УДК 532.595

АВТОКОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

К. В. АВРАМОВ[*], **Е. А. СТРЕЛЬНИКОВА**[*], **А. А. КИРЕЕНКОВ**[**]

[*] *Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*
[**] *Институт проблем механики РАН, Москва*

Получено 8.10.2010

Рассмотрены автоколебания пластины при двухстороннем взаимодействии с движущимся потоком жидкости. Перепад давлений, действующий на пластинку, описывается гиперсингулярным интегральным уравнением, которое решается методом Галеркина. В модели колебаний пластины учтена геометрическая нелинейность. Движение пластины описывается нелинейной динамической системой с конечным числом степеней свободы.

Досліджено автоколивання пластини при двосторонній взаємодії з потоком рідини, що рухається. Перепад тиску, який діє на пластину, описується гіперсингулярним інтегральним рівнянням, яке розв'язано методом Гальоркіна. В моделі коливань пластини враховано геометричну нелінійність. Рух пластини описується нелінійною динамічною системою із скінченним числом ступенів вільності.

Self-sustained vibrations of plates at two-sided interaction with moving fluid are considered. Fluid-structure interaction is described by a hyper singular integral equation, which is solved by Galerkin method. The plate performs geometrical nonlinear vibrations, which is described by finite-degree-of-freedom nonlinear dynamical system.

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные конструкции, взаимодействующие с движущейся жидкостью и газом, широко используются в морской и аэрокосмической технике, энергетике. При определенных параметрах взаимодействия пластины с потоком жидкости возникает флаттер. Примером исследований, проводимых в этой области, может служить анализ динамической устойчивости подводных крыльев судов и изучение динамики гребных винтов. Болотин, Гришко и др. [1] рассматривают упругую панель в потоке при сверхзвуковых скоростях; поток описывается поршневой теорией. При исследовании многозначности решений в системе с конечным числом степеней свободы применяется прямое численное интегрирование. Нелинейная динамика панели в потоке газа при сверхзвуковых скоростях в области дивергентной и флаттерной потери устойчивости рассматривается в работе [2]. В статье [3] изучается возможность управления флаттером. Отмечается, что в области флаттера желательно учитывать нелинейность как механической, так и аэродинамической подсистем. В [4] рассматривается пластина под действием постоянной нагрузки в плоскости и взаимодействующая с потоком газа. Показано, что шести собственных форм достаточно для адекватного описания поведения системы. Однако для некоторых значений параметров число мод, необходимых для адекватного описания поведения системы, равняется 30. Попеску [5] для дискретизации пластинки применяет метод конечных элементов. Связь между деформациями и перемещениями описывается теорией Кармана; поток, действующий на пластинку, моделируется поршневой теорией. Автоколебания ламинированной пластины под действием температурных нагрузок в области флаттера исследуются в [6]. Показано, что амплитуды автоколебаний существенно зависят от температуры. Новичков [7] использует модели трехмерного потенциального течения для описания давлений, действующих на колеблющуюся пластину. Полученные результаты сравниваются с данными поршневой теории. В статье [8] предполагается, что пластина обтекается безвихревым потоком газа. Для построения математической модели потока используется метод дискретных вихрей. Танг, Довэлл [9] рассмотрели пластинку в несжимаемом невязком и потенциальном потоке с малыми дозвуковыми скоростями. Для его описания применяется метод дискретных вихрей. Аэроупругая неустойчивость панели в дозвуковом потоке изучается в статье [10]; поток предполагается двухмерным и несжимаемым. Давление, действующее со стороны потока на пластину, описывается гиперсингулярным интегралом. Задача сводится к линейному интегро-дифференциальному уравнению. В статье [11] рассматриваются колебания пластинки в потоке сжимаемого газа. Задача сводится к анализу уравнения Вольтера. Системное изложение моделей и методов исследования взаимодействия конструкций с потоками газа рассматривается в монографии [12].

