

УДК 534.3; 616.12-008

ФУНКЦІЯ ГРІНА ТРИВИМІРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ПРЯМОГО КАНАЛУ

А. О. БОРИСЮК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ
вул. Желябова, 8/4, 03680, МСП, Київ-180, Україна
E-mail: aobor@ukr.net

Отримано 17.06.2015 ◊ Переглянуто 18.09.2015

За допомогою розробленого в роботі методу побудовано функцію Гріна тривимірного конвективного хвильового рівняння для прямого каналу довільної (але незмінної по довжині) форми поперечного перерізу з акустично жорсткими і акустично м'якими стінками, а також зі стінками змішаного типу. Ця функція представляється рядом за акустичними модами каналу. Кожний член ряду є суперпозицією прямої та зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді вниз та вгору за течією від одиничного точкового імпульсного акустичного джерела. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти рівномірної осередненої течії в каналі. Вони стають вагомими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції відносно поперечного перерізу каналу, в якому розташоване джерело. Навпаки, зі зменшенням числа Маха вплив течії на функцію Гріна слабшає. У випадку відсутності течії в каналі функція Гріна стає симетричною відносно вказаного перерізу. На основі запропонованого методу одержано функції Гріна тривимірного конвективного хвильового рівняння для прямих каналів прямокутного та кругового поперечних перерізів. Окрім цього, запропоновано перетворення, котре дозволяє зводити одновимірне конвективне рівняння Кляйна–Гордона до його класичного одновимірного аналогу, який має відомий розв'язок.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: течія в каналі, функція Гріна, число Маха, конвективне хвильове рівняння

С помощью разработанного в работе метода построена функция Грина трехмерного конвективного волнового уравнения для прямого канала произвольной (но неизменной по длине) формы поперечного сечения с акустически жесткими и акустически мягкими стенками, а также со стенками смешанного типа. Эта функция представляется рядом по акустическим модам канала. Каждый член ряда является суперпозицией прямой и обратной волны, распространяющихся на соответствующей моде вниз и вверх по течению от единичного точечного импульсного акустического источника. В построенной функции Грина в явном виде отражены эффекты равномерного осредненного течения в канале. Они становятся более весомыми при увеличении числа Маха течения, обуславливая, в частности, появление и дальнейшее увеличение асимметрии функции относительно поперечного сечения канала, в котором находится источник. Наоборот, с уменьшением числа Маха влияние течения на функцию Грина слабеет. В случае отсутствия течения в канале полученная функция Грина симметрична относительно указанного сечения. На основании предложенного метода получены функции Грина трехмерного конвективного волнового уравнения для прямых каналов прямоугольного и кругового поперечных сечений. Кроме того, предложено преобразование, позволяющее сводить одномерное конвективное уравнение Кляйна–Гордона к его классическому одномерному аналогу, имеющему известное решение.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: течение в канале, функция Грина, число Маха, конвективное волновое уравнение

The Green's function of the three-dimensional convective wave equation for a straight channel of arbitrary (but constant along its length) cross-sectional shape, having either acoustically rigid or acoustically soft walls or the walls of a mixed type, is obtained by the method developed in this work. This function is represented by a series of the channel acoustic modes. Each term of the series is a superposition of the direct and reverse waves propagating in the corresponding mode downstream and upstream of the unit point impulse acoustic source, respectively. In the found Green's function, the effects of a uniform mean flow in the channel are directly reflected. The effects become more significant as the flow Mach number increases, causing, in particular, the appearance and further growth of the function asymmetry about the channel cross-section in which the noted source is located. Vice versa, the decrease of the Mach number results in the decrease of flow effects and, in particular, decrease of the indicated function asymmetry. In the case of flow absence in the channel, the obtained Green's function is symmetric about the noted cross-section. On the base of the above-mentioned method, the Green's functions of the three-dimensional convective wave equation for straight channels of rectangular and circular cross-sectional shape are also obtained. Moreover, a transformation is suggested that allows the reduction of the one-dimensional convective Klein–Gordon equation to its classical one-dimensional counterpart having the known solution.

