примере вихрь гораздо сильнее искрив-

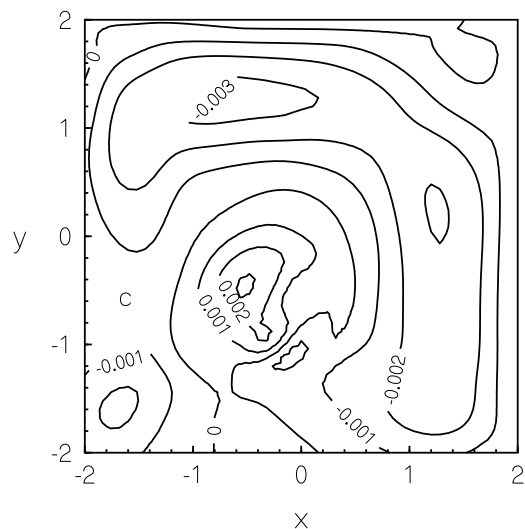
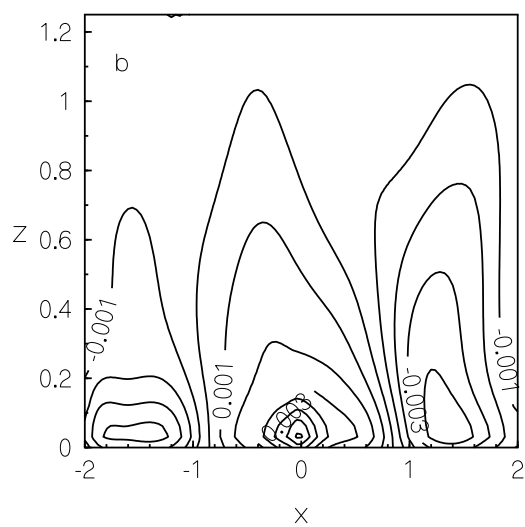
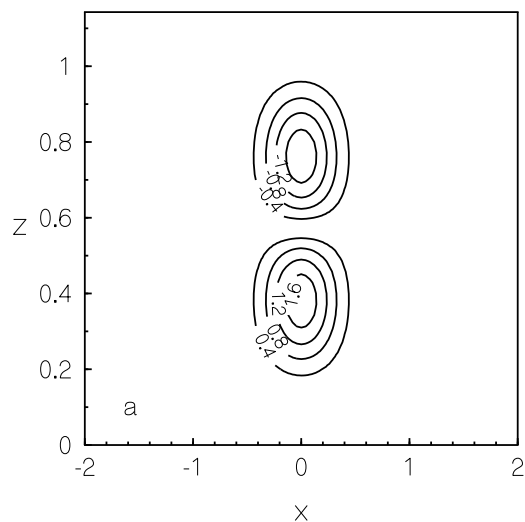


Рис. 3. Изолинии поля плавучести в вертикальной плоскости ( $y = 0$ ) в моменты времени  $t = 0$  (a) и  $t = 4$  (b), а также на горизонте 3 м от поверхности в момент времени  $t = 4$  (c)

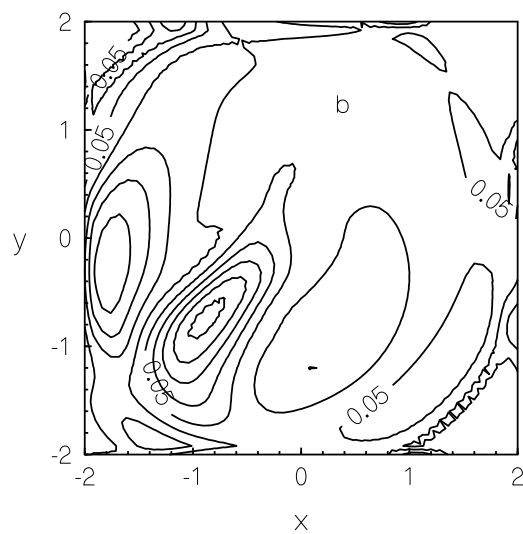
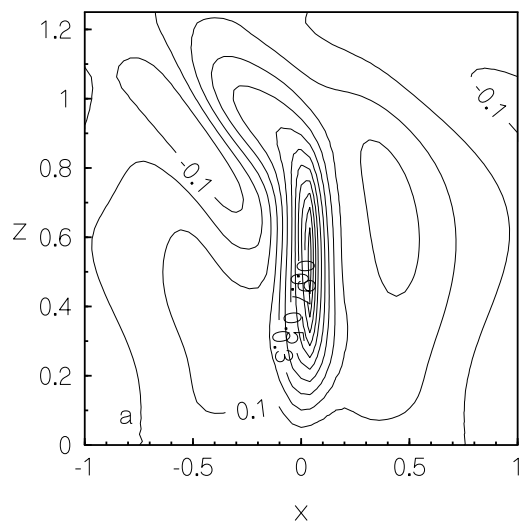


Рис. 4. Изолинии вертикальной компоненты завихренности в случае сильного ветрового воздействия в момент времени  $t = 2$  в вертикальной плоскости ( $y = 0$ ) (a) и на горизонте 3 м от поверхности (b)

ляется. При этом искривление (снос течением) происходит главным образом в верхней части вихря, а нижняя часть практически не сносится. Это возможно за счет гораздо более сильных вертикальных градиентов дрейфового течения. В горизонтальной плоскости вихрь также претерпевает значительные изменения: хотя область концентрации завихренности по-прежнему явно очерчена, ее форма уже далеко не симметрична. Сравните рис. 4, с с рис. 1, с. Структура вихря напоминает триполь [12].