Значительно меньше работ посвящено анализу колебаний систем жидкость-пластина. Здесь мы приведем только две работы. Колебания пластинки, погруженной в жидкость, рассматриваются в [13]. Для дискретизации пластинки применяется метод конечных элементов. Давление жидкости определяется из гиперсингулярного интегрального уравнения. Линейные колебания консольной пластинки при ее двухстороннем взаимодействии с жидкостью рассматриваются в [14]. Для изучения взаимодействия пластинки с жидкостью применяется метод гиперсингулярных интегральных уравнений. С помощью метода граничных элементов гиперсингулярное интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

В настоящей статье рассматривается движущийся поток жидкости, взаимодействующий с упругой пластиной. Рассматриваются автоколебания пластины при ее геометрически нелинейном деформировании. Взаимодействие жидкости с пластиной описывается гиперсингулярным интегральным уравнением, которое решается методом Бубнова-Галеркина. Автоколебания пластины описываются нелинейной динамической системой с конечным числом степеней свободы и исследуются методом нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим динамику шарнирно-опертой пластины в потоке невязкой, несжимаемой, безвихревой жидкости, которая на некотором расстоянии от пластинки имеет постоянную скорость V (рис. 1). Динамика жидкости описывается потенциалом скоростей $\varphi(x,y,z,t)$. Поперечные перемещения пластины обозначим через $w(x,y,t)$. Тогда условие непротекания жидкости через поверхность пластины представим так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=w+\frac{h}{2}}=V\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t};\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=w-\frac{h}{2}}= =V\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}; \qquad (1)$$

где h – толщина пластинки.

Используя интеграл Коши-Лагранжа, получим величину давления, действующего на поверхность пластины:

$$\frac{p_+-p_-}{\rho_w}=\frac{\partial(\varphi_--\varphi_+)}{\partial t}+V\frac{\partial(\varphi_--\varphi_+)}{\partial x}, \qquad (2)$$

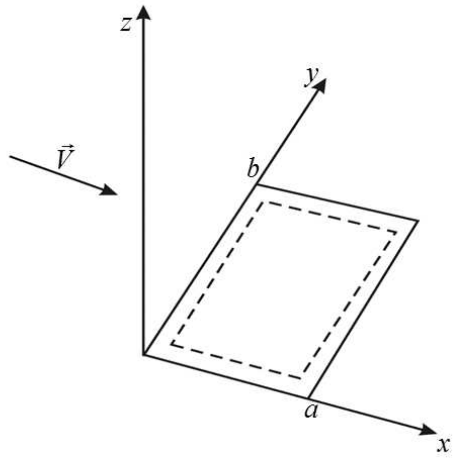

Рис. 1. Эскиз исследуемой системы

где p_+,p_- – давления жидкости на верхнюю и нижнюю стороны пластины; φ_+,φ_- – значения потенциала скоростей на верхней и нижней сторонах пластины; ρ_w – плотность жидкости. На кромках пластинки применим гипотезу Чаплыгина-Жуковского [8, 15]: $p_+\to p_-$.

Следуя [16 – 19], функцию $\varphi(x,y,z,t)$ представим в виде потенциала двойного слоя:

$$\varphi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\gamma(\xi,t)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+(z-\xi_3)^2}}dS, \qquad (3)$$

где n_ξ – орт нормали к поверхности пластинки; $\gamma(\xi,t)=\varphi_+-\varphi_-$ – циркуляция скорости; $S=\{(x,y)\in R^2|0\le x\le a;0\le y\le b\}$ – область, занимаемая срединной плоскостью пластинки. Уравнение (3) введем в (1), в результате получим следующее гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$V\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\gamma(\xi,t)\frac{\partial^2}{\partial z\partial n_\xi}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+(z-\xi_3)^2}}\right)dS. \qquad (4)$$

После тождественных преобразований уравнение (4) может быть представлено так:

$$V\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\frac{\gamma(\xi_1,\xi_2,t)d\xi_1d\xi_2}{[(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2]^{3/2}}. \qquad (5)$$

Исследуем тонкие пластинки, поэтому деформациями сдвига и инерцией вращения пренебрегаем. Линейные колебания таких пластинок опишем следующим уравнением:

$$\frac{h^2}{12}\nabla^4 w+\rho_p\frac{1-\mu^2}{E}\ddot{w}+\frac{(1-\mu^2)\rho_w}{Eh}\times$$
$$\times(\dot{\gamma}+V\gamma'_x)=0, \qquad (6)$$

где ρ_p – плотность материала пластинки; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Если пластина испытывает автоколебания, ее деформации описываются на основании геометрически нелинейной теории. Амплитуды колебаний пластинки конечны. Тогда движения системы жидкость-пластинка опишем гиперсингулярным интегральным уравнением (4) и уравнениями Вон фон Кармана:

$$\frac{h}{12}\nabla^4 w+\frac{(1-\mu^2)\rho_p}{E}\ddot{w}+\frac{(1-\mu^2)\rho_W}{Eh}(\dot{\gamma}+V\gamma'_X)=$$
$$=\frac{(1-\mu^2)}{Eh}(F''_{YY}w''_{XX}-2F''_{XY}w''_{XY}+F''_{XX}w''_{YY}); \quad (7)$$

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4 F=(w''_{XY})^2-w''_{XX}w''_{YY}, \qquad (8)$$

где F – функция напряжений.

2. РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Циркуляцию скорости разложим по собственным формам колебаний шарнирно опертой пластинки:

$$\gamma(\xi_1,\xi_2,t)=\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_1}C_{lm}(t)\sin\left(\frac{l\pi\xi_1}{a}\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{m\pi\xi_2}{b}\right); \qquad (9)$$

а прогиб пластины w представим так:

$$w(x,y,t)=\sum_{r_1=1}^{N_S}\sum_{r_2=1}^{N_S}\theta_{r_1r_2}\sin\left(\frac{r_1\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{r_2\pi y}{b}\right). \qquad (10)$$

Соотношения (9), (10) введем в гиперсингулярное интегральное уравнение (5) и воспользуемся методом Бубнова-Галеркина. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $C_{l,m}(t)$:

$$\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_1}a_{n_1n_2lm}C_{lm}(t)=b_{n_1n_2};$$
$$n_1=1,..N_1; n_2=1,..N_1, \qquad (11)$$

где

$$a_{n_1n_2lm}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\sin\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right)dxdy\times$$
$$\times\int\limits_S\frac{\sin\left(\frac{l\pi\xi_1}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi\xi_2}{b}\right)d\xi_1 d\xi_2}{[(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2]^{3/2}};$$
$$b_{n_1n_2}=\int\limits_S\left(V\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)\sin\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right)dxdy=0.25bV\sum_{r_1=1}^{N_S}\sum_{r_2=1}^{N_S}\theta_{r_1}(t)r_1\delta_{r_2n_2}\times$$
$$\times\vartheta_{n_1,n_2,r_1}+0.25ab\sum_{r_1=1}^{N_S}\sum_{r_2=1}^{N_S}\dot{\theta}_{r_1r_2}(t)\delta_{r_1n_1}\delta_{r_2n_2};$$

$\delta_{r_2n_2}$ – символ Кронекера;

$$\vartheta_{n_1n_2r_1}=\frac{1-\delta_{n_1r_1}}{n_1-r_1}[1-(-1)^{n_1-r_1}]+\frac{1-(-1)^{n_1+r_1}}{n_1+r_1}.$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (11) представим так:

$$C_{lm}=\sum_{r_1=1}^{N_S}\sum_{r_2=1}^{N_S}C_{lm}^{(r_1r_2)}(t);$$
$$l=1..N_1; m=1..N_1. \qquad (12)$$

Решение (12) введем в (11); получим системы линейных алгебраических уравнений. Решения этих систем представим так:

$$C_{l,m}^{(r_1r_2)}=0.25Vb\theta_{r_1r_2}(t)\overline{\varphi}_{l,m}^{(r_1r_2)}+0.25ab\dot{\theta}_{r_1r_2}(t)\overline{\overline{\varphi}}_{l,m}^{(r_1r_2)};$$
$$l=1,..,N_1; m=1,..,N_1; r_1=1,..,N_S; r_2=1,..,N_S. \qquad (13)$$

Параметры $\overline{\varphi}_{l,m}^{(r_1r_2)}$ и $\overline{\overline{\varphi}}_{l,m}^{(r_1r_2)}$ определяются из следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_1}a_{n_1n_2lm}\overline{\varphi}_{l,m}^{(r_1r_2)}=r_1\delta_{r_2n_2}\vartheta_{n_1n_2r_1}; \qquad (14)$$

$$\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_1}a_{n_1n_2lm}\overline{\overline{\varphi}}_{l,m}^{(r_1r_2)}=\delta_{r_1n_1}\delta_{r_2n_2}; n_1=1,..,N_1;$$
$$n_2=1,..,N_1; r_1=1,..,N_S; r_2=1,..,N_S. \qquad (15)$$

