ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 2011. Том 13, N 1. С. 24 – 28*

УДК 532.5:517.958

ЭФФЕКТ СОХРАНЕНИЯ ЗЕРКАЛА ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНОЙ СФЕРЕ

Г. Ф. ЗОЛОТЕНКО

Институт математики НАН Украины

Получено 21.06.2010

Понятие “зеркало жидкости”, известное из гидростатики, распространено на случай, когда жидкость частично заполняет подвижный сферический контейнер. Эффект сохранения зеркала жидкости в подвижной сфере является часто наблюдаемым явлением, когда в любой момент времени сохраняются (1) плоская форма и (2) ориентация в абсолютном пространстве свободной поверхности жидкости. В настоящей работе этот эффект описан аналитически в рамках модели идеальной несжимаемой однородной жидкости. Указаны режимы движения сферы, при которых эффект сохранения действительно проявляется. Получены точные формулы, определяющие ориентацию зеркала относительно сферы в зависимости как от ускорения центра сферы, так и от угловых координат сферы.

Поняття “дзеркало рідини”, яке відоме з гідростатики, розповсюджено на випадок, коли рідина частково заповнює рухомий сферичний контейнер. Ефект збереження дзеркала рідини у рухомій сфері є часто спостережуваним явищем, коли в довільний момент часу зберігаються (1) плоска форма та (2) орієнтація в абсолютному просторі вільної поверхні рідини. В даній роботі цей ефект описаний аналітично у межах моделі ідеальної нестисливої однорідної рідини. Указані режими руху сфери, за яких ефект збереження дійсно проявляється. Одержано точні формули, що визначають орієнтацію дзеркала відносно сфери в залежності як від прискорення центра сфери, так і від кутових координат сфери.

The concept of "a mirror of fluid" known from hydrostatics is extended to the case when fluid partially fills a moving spherical container. The preservation effect of a fluid mirror in a moving sphere is a frequently observed phenomenon when (1) the flat configuration and (2) the orientation in the absolute space of the fluid free surface remain invariable all the time. In the present work, this effect is analytically described within the limits of a model of an ideal incompressible homogeneous fluid. Regimes of sphere motions under which this preservation effect actually occurs are specified. The exact formulas defining orientation of the mirror with respect to the sphere and depending on both the acceleration of the sphere center and the angular sphere coordinates are obtained.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие "зеркало жидкости" относится к гидростатике и означает плоскую свободную поверхность жидкости. Элементарным примером зеркала является свободная поверхность жидкости в неподвижном контейнере или поверхность пруда в безветренную погоду. При определенных условиях поверхность жидкости теряет плоскую форму (например, становится волновой) или, иначе говоря, зеркало разрушается.

Другим примером зеркала служит свободная поверхность жидкости в контейнере, который движется горизонтально с постоянным ускорением в поле силы тяжести. В этом случае зеркало отклоняется от горизонтальной плоскости на определенный (известный) угол и сохраняется до тех пор, пока продолжается режим равномерно ускоренного движения этого контейнера.

При более сложных перемещениях контейнера поведение зеркала и даже его существование зависят от характера этих перемещений.

В настоящей статье представлены результаты теоретического исследования режимов движения *сферического* контейнера, при которых сохраняется плоская конфигурация свободной поверхности жидкости.

Задача динамики жидкости именно в сферическом контейнере достаточно сложна. Она описана в обзоре [1], где также указан ряд теоретических и экспериментальных работ по свободным колебаниям жидкости. Более современные результаты (по частотам колебаний жидкости в неподвижной сфере) представлены в [2].