KEY WORDS: flow in the channel, the Green's function, the Mach number, the convective wave equation

ВСТУП

Проблеми знаходження й дослідження акустичних полів, які генеруються в каналах різних геометрій та розмірів, становлять значний інтерес для автомобіле- та літакобудування, архітектури, медицини, нафтогазової промисловості, комуналь-

ного господарства тощо [1–5]. Усі такі задачі, незалежно від типу каналів й акустичних джерел у них, у принципі можуть бути розв'язані за допомогою методу функцій Гріна. Проте його застосування доцільне лише тоді, коли відповідну функцію вдається побудувати, що вимагає від дослідника високої професійної кваліфікації, більш того, ми-

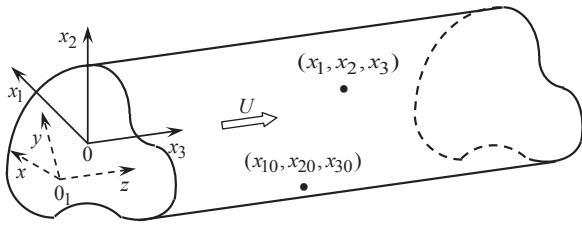


Рис. 1. Геометрія задачі (нескінченний прямий канал довільного поперечного перерізу)

стецтва.

Окрім того, така принципова можливість визначається багатьма факторами, серед яких згадаємо геометрію досліджуваного каналу, зокрема, форму поперечного перерізу, фізичні властивості стінок та умови його закріплення, фізичні властивості зовнішнього і внутрішнього середовища, акустичні умови на кінцях каналу, наявність або відсутність течії в ньому тощо. Як засвідчує аналіз відповідних наукових джерел, з-поміж конструкцій, геометрія та фізичні властивості яких визначаються різними комбінаціями цих факторів, найбільш повно досліджені нескінченні прямі жорсткі канали кругового та прямокутного поперечного перерізу (див., наприклад, [1, 2, 6–18] і відповідні посилання в них). Для них побудовано функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца, що дозволило на основі теореми Гріна одержати вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами у зазначених каналах. Проте всі згадані результати зазвичай обмежувалися випадком відсутності течії в каналі. Якщо ж наявність течії і бралася до уваги, то її ефекти у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах містились лише у неявному вигляді¹ [1, 2, 6–8, 10, 12–18].

Цей недолік було частково виправлено у нещодавніх публікаціях [19–21]. У них було побудовано функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого жорсткого каналу з внутрішньою рівномірною осередненою течією для випадків кругового [19] і прямокутного поперечного перерізу [20, 21]. Окрім іншого, у цих функціях вже у явному вигляді відображені ефекти наявності течії.

У даному дослідженні результати робіт [19–21] розвиваються й узагальнюються на випадок не-

скінченного прямого каналу довільної (але незмінної по його довжині) форми й площі поперечного перерізу з акустично жорсткими чи акустично м'якими стінками, або ж зі стінками змішаного типу. Одержані при цьому результати мають явну залежність від параметрів течії в каналі, а у разі конкретизації форми його поперечного перерізу (кругової чи прямокутної) співпадають з відповідними результатами, наведеними в [19–21].

Стаття складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури і двох додатків. У її розділі 1 формулюється задача. У розділі 2 будуються функції Гріна тривимірного конвективного хвильового рівняння для каналу довільної (але незмінної по його довжині) форми та площі поперечного перерізу із зазначеними вище типами стінок. У розділі 3 розглядаються канали найтипівіших прямокутної і кругової форм поперечного перерізу, для яких розробленим у розділі 2 методом будуються функції Гріна зазначеного хвильового рівняння. Після цього формулюються висновки, наводяться списки цитованої літератури й прийнятих позначень (додаток А). У додатку Б виводиться в операторному вигляді і розписується у довільній ортогональній криволінійній системі координат тривимірне конвективне хвильове рівняння.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

На рис. 1 зображено нерухомий нескінченний прямий канал довільної (але незмінної по його довжині) форми та площі поперечного перерізу. Тут мається на увазі така форма поперечного перерізу каналу і такий тип його стінок, для яких можна знайти (аналітично або чисельно) його акустичні моди. У каналі задано рівномірну осереднену по його поперечному перерізу течію рідини² зі швидкістю U в напрямку твірної його стінки, а також довільним чином розташовані акустичні джерела різної природи. Останні генерують у каналі акустичне поле, яке описується тривимірним конвективним хвильовим рівнянням (див. рівняння (46)

¹У явному вигляді (тобто у вигляді явних математичних залежностей досліджуваних характеристик акустичних полів від параметрів течії) ці ефекти проявлялись лише у відповідних масштабних законах та/або різного роду кількісних оцінках.