Рассмотрим расчет элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений $a_{n_1n_2lm}$. Коэффициенты $a_{n_1n_2lm}$ вычисляются из гиперсингулярных интегралов (11). На основании интегрирования по частям, коэффициенты $a_{n_1n_2lm}$ могут быть представлены так:

$$a_{n_1n_2lm}=\frac{n_1\pi l}{4a^2}\int\frac{\cos\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{l\pi\xi_1}{a}\right)}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}}\times$$

$$\times \sin\left(\frac{m\pi\xi_2}{b}\right) d\xi_1 d\xi_2 dx dy + \frac{n_2 \pi m}{4b^2} \times \qquad (16)$$

$$\times \int \frac{\sin\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{l\pi\xi_1}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi\xi_2}{b}\right)}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}} \times$$

$$\times d\xi_1 d\xi_2 dx dy.$$

Используя правило вычисления гиперсингулярных интегралов, представленных в [16], можно получить следующее соотношение:

$$\int\limits_S \frac{\cos\left(\frac{l\pi\xi_1}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi\xi_2}{b}\right)}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 = \cos\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) R(\Delta x, \Delta y) + \int\limits_{S_F} \cos\left(\frac{l\pi\xi_1}{a}\right) \times \qquad (17)$$

$$\times \frac{\sin\left(\frac{m\pi\xi_2}{b}\right)}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2,$$

где

$S_F = S - S_\epsilon$;

$S_\epsilon = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 | x - \Delta x < \xi_1 < x + \Delta x;\ \ y - \Delta y < \xi_2 < y + \Delta y\}$;

$$R(\Delta x, \Delta y) = \int\limits_{-\Delta y}^{\Delta y} \ln\left[\frac{\Delta x + \sqrt{\Delta x^2 + z^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + z^2} - \Delta x}\right] dz.$$

Итак, в правой части уравнения (17) нет особенности в знаменателе; поэтому интегралы (17) не относятся к гиперсингулярным. Величины $a_{n_1 n_2 l m}$ могут быть вычислены так:

$$a_{n_1 n_2 l m} = \frac{n_1 \pi l}{4a^2} \int\limits_S \cos\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) dx dy \times$$

$$\times \int\limits_{S_F} \frac{\cos\left(\frac{l\pi\xi_1}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi\xi_2}{b}\right)}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 + \frac{n_2 \pi m}{4b^2} \times$$

$$\times \int\limits_S \cos\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) dx dy \times \qquad (18)$$

$$\times \int\limits_{S_F} \frac{\sin\left(\frac{l\pi\xi_1}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi\xi_2}{b}\right)}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ \frac{ab\pi}{16} R(\Delta x, \Delta y) \left(\frac{n_1 l}{a^2} + \frac{n_2 m}{b^2}\right) \delta_{m n_2} \delta_{l n_1}.$$

3. МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Построим дискретную модель колебаний пластины при ее геометрически нелинейном деформировании. Соотношение (10) введем в (8) и получим линейное неоднородное уравнение в частных производных. Решение этого уравнения представим так:

$$F = F_p + F_g, \qquad (19)$$

где F_p – частное решение неоднородного уравнения; F_g – общее решение однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения имеет следующий вид:

$$0.5F_p = \sum_{r_1, r_2, p_1, p_2 = 1}^{N_S} \theta_{r_1 r_2} \theta_{p_1, p_2} [A^{(1)}_{r_1 r_2 p_1 p_2} \cos\eta(r_2 - p_2) \times$$

$$\times \cos\xi(r_1 + p_1) + A^{(2)}_{r_1 r_2 p_1 p_2} \cos\eta(r_2 + p_2) \cos\xi(r_1 - p_1)] + \qquad (20)$$

$$+ \sum_{\Gamma_1}^{N_S} \theta_{r_1 r_2} \theta_{p_1 p_2} A^{(3)}_{r_1 r_2 p_1 p_2} \cos\eta(r_2 - p_2) \cos\xi(p_1 - r_1) +$$

$$+ \sum_{\Gamma_2}^{N_S} \theta_{r_1 r_2} \theta_{p_1 p_2} A^{(4)}_{r_1 r_2 p_1 p_2} \cos\eta(r_2 + p_2) \cos\xi(p_1 + r_1);$$