Плоская свободная поверхность жидкости в подвижной сфере отмечена в экспериментальной работе [3], посвященной случаю горизонтальных синусоидальных колебаний бака. В этой статье введены понятия "относительно плоской" и "существенно плоской" свободной поверхности, которые отражают так называемые плоские и неплоские (вращательные) движения жидкости соответственно[1]. В то же время, в аналитическом исследовании [4], посвященном маятниковой аналогии упомянутого неплоского вращения жидкости, предположение о плоской форме свободной поверхности является только гипотезой, поскольку ее существование как точного решения гидродинамической задачи не доказано. Наконец,

[1]В последнем случае имеются в виду бегущие по кругу плоские волны

в [5] рассмотрен вопрос о плоской форме свободной поверхности в случае горизонтального цилиндра, совершающего равноускоренное поступательное движение и угловые колебания вокруг своей оси (задача о "летящем цилиндре").

В настоящей работе применены подходы Н. Е. Жуковского в том, что касается методов описания движения жидкости относительно подвижного твердого тела [6], и Г. Ламба – в том, что касается математического описания свободной поверхности жидкости [7]. Понятия и результаты кинематики твердого тела, использованные в настоящей работе, изложены в монографии А.И. Лурье [8].

1. ЭФФЕКТ СОХРАНЕНИЯ ЗЕРКАЛА ЖИДКОСТИ

Рассматривается невязкая несжимаемая однородная жидкость, которая частично заполняет сферический контейнер, совершающий некоторое движение в поле силы тяжести. Абсолютное движение жидкости считается потенциальным.

Вводится инерциальная система координат $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$, ось $O^*\xi^3$ которой направлена противоположно вектору ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$. В то же время, вводится система координат $OXYZ$, жестко связанная со сферическим контейнером и имеющая начало O в центре сферы. Эти координатные системы являются правыми и прямоугольными.

Сфера в общем случае совершает поступательно-вращательное движение с шестью степенями свободы. Ее поступательное движение задается вектором абсолютной скорости центра O сферы $\mathbf{v}_0(t)$, который в инерциальных осях $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$ определяется компонентами

$$\mathbf{v}_0(t) = \Big(v_0^1(t),\ v_0^2(t),\ v_0^3(t)\Big). \qquad (1)$$

Вращательное движение сферы происходит вокруг ее центра O и задается посредством трех углов α, β, γ (рис. 1). Эти углы определяются следующим образом (см. [8]).

Пусть подвижная система координат $OXYZ$ совпадает с системой координат $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$ в начальный момент времени, а их начала O и O^* совпадают друг с другом в любой момент времени. Тогда угол α определяет первый поворот координатной системы $OXYZ$ вокруг ξ^1–оси. В свою очередь, угол β определяет второй поворот координатной системы $OXYZ$; этот поворот производится вокруг новой оси, которая совпадает с Y–осью

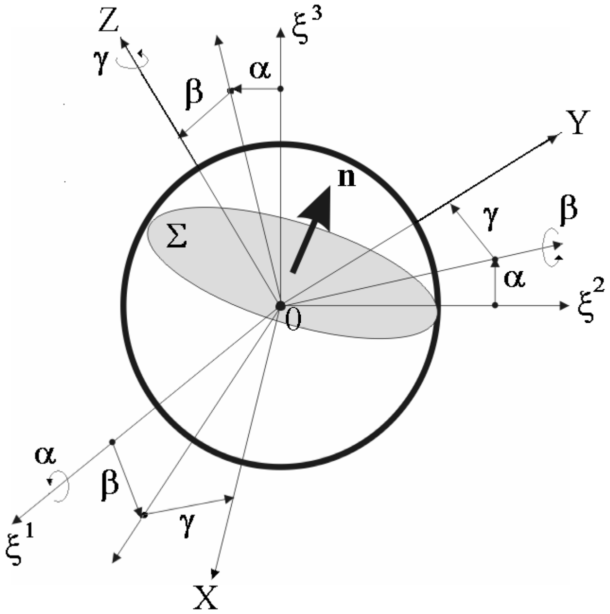

Рис. 1. Угловые координаты α, β, γ сферического контейнера относительно инерциальной системы координат $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$

после поворота координатной системы $OXYZ$ на угол α. Наконец, угол γ определяет третий поворот координатной системы $OXYZ$ вокруг новой оси, которая совпадает с Z–осью после поворотов системы координат $OXYZ$ на углы α и β. Углы α, β, γ полагаются положительными, если рассматриваемые повороты осуществляются вокруг соответствующих осей против хода часовой стрелки.