О сильном взаимодействии говорят также рис. 5 и 6, где представлены вертикальное и горизон-

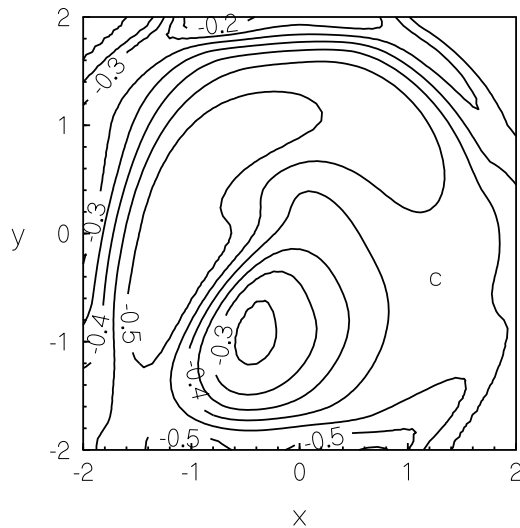
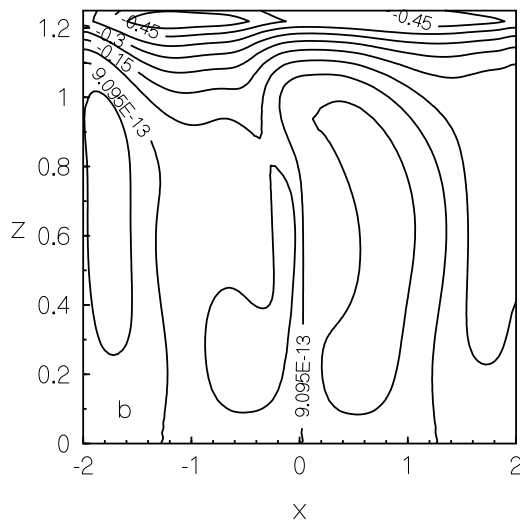
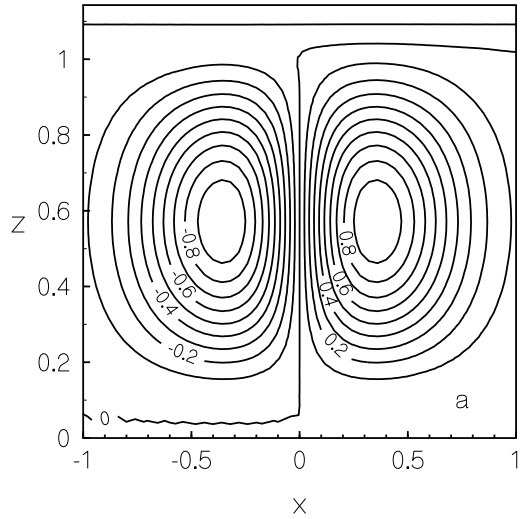


Рис. 5. Изолинии  $V_y$  в вертикальной плоскости ( $y = 0$ ) в случае сильного ветрового воздействия в моменты времени  $t = 0$  (a) и  $t = 2$  (b), а также и на горизонте 3 м от поверхности в момент времени  $t = 2$  (c)

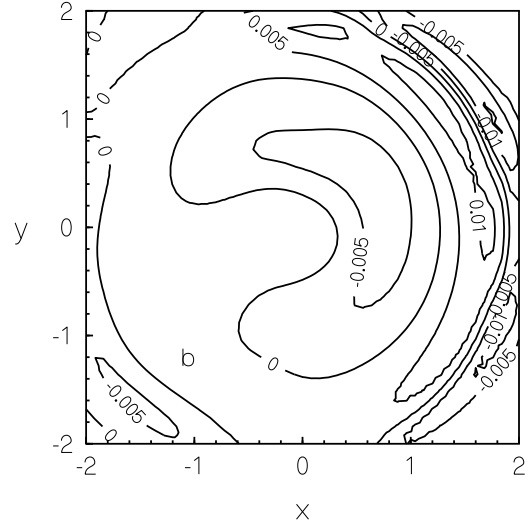
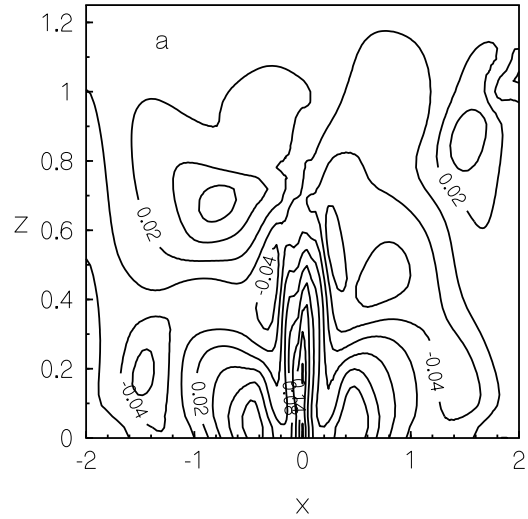