где

$$A^{(1)}_{r_1 r_2 p_1 p_2} = \frac{Eha^2 b^2 (r_1^2 p_2^2 + r_1 r_2 p_1 p_2)}{8[b^2 (r_1 + p_1)^2 + a^2 (r_2 - p_2)^2]^2};$$

$$A^{(2)}_{r_1 r_2 p_1 p_2} = \frac{Eha^2 b^2 (r_1^2 p_2^2 + r_1 r_2 p_1 p_2)}{8[b^2 (r_1 - p_1)^2 + a^2 (r_2 + p_2)^2]^2};$$

$$A^{(3)}_{r_1 r_2 p_1 p_2} = \frac{Eha^2 b^2 (r_1 r_2 p_1 p_2 - r_1^2 p_2^2)}{8[b^2 (r_1 - p_1)^2 + a^2 (r_2 - p_2)^2]^2};$$

$$A^{(4)}_{r_1 r_2 p_1 p_2} = \frac{Eha^2 b^2 (r_1 r_2 p_1 p_2 - r_1^2 p_2^2)}{8[b^2 (r_1 + p_1)^2 + a^2 (r_2 + p_2)^2]^2};$$

$$\Gamma_1 = [r_1, r_2, p_1, p_2 = 1, r_1 \neq r_2\ u\ p_1 \neq p_2\ r_1 \neq p_1\ u\ r_2 \neq p_2];$$

$$\Gamma_2 = [r_1, r_2, p_2 = 1, r_1 \neq r_2 u p_1 \neq p_2].$$

Общее решение однородного уравнения F_g определяется, используя процедуру из [20]. Функция напряжений удовлетворяет следующим условиям, которые подробно рассмотрены в [20]:

$$\int\limits_0^a [N_y, N_{xy}]_{y=0} dx = 0; \int\limits_0^a [N_y, N_{xy}]_{y=b} dx = 0;$$

$$\int\limits_0^b [N_x, N_{xy}]_{x=0} dy = 0; \int\limits_0^b [N_x, N_{xy}]_{x=a} dy = 0, \quad (21)$$

где $N_X = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$; $N_Y = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$; $N_{XY} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$. Учитывая (21), общее решение однородного уравнения принимаем нулевым: $F_g = 0$.

Теперь полученное решение (19), (20) введем в уравнение (7) и применим метод Галеркина. В результате получим следующую динамическую систему:

$$\sum_{l,m=1}^{N_S} (M_{n_1 n_2 lm} \ddot{\theta}_{lm} + D_{n_1 n_2 lm} \dot{\theta}_{lm}) + \quad (22)$$

$$+R_{n_1 n_2}(\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, ...) = 0; n_1 = 1, .., N_S; n_2 = 1, .., N_S,$$

где

$$R_{n_1 n_2}(\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, ...) = -\int\limits_S (F''_{YY} w''_{XX} - 2F''_{XY} w''_{XY} +$$

$$+F''_{XX} w''_{YY}) \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) dxdy =$$

$$= \sum_{r_1, r_2, p_1, p_2, l, m=1}^{N_S} \alpha^{(n_1, n_2)}_{lm r_1 r_2 p_1 p_2} \theta_{lm} \theta_{r_1 r_2} \theta_{p_1 p_2};$$

$$M_{n_1 n_2 lm} = \rho_p h \delta_{l n_1} \delta_{m n_2} + 0.25 \rho_W ab \overline{\overline{\varphi}}^{(l,m)}_{n_1 n_2};$$

$$D_{n_1 n_2 lm} = 0.25 \rho_W V b (\overline{\overline{F}}^{(l,m)}_{n_1 n_2} + \overline{\varphi}^{(l,m)}_{n_1 n_2});$$

$$K_{n_1 n_2 lm} = \delta_{l n_1} \delta_{m n_2} D \pi^4 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^2 + 0.25 \rho_W V^2 \times$$

$$\times a^{-1} b \overline{F}^{(l,m)}_{n_1 n_2}; \overline{F}^{(l,m)}_{n_1 n_2} = \sum_{r_1} r_1 \vartheta_{n_1 n_2 r_1} \overline{\varphi}^{(l,m)}_{r_1 n_1};$$

$$\overline{\overline{F}}^{(l,m)}_{n_1 n_2} = \sum_{r_1} r_1 \vartheta_{n_1 n_2 r_1} \overline{\overline{\varphi}}^{(l,m)}_{r_1 n_1}.$$