²Тут не вводиться ні в'язкість рідини, ні її масова густина. Це пояснюється тим, що при такій постановці задачі перша характеристика рідини взагалі не відіграватиме ніякої ролі (бо вважається, що згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому середовищі [1, 2, 10–18]), тоді як друга відобразиться у кінцевому результаті лише у неявному вигляді – через наперед задану швидкість звуку в незбуреному середовищі.

з додатку Б):

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \gamma, \quad (1)$$

$$(x_1, x_2) \in A, \quad |x_3| < \infty, \quad |t| < \infty.$$

Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (1) для цього каналу.

У рівнянні (1) c_0 – швидкість звуку в незбуреній рідині; p_a – акустичний тиск; t – час; γ задає сумарний розподіл зазначених акустичних джерел; x_1, x_2, x_3 – вибрані на рис. 1 ортогональні (у загальному випадку, криволінійні) координати з віссю x_3 уздовж течії; A – поперечний переріз каналу з площею $|A|$. Друга повна похідна за часом d^2/dt^2 і оператор Лапласа ∇^2 у системі координат (x_1, x_2, x_3) записуються наступним чином (див. співвідношення (48), (53) у додатку Б):

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_3} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad (2)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right].$$

Тут \vec{U} – вектор швидкості заданої в каналі течії:

$$\vec{U} = U_i \vec{e}_i = U_3 \vec{e}_3 = U \vec{e}_3;$$

h_i ($i=1, 2, 3$) – коефіцієнти Ляме [9, 22, 23] (детальніше див. формули (49), (52) у додатку Б):

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2}, \quad (3)$$

$$h_1 = h_1(x_1, x_2), \quad h_2 = h_2(x_1, x_2), \quad h_3 = 1;$$

$\vec{\nabla}$ – градієнт:

$$\vec{\nabla} = \nabla_i \vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i =$$

$$= \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3;$$

крапка між векторами \vec{U} та $\vec{\nabla}$ вказує на скалярне множення:

$$\vec{U} \cdot \vec{\nabla} = U_i \nabla_i = U \nabla_3 = U \frac{\partial}{\partial x_3};$$

\vec{e}_1, \vec{e}_2 та \vec{e}_3 – орти координатних осей x_1, x_2 та x_3 відповідно:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

x, y, z – прямокутні декартові координати, вибрані так, що:

- їхній початок лежить у тому ж поперечному перерізі каналу, що й початок системи координат (x_1, x_2, x_3) ,
- вісь z співнаправлена з віссю x_3 .

Детальні пояснення див. у додатку Б перед співвідношеннями (51).

Окрім того, тут і надалі передбачається підсумовування по індексах, що повторюються. Також, згідно з умовою задачі,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial x_3} = 0, \quad |A| = \text{const.}$$

2. ФУНКЦІЯ ГРІНА

2.1. Рівняння та умови, яким задовольняє функція Гріна

Шукана функція Гріна G описує у довільній точці каналу (x_1, x_2, x_3) в момент часу t акустичний тиск, згенерований в момент t_0 точковим імпульсним акустичним джерелом одиничної амплітуди, розташованим у каналі у точці (x_{10}, x_{20}, x_{30}) , див. рис. 1. Вона задовольняє рівняння

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 G}{dt^2} - \nabla^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0), \quad (4)$$

$$(x_1, x_2) \in A, \quad |x_3| < \infty, \quad |t| < \infty,$$

$$(x_{10}, x_{20}) \in A, \quad |x_{30}| < \infty, \quad |t_0| < \infty.$$

Тут, згідно зі співвідношеннями (48), (53) з додатку Б, $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ – тривимірний просторовий дельта-функція Дірака:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{h_1 h_2} \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30});$$

$\delta(x_i - x_{i0})$, $i=1, 2, 3$ – одновимірні просторові, а $\delta(t - t_0)$ – одновимірний часовий дельта-функції; $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$ і $\vec{r}_0 = x_{i0} \vec{e}_i$ – радіус-вектори відповідно точки поля і зазначеного джерела; оператори d^2/dt^2 і ∇^2 даються співвідношеннями (2).