Замечание. Углы $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ являются альтернативой классическим эйлеровым углам и, очевидно, однозначно определяют угловое положение сферы в пространстве. Их преимущество заключается в том, что иногда их можно измерить (например, в случае сферического бака, закрепленного в кардановом подвесе на борту подвижного объекта или в лаборатории), в то время как эйлеровы углы всегда определяются умозрительно и потому представляют только теоретический интерес.

При определенных режимах движения сферы возможен эффект сохранения зеркала жидкости. В частности, можно доказать, что в случае плоско–параллельного движения сферы имеет место следующая закономерность:

если поступательное движение сферического контейнера подчиняется закону (в осях $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$)

$$\mathbf{v}_0(t) = \Big(0,\ v_0^2 + w_0^2 t,\ v_0^3 + w_0^3 t\Big), \qquad (2)$$

угол $\alpha(t)$ изменяется произвольно, а

$$\beta(t) = \gamma(t) \equiv 0, \tag{3}$$

то зеркало жидкости Σ сохраняется, а его уравнение в подвижной системе координат $OXYZ$ имеет вид

$$\sin\left[\alpha(t) - K\right] Y + \cos\left[\alpha(t) - K\right] Z = \pm \left|H - R_0\right|, \tag{4}$$

где

$$\operatorname{tg} K = -\frac{w_0^2}{w_0^3 + g}; \tag{5}$$

v_0^2, v_0^3 — компоненты вектора скорости $\mathbf{v}_0(t)$ в начальный момент; w_0^2, w_0^3 — постоянные компоненты вектора абсолютного ускорения центра сферы O; H — начальный уровень заполнения контейнера; R_0 — радиус сферы; знак плюс выбирается при $H \geq R_0$, а минус — при $H < R_0$.

Формулы (4), (5) показывают, что ориентация зеркала относительно сферы зависит от ускорения центра сферы и от ее угловой координаты $\alpha(t)$. В то же время, ориентация зеркала не зависит от начальной скорости точки O, начального уровня заполнения H и радиуса R_0. Интересно, что вращательное движение сферического контейнера является произвольным (по углу α).

Из уравнения (4) следует, что для наблюдателя, который находится в подвижной системе координатной, ориентация зеркала изменяется со временем. В неподвижных осях ситуация иная, а именно:

для любых поступательных и угловых движений сферического контейнера по закону (2), (3) ориентация зеркала жидкости относительно инерциальной системы координат остается неизменной.

Другими словами, в сферическом контейнере, движущемся по закону (2), (3), зеркало жидкости ведет себя как стабилизированная (наклоненная) площадка.

Эти два утверждения дают точное представление об эффекте сохранения зеркала жидкости и (достаточных) условиях проявления этого эффекта.

Аналогичный эффект имеет место в случае горизонтального цилиндра, вращающегося вокруг своей оси [5].

2. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Для доказательства сформулированных предложений рассматривается следующая нелинейная краевая задача теории относительного движения жидкости:

$$\triangle\Phi(\mathbf{R}, t) = 0, \quad \mathbf{R} \in Q(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{6}$$

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{R}, t)}{\partial n} = (\mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{N}, \quad \mathbf{R} \in S(t), \tag{7}$$

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{R}, t)}{\partial n} = (\mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{N} - \frac{f_t}{|\nabla f|}, \quad \mathbf{R} \in \Sigma(t), \tag{8}$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - (\mathbf{V}_0 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}) \cdot \nabla\Phi - \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{R} = F_0(t) - \frac{p_*}{\rho}, \quad \mathbf{R} \in \Sigma(t). \tag{9}$$