4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ

Проводились численные исследования динамики пластинки в потоке для следующих значений параметров:

$$E = 2 \cdot 10^{11}\text{Па}; \rho_p = 7.8 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3; \rho_W = 1 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3; \quad (23)$$

$$\nu = 0.3; h = 0.02\text{м}; a = b = 0.5\text{м}.$$

Анализ линейной части системы (22) при следующих значениях параметров разложения (9), (10):

$$(1) : N_1 = 3; N_S = 2;$$

$$(2) : N_1 = 3; N_S = 3; \quad (24)$$

$$(3) : N_1 = 4; N_S = 4$$

проводился для определения числа степеней свободы, необходимого для адекватного описания динамического поведения. Итак, случай *1* соответствует динамической системе (22) с 4 степенями свободы; случай *2* и *3* отвечает динамике системы с 9 и 16 степенями свободы соответственно.

Исследовалась устойчивость состояния равновесия $\theta_{lm} = 0$ при изменении числа Маха M. Результаты анализа качественно представлены на бифуркационной диаграмме (рис. 2). На этом рисунке устойчивые состояния равновесия показаны сплошной линией, а неустойчивые – штриховой.

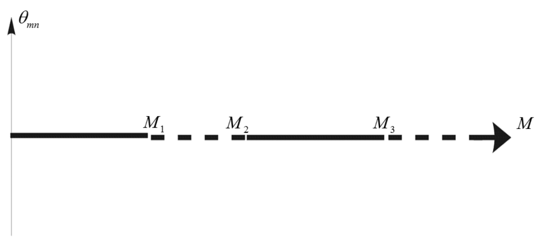

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма состояния равновесия

Точки $M = M_j; j = \overline{1,3}$ являются бифуркационными. В точке M_1 происходит потеря устойчивости; один характеристический показатель становится положительным. Такая потеря устойчивости называется дивергенцией [1]; неустойчивые состояния равновесия наблюдаются в диапазоне $M \in [M_1; M_2]$. В области $M \in [M_2; M_3]$ состояние равновесия является устойчивым. В точке $M = M_3$ наблюдается бифуркация Хопфа, которая приводит к флаттеру. Проводился численный анализ системы (22) с различным числом степеней свободы для случаев *1, 2, 3*, представленных соотношениями (24). Для каждого из этих вариантов определялись параметры M_1, M_2, M_3. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Табл 1. Бифуркационные значения числа Маха

–	1	2	3
M_1	0.0322	0.0303	0.030
M_2	–	0.0419	0.0412
M_3	–	0.0470	0.0455

В динамической системе с 4 степенями свободы наблюдается переход от устойчивого состояния равновесия к дивергенции; переход к автоколебаниям не обнаружен. Поэтому динамическая система с 4 степенями свободы неадекватно описывает колебания пластины.

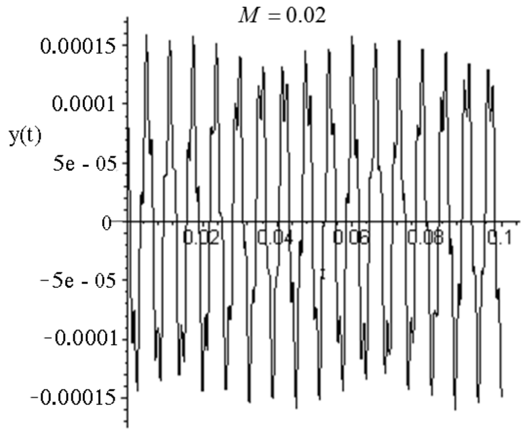

Рис. 3. Динамика линейной пластинки в потоке при M=0.02

Для систем с 9 и 16 степенями свободы наблюдаются близкие значения параметров M_1, M_2, M_3, при которых обнаружены бифуркации. Поэтому девяти степеней свободы достаточно для адекватного описания линейной динамики пластины в потоке жидкости.