Граничні умови для функції G можуть відображати, зокрема:

- відсутність нормальної компоненти акустичної швидкості на поверхні каналу S (у разі акустично жорсткої його стінки)

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \right|_S = 0 \quad (5)$$

де \vec{n} – зовнішня нормаль до S ;

- рівність нулеві акустичного тиску на S (у разі акустично м'якої стінки)

$$G|_S = 0, \quad (6)$$

- у разі акустичної жорсткості якоїсь частини стінки каналу і акустичної м'якості решти його стінки:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad G|_{S_2} = 0 \quad (7)$$

(тут S_1 і S_2 – частини поверхні каналу $S = S_1 \cup S_2$, на яких відповідно нормальна компонента акустичної швидкості і акустичний тиск дорівнюють нулеві).

Окрім цього, не повинно бути приходу звукових хвиль з нескінченності. Акустичне поле в усьому каналі до початку його генерації джерелом вважаємо відсутнім:

$$G|_{t < t_0} = 0. \quad (8)$$

На додаток має виконуватись принцип взаємності³ [9–18]:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = G(\vec{r}_0, -t_0; \vec{r}, -t). \quad (9)$$

2.2. Побудова функції Гріна та її аналіз

Розв'язок початково-граничної задачі (4)–(9) шукатимемо у вигляді розкладу функції G в ряд по акустичних модах вибраного каналу Ψ_{nm} :

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, t; x_{10}, x_{20}, x_{30}, t_0) = \\ = \sum_n \sum_m G_{nm}(x_3, t; x_{10}, x_{20}, x_{30}, t_0) \times \\ \times \Psi_{nm}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Ці моди задовольняють рівняння

$$\nabla_{(x_1, x_2)}^2 \Psi_{nm}(x_1, x_2) = -k_{nm}^2 \Psi_{nm}(x_1, x_2), \quad (11)$$

³У разі кругової форми поперечного перерізу каналу (див. підрозділ 3.2) додаються ще й умови періодичності та відповідної симетрії шуканої функції Гріна.

(в якому ∇^2 – оператор Лапласа в координатах x_1, x_2 – див. (50), (53) у додатку Б:

$$\nabla_{(x_1, x_2)}^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right];$$

k_{nm} – модальні хвильові числа у перерізі A), а також одну з граничних умов (5)–(7), залежно від типу стінок каналу, і можуть бути знайдені аналітично або чисельно. Їхня ж кількість, а відтак, і межі сум у формулі (10), залежать від форми поперечного перерізу каналу і типу його стінок.

Вираз (10) містить невідомі коефіцієнти G_{nm} . Для їх визначення підставимо ряд з правої частини у рівняння (4), розписане з урахуванням рівняння (2), помножимо одержаний при цьому вираз скалярно на моди Ψ_{nm} , а також врахуємо ортогональність функцій Ψ_{nm} :

$$\begin{aligned} \int_A \int \Psi_{nm}(x_1, x_2) \Psi_{sq}(x_1, x_2) dA = \\ = \begin{cases} \|\Psi_{nm}\|^2, & (s, q) = (n, m), \\ 0, & (s, q) \neq (n, m); \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \int_A \int \Psi_{nm}^2(x_1, x_2) dA;$$

$$dA = h_1 h_2 dx_1 dx_2$$

і співвідношення (11). Послідовність цих операцій приводить до одновимірного конвективного рівняння Кляйна – Гордона для G_{nm} [9, 19–21]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial t^2} + 2 \frac{M}{c_0} \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial t \partial x_3} - \left(1 - M^2\right) \times \\ \times \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial x_3^2} + k_{nm}^2 G_{nm} = \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \times \\ \times \delta(x_3 - x_{30}) \delta(t - t_0), \end{aligned} \quad (13)$$

в якому $M = U/c_0$ – число Маха течії в каналі, а квадрати норм мод $\|\Psi_{nm}\|^2$ і межі всіх змінних для області каналу даються формулами (12) і (4) відповідно.

Подальше введення нових безрозмірних змінних:

$$\begin{aligned} X_3 = \frac{\lambda x_3}{l}, \quad T = \lambda^{-1} \frac{c_0 t}{l} + M \frac{\lambda x_3}{l}, \\ X_{30} = \frac{\lambda x_{30}}{l}, \quad T_0 = \lambda^{-1} \frac{c_0 t_0}{l} + M \frac{\lambda x_{30}}{l}, \quad (14) \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \end{aligned}$$

дозволяє позбутися в рівнянні (13) конвективних доданків, які містять число Маха течії і переписати його у класичному вигляді [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial X_3^2} + k_{nm}^2 l^2 G_{nm} = \\ = l^2 \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \delta\left(\frac{l}{\lambda}(X_3 - X_{30})\right) \times \\ \times \delta\left(\frac{\lambda l}{c_0}(T - T_0 - M(X_3 - X_{30}))\right) \end{aligned} \quad (15)$$

в області $|X_3| < \infty$, $|X_{30}| < \infty$, $|T| < \infty$, $|T_0| < \infty$. Зауважимо, що l – масштаб довжини, вибір якого пояснюється після співвідношення (17).