Здесь $\Phi(\mathbf{R}, t)$ — потенциальная функция абсолютной скорости жидкости (отнесенной к подвижным осям $OXYZ$); $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ — радиус–вектор жидкой частицы относительно подвижного начала координат O; $Q(t)$ — жидкая область в момент t, ограниченная поверхностью $S(t) + \Sigma(t)$, где $S(t)$ и $\Sigma(t)$ обозначают часть сферы и свободную поверхность жидкости соответственно; $\mathbf{N}(\mathbf{R}, t)$ — единичный вектор внешней нормали к границе области $Q(t)$; $p_* = \text{const}$ — давление на свободной поверхности; ρ — плотность жидкости; $F_0(t)$ — произвольная функция времени; f — функция из неявного уравнения свободной поверхности $f(X, Y, Z, t) = 0$. Операторы $\triangle$ и ∇ действуют по переменным X, Y, Z. Неизвестными являются функции Φ, f и $F_0(t)$. Остальные параметры, т. е. $\mathbf{V}_0(t)$, $\mathbf{\Omega}(t)$, $\mathbf{G}_0(t)$, p_*, ρ, известны.

Замечание. Обычно произвольная функция $F_0(t)$ в динамическом краевом условии на свободной поверхности (9) исключается с помощью хорошо известной замены переменных. Однако в рассматриваемой гидродинамической задаче эта функция должна быть сохранена.

Решение краевой задачи (6)–(9) сводится к ряду замен зависимых и независимых переменных и последующему решению систем обыкновенных и тригонометрических уравнений, возникающих здесь.

При замене зависимой переменной $\Phi(\mathbf{R}, t)$ используются условие потенциальности поля абсолютной скорости жидкости и теорема о разложении абсолютной скорости жидкой частицы на переносную и относительную составляющие. Таким образом, полагается, что

$$\Phi(\mathbf{R}, t) = \Psi(\mathbf{R}, t) + \mathbf{V}_0(t) \cdot \mathbf{R}, \tag{10}$$

где Ψ — новая неизвестная функция. Кроме того, уравнение свободной поверхности (т . е. уравнение зеркала жидкости) берется в виде

$$\gamma_1(t)X + \gamma_2(t)Y + \gamma_3(t)Z \ \mp \ h_0(t) = 0, \qquad (11)$$

где $\gamma_i, \ i = 1, 2, 3,$ — компоненты орта внешней нормали $\mathbf{N}$ к свободной поверхности, $h_0(t) \equiv |H - R_0|$ — расстояние между точкой O и плоскостью зеркала, а знаки минус и плюс выбираются в зависимости от начальной глубины жидкости $H \geq R_0$ и $H < R_0$ соответственно.

Подстановка выражения (10) в уравнение (6) приводит к уравнению Лапласа относительно неизвестной Ψ. В этом случае граничное условие на твердой стенке (7) обуславливает решение

$$\Psi(\mathbf{R}, t) \equiv 0. \qquad (12)$$

Если тождество (12) выполняется, кинематическое условие (8) на свободной поверхности (11) приводит к следующей системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\gamma_i(t)$:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \Omega^Z(t)\gamma_2 - \Omega^Y(t)\gamma_3, \qquad (13)$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = \Omega^X(t)\gamma_3 - \Omega^Z(t)\gamma_1, \qquad (14)$$

$$\frac{d\gamma_3}{dt} = \Omega^Y(t)\gamma_1 - \Omega^X(t)\gamma_2. \qquad (15)$$

Здесь Ω^X, Ω^Y, Ω^Z — проекции угловой скорости сферического контейнера на подвижные оси $OXYZ$.