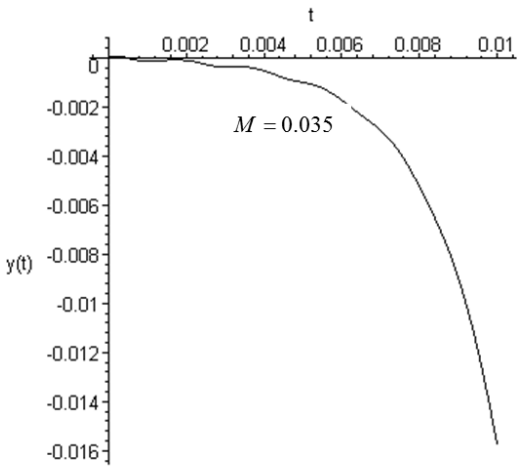

Рис. 4. Динамика линейной пластинки в потоке при M=0.035

Для подтверждения полученных результатов анализа устойчивости нами проводилось прямое численное интегрирование динамической системы с 9 степенями свободы. Колебания системы при $M = 0.02$ около устойчивого состояния равновесия представлены на рис. 3; потеря устойчивости вследствие дивергенции при $M = 0.035$ показана на рис. 4. Устойчивые колебания при $M = 0.0445$ показаны на рис. 5, а потеря устойчивости вследствие флаттера представлена на рис. 6.

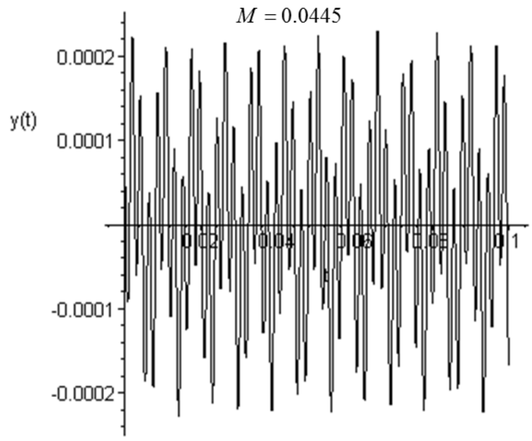

Рис. 5. Динамика линейной пластинки в потоке при M=0.0445

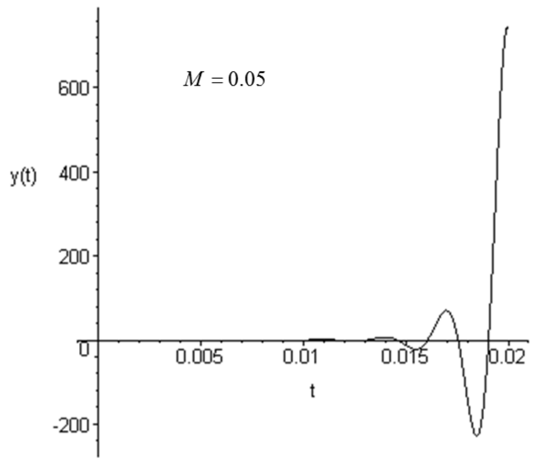

Рис. 6. Динамика линейной пластинки в потоке при M=0.05

Исследования автоколебаний в системе (22) осуществляли, используя метод нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера [21–23]. Расчеты проводились при различных числах Маха. Результаты анализа приведены на бифуркационной диаграмме (рис. 7). На этом рисунке устойчивые тривиальные состояния равновесия показаны сплошной линией, а неустойчивые – штриховой. В точке бифуркации Хопфа возникает предельный цикл. Развитие таких автоколебаний при увеличении числа Маха показано на рис. 7 сплошной линией.

Для проверки полученных данных по автоколебаниям системы проводилось прямое численное интегрирование системы (22). В качестве началь-

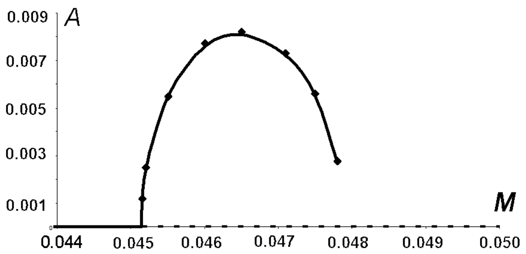

Рис. 7. Бифуркационная диаграмма системы

ных условий выбирались точки на нелинейных модах. Результаты расчета представлены на рис. 7 ромбами. Итак, результаты прямого численного интегрирования близки к данным, полученным методом нелинейных мод.

ВЫВОДЫ

В статье исследован процесс взаимодействия колеблющейся пластинки с потоком движущейся жидкости. Жидкость предполагается несжимаемой, невязкой и безвихревой. Модель колебаний жидкости линеаризована. Взаимодействие жидкости с пластинкой описывается гиперсингулярным интегральным уравнением. В статье используется метод Галеркина для приближенного решения этого уравнения.

Для исследования автоколебаний пластинки в ее модель включена геометрическая нелинейность, которая ограничивает амплитуды автоколебаний в области неустойчивости тривиального состояния равновесия.