Розв'язком класичного одновимірного рівняння Кляйна–Гордона (15) у вказаній області буде суперпозиція прямої та зворотної хвиль, які поширюються відповідно вправо та вліво від імпульсного джерела, розташованого у точці $X_3 = X_{30}$ [9, 10, 19–21]:

$$\begin{aligned} G_{nm} = \frac{c_0}{2} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \times \\ \times \left[H(X_{30} - X_3) H(T - T_0 + X_3 - X_{30}) + \right. \\ \left. + H(X_3 - X_{30}) H(T - T_0 - (X_3 - X_{30})) \right] \times \\ \times J_0\left(k_{nm} l \sqrt{(T - T_0)^2 - (X_3 - X_{30})^2}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Тут $H(\cdot)$ – функція Хевісайда [9, 10, 12–18]:

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\eta) d\eta = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

$J_0(\cdot)$ – циліндрична функція Бесселя першого роду порядку 0. Також було взято до уваги умову випромінювання на нескінченність (умову Зоммерфельда), яку має задовольняти функція G (див. підрозділ 2.1).

Тоді підстановка виразів (14) для змінних X_3 , X_{30} , T , T_0 у співвідношення (16) дає остаточні ви-

рази для коефіцієнтів G_{nm} у представленні (10):

$$\begin{aligned} G_{nm} = \frac{c_0}{2} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} J_0\left(k_{nm} l \sqrt{\xi}\right) \times \\ \times \left[H\left(\frac{\lambda}{l}(x_{30} - x_3)\right) \times \right. \\ \times H\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) + \\ + H\left(\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) \times \\ \left. \times H\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \xi = \frac{c_0^2}{\lambda^2 l^2} (t - t_0)^2 + 2 \frac{c_0 M}{l^2} (t - t_0) \times \\ \times (x_3 - x_{30}) + (M^2 - 1) \frac{\lambda^2}{l^2} (x_3 - x_{30})^2. \end{aligned}$$

Бачимо, що параметр l не впливає на значення жодної з функцій у виразі (17), а відтак і на коефіцієнти G_{nm} у функції Гріна (10). Дійсно, функції Ψ_{nm} і квадрати їхніх норм $\|\Psi_{nm}\|^2$, а також функція Бесселя J_0 не пов'язані з l . Знаки аргументів усіх функцій Хевісайда у формулі (17) не залежать від додатного параметра $l > 0$ ⁴. Це вказує на те, що масштаб довжини l у перетворенні (14) можна вибирати довільним чином.

Наявність співвідношень (17) дозволяє на основі формули (10) записати вираз для шуканої функції Гріна G :

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, t; x_{10}, x_{20}, x_{30}, t_0) = \\ = \frac{c_0}{2} \left[H\left(\frac{\lambda}{l}(x_{30} - x_3)\right) \times \right. \\ \times H\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) + \\ + H\left(\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) \times \\ \left. \times H\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) \right] \times \\ \times \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(x_1, x_2) \times \\ \times J_0\left(k_{nm} l \sqrt{\xi}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

⁴ Акустичні моди каналу і квадрати їхніх норм залежать від геометричних розмірів його поперечного перерізу. З цими розмірами може співпадати параметр l .

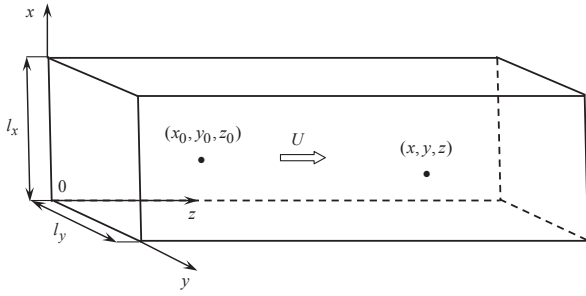


Рис. 2. Нескінченний прямий канал прямокутного поперечного перерізу

де ξ дається у співвідношенні (17).