Рис. 6. Изолинии поля плавучести в случае сильного ветрового воздействия в момент времени  $t = 2$  в вертикальной плоскости ( $y = 0$ ) (a) и на горизонте 3 м от поверхности (b)

тальное распределения поля горизонтальной компоненты скорости  $V_y$  (рис. 5) и плавучести (рис. 6).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В данной работе представлены начальные результаты исследований в области взаимодействия приповерхностного дрейфового экмановского течения с компактными вихревыми течениями. Дрейфовое течение задавалось простейшим вариантом ( $\tau_x = \tau_y = \tau_0$ ) более общего течения ( $\tau_x \neq \tau_y$ ). Очевидно, что это один из возможных случаев, реально существующих в природе. По-

этому представляет интерес дальнейшее изучение с усложнением модели, учитывающей пространственную анизотропию, и временную изменчивость ветрового воздействия. По результатам исследования можно сделать следующие выводы.

1. Поставлена в рамках указанных выше ограничений, и численно решена задача о взаимодействии компактного вихря с приповерхностным дрейфовым экмановским течением.

2. Начальный анализ данных исследований позволяет сделать вывод о том, что указанное взаимодействие уже можно классифицировать как слабое и сильное. При слабом взаимодействии вихрь просто сносится течением и слабо деформируется на каждом из горизонтов. В вертикальной плоскости он просто наклоняется в сторону течения. При (более) сильном взаимодействии горизонтальная структура вихря со временем уже не напоминает свою первоначальную картину, а в вертикальной плоскости сдвиг поля завихренности увеличивается. На фоне этого сдвига, нижняя, непосредственно не взаимодействующая, часть вихря практически остается без изменений.

1. *Ekman V.W.* On the influence of the earth's rotation on ocean currents // *Arkiv. Matem., Astr.Fysik, Stockholm.*– 1905.– 2(11).– P. 1-53.
2. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика Т. 1.– М.: Мир, 1984.– 400 с.
3. *Alfredo Abrayma, Estore Salusti* Observation of Small Scale shelf-Trapped Dipolar Vortices near the Eastern Sicilian Coast // *J.Phys. Oceanogr.*– 1990.– 20, № 7.– P. 1105-1112.
4. *Di Sarra A., A.Pace and E.Salusti* Long internal waves and columnar disturbances in the Strait of Messina // *J. Geophys. Res.*– 1987.– 92 (C6).– P. 6495-6500.
5. *Mantovani R., Speranza A.* Baroclinic instability of a symmetric, rotating, stratified flow: a study of nonlinear stabilisation mechanism in the presence of viscosity. // *Nonlinear Processes in Geophysics.*– 2002.– V. 9.– P. 487–496.
6. *Marchesillo P., Gibbs M.T. and Meddelton J.H.* Simulation of coastal upwelling on the Sydney Continental shelf // *Mar. Freshwater Res.*– 2000.– V. 51.– P. 577-88.
7. *Barr B.C., Slinn D.N., and Dhanak M.R.* Simulation of the unsteady turbulent Ekman layer//AGU Fall Meeting 2002 Poster OS52D-0258
8. *Белоліпецький В.М., Белоліпецький П.В.* Численне моделювання ветрових течень в стратифікованих // *Вычислительные технологии.*– 2006.– Т. 5.– С. 21–31.
9. *Лукьянов П.В.* Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // *Прикл.гідром.*– 2006.– Т. 8 (80), N 3.– С. 63–77.
10. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with primitive equation // *Mon. Wether.*– 1963.– V. 91.– P. 99–105.
11. *Марчук Г.И. и др.* Математические модели циркуляции в океане.– М.: Наука, 1980.– 391 с.
12. *Лукьянов П.В.* Эволюция пары "вихрь в вихре" в слое устойчиво стратифицированной жидкости // *Прикл.гідром.*– 2010.– Т. 12 (84) N 2.– С. 58–69.
13. *Федоров К.Н., Гинзбург Ф.М.* Приповерхностный слой в океане.– Л.: Гидрометеиздат, 1988.– 303 с.
14. *Burton G. R., Nycander J.* Stationary vortices in three-dimensional quasi-geostrophic flow // *J. Fluid Mech.*– 1999.– V. 389.– P. 255–274.