Эта работа была частично поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины в рамках проекта Ф28/257.

1. *Bolotin V. V., Grishko A. A., Kounadis A. N., Gantes C. J.* Non-linear panel flutter in remote post-critical domains // Int. J. Non-Linear Mechanics.– 1998.– **33**, N 5.– C. 753–764.
2. *Bolotin V. V., Petrovsky A. V. Grishko A. A.* Secondary bifurcations and global instability of an aeroelastic non-linear system in the divergence domain // Journal of Sound and Vibration.– 1996.– **191(3)**.– C. 431–451.
3. *L. Librescu, G. Chiocchia, P. Marzocca* Implications of cubic physical aerodynamic non-linearities on the character of the flutter instability boundary // Int. J. of Non-Linear Mechanics.– 2003.– **38**.– C. 173–199.
4. *B. I. Epureanu, L. S. Tang, M. P. Paidoussis* Coherent structures and their influence on the dynamics of aeroelastic panels // Int. J. of Non-Linear Mechanics.– 2004.– **39**.– C. 977–991.
5. *B. Popescu* Deteriorated geometrical stiffness for higher order finite elements with application to panel flutter // Nonlinear Dynamics.– 1999.– **18**.– C. 89–103.
6. *Lee I., D.-M. Lee, I.-K. Oh* Supersonic flutter analysis of stiffened laminated plates subject to thermal load // J. of Sound and Vibr.– 1999.– **224(1)**.– C. 49–67.
7. *Новичков Ю.Н.* О применении трехмерных аэродинамических теорий к задачам выпучивания и флаттера панелей // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела.– 1963.– № 3.– С. 26-37.
8. *Вольмир А.С., Ништ М.И., Пономарев А.Т.* Нелинейные колебания пластины и цилиндрической панели при срывном нестационарном обтекании // Прикладная механика.– 1976.– Т. 11, № 1.– С. 12–17.
9. *D. Tang, E. H. Dowell* Limit cycle oscillations of two-dimensional panels in low subsonic flow // Int. J. of Non-linear Mechanics.– 2002.– **37**.– C. 1199–1209.
10. *A. Kornecki, E. H. Dowell, J. O'Brien* On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow // Journal of Sound and Vibration.– 1976.– **47(2)**.– C. 163–178.
11. *Селезов И.Т.* Панельный флаттер пластины в потоке сжимаемого газа // Сб. науч. трудов конференции "Аэрогидродинамика и аэроакустика: проблемы и перспективы".– 22-24 октября 2009.– ХАИ.– С. 183–186.
12. *Фын Я.Ц.* Введение в теорию аэроупругости.– М.: ГИФМЛ, 1950.– 424 с.
13. *Y. Fu, W. G. Price* Interactions between a partially or totally immersed vibrating cantilever plate and the surrounding fluid // Journal of Sound and Vibration.– 1987.– **118(3)**.– C. 495-513.
14. *Ergin A., Ugurlu B.* Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid // Journal of Fluids and Structures.– 2003.– **17**.– C. 927-939.
15. *Белоцерковский С.М., Ништ М.И.* К расчету срывного нестационарного обтекания тонкого профиля // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.– 1972.– № 3.– С. 177–182.
16. *Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А.* Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды.– Харьков: Новое слово, 2005.– 253 с.
17. *Голубев В.В.* Лекции по теории крыла.– М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949.– 480 с.
18. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.– М: Гостехтеориздат, 1953.– 416 с.
19. *J.L. Hess* Review of integral-equation techniques for solving potential-flow problems with emphasis on the surface-source method // Computer methods in applied mechanics and engineering.– 1975.– **5**.– C. 145–196.
20. M. Amabili Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates – London: Cambridge University Press. – 2008.
21. *Аврамов К.В.* Применение нелинейных нормальных форм к анализу вынужденных колебаний // Прикладная механика.– 2008.– № 11.– С. 45–51.
22. *Аврамов К.В.* Нелинейные нормальные формы параметрических колебаний // Доповіді Національної Академій Наук України.– 2008.– № 11.– С. 41–47.
23. *Аврамов К.В., Пьерр К., Ширяева Н.С.* Нелинейные нормальные формы колебаний систем с гироскопическими силами // Доповіді Національної Академій Наук України.– 2006.– № 11.– С. 7–10.