Бачимо, що побудована функція Гріна (18) представляється рядом по акустичних модах вибраного каналу Ψ_{nm} . Кожен член цього ряду є сумою прямої та зворотної хвиль, які поширюються відповідно вниз та вгору за течією від одичного точкового імпульсного акустичного джерела, розташованого у поперечному перерізі каналу $x_3 = x_{30}$. Окрім цього, функція (18) задовольняє умову причинності (8) і принцип взаємності (9), а також граничні умови та умову випромінювання на нескінченність.

Подальший аналіз виразу (18) засвідчує, що в одержаній функції Гріна через числа M і $\lambda = \lambda(M)$ у явному вигляді відображені ефекти досліджуваної течії. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням M , зумовлюючи, окрім іншого, появу і подальше наростання асиметрії функції G відносно поперечного перерізу каналу $x_3 = x_{30}$, в якому розташоване джерело. Зі зменшенням числа Маха вплив течії на функцію G стає менш вагомим. У випадку відсутності течії в каналі ($M=0$, $\lambda=1$) функція (18) стає симетричною відносно його перерізу $x_3 = x_{30}$:

$$G|_{M=0} = \frac{c_0}{2} \left[H\left(\frac{x_{30} - x_3}{l}\right) H\left(\frac{c_0(t - t_0)}{l} + \frac{x_3 - x_{30}}{l}\right) + H\left(\frac{x_3 - x_{30}}{l}\right) H\left(\frac{c_0(t - t_0)}{l} - \frac{x_3 - x_{30}}{l}\right) \right] \times \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(x_1, x_2) \times J_0\left(k_{nm} \sqrt{c_0^2(t - t_0)^2 - (x_3 - x_{30})^2}\right).$$

Відзначимо, що у даній роботі увага приділяється каналам лише з такими поперечними перері-

зами і властивостями стінок, для яких аналітично або чисельно можуть бути знайдені їхні акустичні моди Ψ_{nm} . Далі розглянемо дві найтипівіші з таких форм – прямокутну і кругову. Для них відповідним чином виберемо координати x_1, x_2, x_3 і перепишемо граничні умови (5)–(7), а також знайдемо їхні акустичні моди Ψ_{nm} і модальні хвильові числа k_{nm} . Усе це дасть можливість:

- на основі співвідношення (18) одержати вирази для відповідних функцій Гріна рівняння (1);
- продемонструвати застосування розробленого у даній роботі методу побудови зазначених функцій до каналів типових геометрій.

3. ЧАСТИННІ ВИПАДКИ

Продемонструємо застосування розробленої вище теорії для випадку нескінченних прямих каналів прямокутної та кругової форм поперечного перерізу із зазначеними у підрозділі 2.1 типами стінок.

3.1. Канал прямокутного поперечного перерізу

Якщо канал має прямокутний поперечний переріз розмірів $l_x \times l_y$ (рис. 2), то очевидно, що:

- система координат (x_1, x_2, x_3) повинна бути прямокутною декартовою і співпадати з координатною системою (x, y, z) ;
- зв'язок між координатами x, y, z та x_1, x_2, x_3 довільної точки каналу (формула (51) у додатку Б) має бути таким:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3.$$

У такій ситуації всі коефіцієнти Ляме (3) дорівнюватимуть одиниці:

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1,$$

а рівняння (4) для функції Гріна G матиме вигляд

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 G}{dt^2} - \nabla_{(x,y,z)}^2 G = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0),$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\nabla_{(x,y,z)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x, & \quad x_0 \leq l_x; \\ 0 \leq y, & \quad y_0 \leq l_y; \\ |z| < \infty; & \quad |z_0| < \infty; \\ |t| < \infty; & \quad |t_0| < \infty. \end{aligned}$$

Тут $x_0 = x_{10}$, $y_0 = x_{20}$, $z_0 = x_{30}$ – координати одиничного точкового імпульсного акустичного джерела.