Показывается, что система трех дифференциальных уравнений (13)–(15) эквивалентна следующей переопределенной системе трех уравнений относительно двух неизвестных $\mu(t)$, $\nu(t)$:

$$(\dot\nu\cos\mu - \dot\alpha\cos\beta\sin\gamma + \dot\beta\cos\gamma)\cos\nu -$$
$$-(\dot\mu + \dot\alpha\sin\beta + \dot\gamma)\sin\mu\sin\nu = 0, \qquad (16)$$

$$(\dot\nu\sin\mu - \dot\alpha\cos\beta\cos\gamma - \dot\beta\sin\gamma)\cos\nu +$$
$$+(\dot\mu + \dot\alpha\sin\beta + \dot\gamma)\cos\mu\sin\nu = 0, \qquad (17)$$

$$\dot\nu \ - \dot\alpha\cos\beta\sin(\gamma+\mu) + \dot\beta\cos(\gamma+\mu) = 0. \qquad (18)$$

Здесь $\mu(t), \nu(t)$ — угловые координаты орта нормали к зеркалу жидкости. При условии (3) система уравнений (16) – (18) имеет решение

$$\mu(t) = -\frac{\pi}{2}, \quad \nu(t) = -\alpha(t) + K. \qquad (19)$$

Учет в уравнении (11) связи параметров γ^i и μ, ν, а также формул (19) приводит к уравнению зеркала (4).

В свою очередь, динамическое условие (9) на свободной поверхности (11) приводит к трем тригонометрическим соотношениям между углами $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, компонентами $\gamma_i(t)$ и линейными ускорениями сферы w_0^1, w_0^2, w_0^3, а именно:

$$w_0^1\cos\beta\cos\gamma + w_0^2(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma) -$$
$$-\Big(w_0^3 + g\Big)(\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) =$$
$$= \pm N\gamma_1(t), \qquad (20)$$

$$w_0^1\cos\beta\sin\gamma + w_0^2(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma) -$$
$$-\Big(w_0^3 + g\Big)(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma) =$$
$$= \mp N\gamma_2(t), \qquad (21)$$

$$w_0^1\sin\beta - w_0^2\sin\alpha\cos\beta + \Big(w_0^3 + g\Big)\cos\alpha\cos\beta =$$
$$= \pm N\gamma_3(t), \qquad (22)$$

где

$$N = \sqrt{\Big(w_0^1\Big)^2 + \Big(w_0^2\Big)^2 + \Big(w_0^3 + g\Big)^2},$$

а знаки плюс и минус выбираются в зависимости от начальной глубины жидкости $H \geq R_0$ и $H < R_0$ соответственно.

При условии (3) соотношения (20)–(22) дают формулу (5)для параметра K при $w_0^1 = 0$.

Наконец, при известных $\Phi(\mathbf{R}, t)$ и $\Sigma(t)$ функция $F_0(t)$ в динамическом условии (9) определяется однозначно и имеет вид

$$F_0(t) = \frac{p_*}{\rho} - \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_0^2(t) \pm \Big|H - R_0\Big|N, \qquad (23)$$

где знак плюс соответствует начальной глубине жидкости $H \geq R_0$, а знак минус — начальной глубине жидкости $H < R_0$.

Таким образом, точное решение гидродинамической задачи, отражающее эффект сохранения зеркала жидкости при рассмотренных условиях, определяется формулами (10), (12) для потенциала, (4) – для свободной поверхности и (23) – для функции $F_0(t)$.

Замечание. Формула для гидродинамического давления, в общем случае определяемая из интеграла Коши–Лагранжа лишь с точностью до произвольной функции времени, в рассматриваемом случае становится однозначной в силу однозначного выбора функции $F_0(t)$ согласно (23), что важно для приложений.

Справедливость второго утверждения (о сохранениии ориентации зеркала жидкости относительно инерциальной системы координат) вытекает из уравнений (13)–(15), которые, как известно, определяют проекции на вращающиеся оси единичного вектора, сохраняющего неизменное направление по отношению к осям невращающейся системы координат [8, с. 127–128].

3. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ СФЕРЫ

Предыдущие результаты относятся к плоско–параллельному движению сферы. Однако интуитивно можно предположить, что аналогичное решение должно существовать и в более сложном случае пространственных движений сферы с шестью степенями свободы. Имеет место следующее обобщение предыдущих результатов:

если поступательное движение сферического контейнера трехмерно и подчиняется закону (в инерциальных осях $O^*\xi^1\xi^2\xi^3$)

$$\mathbf{v}_0(t) = \left(v_0^1 + w_0^1 t,\ v_0^2 + w_0^2 t,\ v_0^3 + w_0^3 t\right), \qquad (24)$$

а угловые координаты сферы $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ изменяются произвольно, то зеркало жидкости Σ сохраняется и его уравнение в подвижной системе координат $OXYZ$ имеет вид (11), где компоненты орта нормали $\gamma_i(t)$ определяются из соотношений (20)–(22).

Доказательство этого утверждения вытекает из того, что функции $\gamma_i(t)$, определяемые из соотношений (20)–(22), являются общим решением линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка (13)–(15). Это проверяется непосредственно. Произвольными постоянными интегрирования в данном случае выступают величины w_0^1, w_0^2, w_0^3+g (заметим, что они не входят явно в систему уравнений (13)–(15)).

Пример. Если сфера совершает плоско–параллельное движение, при котором

$$\mathbf{v}_0(t) = \left(v_0^1 + w_0^1 t,\ v_0^2 + w_0^2 t,\ v_0^3 + w_0^3 t\right),$$

$$\beta(t) = \gamma(t) \equiv 0, \quad v_0^1 = w_0^1 = 0,$$

то общее решение (11) сводится к частному решению

$$\mu(t) = -\frac{\pi}{2}, \quad \nu(t) = -\alpha(t) + K$$

(см. (19) и (4)–(5)).

ВЫВОДЫ

Найдено точное частное решение краевой гидродинамической задачи о безвихревом движении идеальной несжимаемой жидкости внутри подвижной сферы. Показано, что в сферическом контейнере, совершающем плоско–параллельное или пространственное движение, возможен эффект сохранения зеркала жидкости. Как любой физический эффект, он проявляется в действительности только при определенных условиях. Найденные в данной работе (достаточные) условия проявления этого эффекта сводятся к требованию, чтобы вектор ускорения поступательного движения сферы был постоянным в инерциальной системе координат, хотя угловое движение сферы может быть произвольным.

Результаты исследования позволяют рассчитывать параметры зеркала жидкости относительно борта транспортного средства, а также гидродинамическое давление в зависимости от параметров движения сферы.

1. *Abramson, H.N.* Dynamic behavior of liquid in moving container // Appl. Mech. Reviews.– 1963.– 16.– P. 501–506..
2. *Mciver, P.* Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers // J. Fluid Mech.– 1989.– 201.– P. 243–257..
3. *Sumner, I. E.* Experimental investigation of stability boundaries for planar and nonplaner sloshing in spherical tanks // NASA TN.– 1966.– D-3210.– P. 1–16.
4. *Столбецов, В.Н., Фишкис В.М.* Об одной механической модели жидкости, совершающей немалые колебания в сферической полости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.– 1968.– No 5.– С. 119–123.
5. *Золотенко, Г.Ф.* Многозначные решения общей задачи теории относительного движения жидкости // Прикладная гидромеханика.– 2006.– 8 (80), № 1.– С. 22–30.
6. *Жуковский, Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородною капельною жидкостью. Избранные сочинения. Т. 2.– М.:Машиностроение, 1949.– С. 152–309
7. *Ламб, Г.* Гидродинамика.– М.: ГИТТЛ, 1947.– 928 с.
8. *Лурье, А.И.* Аналитическая механика.– М.: ФМ, 1961.– 819 с.