Сама ж функція Гріна рівняння (1) для обговорюваного каналу перепишеться на основі співвідношення (18) наступним чином:

$$\begin{aligned} G(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) = & \\ = \frac{c_0}{2} \left[H \left(\frac{\lambda}{l} (z_0 - z) \right) \times \right. & \\ \times H \left(\frac{c_0}{\lambda l} (t - t_0) + (M + 1) \frac{\lambda}{l} (z - z_0) \right) + & \\ + H \left(\frac{\lambda}{l} (z - z_0) \right) \times & \\ \left. \times H \left(\frac{c_0}{\lambda l} (t - t_0) + (M - 1) \frac{\lambda}{l} (z - z_0) \right) \right] \times & \\ \times \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}(x_0, y_0)}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(x, y) \times & \\ \times J_0 \left(k_{nm} l \sqrt{\xi} \right), & \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \xi = \frac{c_0^2}{\lambda^2 l^2} (t - t_0)^2 + 2 \frac{c_0 M}{l^2} (t - t_0) (z - z_0) + & \\ + (M^2 - 1) \frac{\lambda^2}{l^2} (z - z_0)^2. & \end{aligned}$$

Щоб мати можливість використовувати цю функцію для знаходження характеристик акустичних полів у зображеному на рис. 2 каналі, співвідношення (19) ще необхідно доповнити виразами для акустичних мод Ψ_{nm} , квадратів їхніх норм $\|\Psi_{nm}\|^2$ і модальних хвильових чисел k_{nm} каналу, а також знати кількість самих мод Ψ_{nm} і чисел k_{nm} . Усе це визначається після вибору типу стінок каналу.

3.1.1. Канал прямокутного поперечного перерізу з акустично жорсткими стінками

Якщо стінки зображеного на рис. 2 каналу є акустично жорсткими, то його акустичні моди Ψ_{nm} і

відповідні модальні хвильові числа k_{nm} задовольняють розписане у координатах x, y рівняння (11):

$$\nabla_{(x,y)}^2 \Psi_{nm}(x, y) = -k_{nm}^2 \Psi_{nm}(x, y), \quad (20)$$

$$\nabla_{(x,y)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$k_{nm} = \sqrt{k_{xn}^2 + k_{ym}^2};$$

граничну умову (5):

$$\frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial x} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial y} \Big|_{y=0, l_y} = 0,$$

і мають такий вигляд:

$$\Psi_{nm}(x, y) = \cos(k_{xn}x) \cos(k_{ym}y), \quad (21)$$

$$k_{xn} = \frac{n\pi}{l_x}; \quad k_{ym} = \frac{m\pi}{l_y};$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Тут і далі k_{nm} – модальні хвильові числа; k_{xn} і k_{ym} – модальні хвильові числа у напрямках x та y відповідно. Функції Ψ_{nm} ортогональні у поперечному перерізі каналу:

$$\begin{aligned} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \Psi_{nm}(x, y) \Psi_{sq}(x, y) dx dy = & \\ = \begin{cases} \|\Psi_{nm}\|^2, & (s, q) = (n, m); \\ 0, & (s, q) \neq (n, m). \end{cases} & \end{aligned}$$

Квадрати їхніх норм даються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \|\Psi_{nm}\|^2 = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \Psi_{nm}^2(x, y) dx dy = & \\ = \begin{cases} l_x l_y, & n = 0, \quad m = 0; \\ \frac{l_x l_y}{2}, & n = 0, \quad m \geq 1; \\ \frac{l_x l_y}{2}, & n \geq 1, \quad m = 0; \\ \frac{l_x l_y}{4}, & n \geq 1, \quad m \geq 1. \end{cases} & \end{aligned} \quad (22)$$

Підстановка представлень (21) і (22) у співвідношення (19) дає остаточний вираз для функції Гріна конвективного хвильового рівняння (1) для нескінченного прямого жорсткостінного каналу прямокутного поперечного перерізу, який збігається з

виразом для відповідної функції Гріна, одержаним у роботах [20, 21].

3.1.2. Канал прямокутного поперечного перерізу з акустично м'якими стінками

Якщо зображений на рис. 2 канал має акустично м'які стінки, то його моди Ψ_{nm} разом з модальними хвильовими числами k_{nm} задовольняють рівняння (20), граничну умову (6):

$$\Psi_{nm} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad \Psi_{nm} \Big|_{y=0, l_y} = 0,$$

і задаються виразами

$$\Psi_{nm}(x, y) = \sin(k_{xn}x) \sin(k_{ym}y), \quad (23)$$

де

$$k_{xn} = \frac{n\pi}{l_x}; \quad k_{ym} = \frac{m\pi}{l_y};$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Підстановка співвідношення (23) разом із виразами для квадратів норм мод

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \frac{l_x l_y}{4}$$

у формулу (19) дає остаточний вираз для функції Гріна рівняння (1) для даного випадку.

3.1.3. Канал прямокутного поперечного перерізу зі стінками змішаного типу

Розглянемо канал прямокутного поперечного перерізу зі стінками трьох типів:

- 1) одна акустично жорстка стінка і три акустично м'які;
- 2) дві акустично жорсткі та дві акустично м'які стінки;
- 3) три акустично жорсткі стінки й одна акустично м'яка.

Як і раніше, через k_{xn} та k_{ym} позначатимемо модальні хвильові числа у напрямках x та y відповідно.

Одна стінка каналу акустично жорстка, а три – акустично м'які

Для визначеності вважаємо акустично жорсткою буде стінку при $x=0$. Тоді гранична умова

(7) для акустичних мод Ψ_{nm} переписеться таким чином:

$$\frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \Psi_{nm} \Big|_{x=l_x} = 0, \quad (24)$$

$$\Psi_{nm} \Big|_{y=0, l_y} = 0.$$

Рівняння для функцій Ψ_{nm} і відповідних модальних хвильових чисел k_{nm} , як і раніше, матиме вигляд (20).

Розв'язком рівняння (20), який задовольняє умови (24), будуть функції Ψ_{nm} числа k_{nm} , задані формулами

$$\Psi_{nm}(x, y) = \cos(k_{xn}x) \sin(k_{ym}y), \quad (25)$$

$$k_{xn} = \frac{(2n+1)\pi}{2l_x}; \quad k_{ym} = \frac{m\pi}{l_y};$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$$

Квадрати їхніх норм виглядатимуть так:

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \frac{l_x l_y}{4}. \quad (26)$$

Підстановка виразів (25) і (26) у співвідношення (19) дає функцію Гріна конвективного хвильового рівняння (1) для каналу розглянутого тут типу.

Дві стінки каналу акустично жорсткі, а дві – акустично м'які

Для визначеності вважаємо акустично жорсткими стінки при $x=0$ та $x=l_x$, а акустично м'якими – дві інші (при $y=0$ та $y=l_y$). Тоді гранична умова (7) для акустичних мод каналу Ψ_{nm} набуде вигляду

$$\frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial x} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad \Psi_{nm} \Big|_{y=0, l_y} = 0. \quad (27)$$

Окрім неї, моди Ψ_{nm} і відповідні модальні хвильові числа k_{nm} повинні задовольняти рівняння (20).

Розв'язком задачі (20), (27) будуть наступні функції Ψ_{nm} і числа k_{nm} :

$$\Psi_{nm}(x, y) = \cos(k_{xn}x) \sin(k_{ym}y), \quad (28)$$

$$k_{xn} = \frac{n\pi}{l_x}; \quad k_{ym} = \frac{m\pi}{l_y};$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots;$$

а квадрати норм функцій Ψ_{nm} даватимуться виразами

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \begin{cases} \frac{l_x l_y}{2}, & n = 0, \quad m \geq 1; \\ \frac{l_x l_y}{4}, & n \geq 1, \quad m \geq 1. \end{cases} \quad (29)$$

Остаточний вигляд функції Гріна рівняння (1) для вибраного тут каналу одержимо зі співвідношення (19) після підстановки в нього співвідношень (28) і (29).

Три стінки каналу акустично жорсткі, а одна – акустично м’яка

Вважаємо акустично м’якою стінку при $y=0$, а всі інші – акустично жорсткими. Гранична умова (7) для акустичних мод Ψ_{nm} такого каналу виглядатиме наступним чином:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} &= 0, & \Psi_{nm}|_{y=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial y} \right|_{y=l_y} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Окрім цього, моди Ψ_{nm} й відповідні модальні хвильові числа k_{nm} мають задовольняти рівняння (20).

Шуканим розв’язком цієї задачі будуть такі функції Ψ_{nm} і числа k_{nm} :

$$\Psi_{nm}(x, y) = \cos(k_{xn}x) \cos(k_{ym}y), \quad (31)$$

$$k_{xn} = \frac{n\pi}{l_x}; \quad k_{ym} = \frac{(2m+1)\pi}{2l_y};$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots$$

При цьому квадрати норм функцій Ψ_{nm} задаються виразами

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \begin{cases} \frac{l_x l_y}{2}, & n = 0, \quad m \geq 0; \\ \frac{l_x l_y}{4}, & n \geq 1, \quad m \geq 0. \end{cases} \quad (32)$$

Підстановка співвідношень (31) і (32) у ряд (19) дає остаточний вираз для функції Гріна конвективного хвильового рівняння (1) у розглянутому частинному випадку.

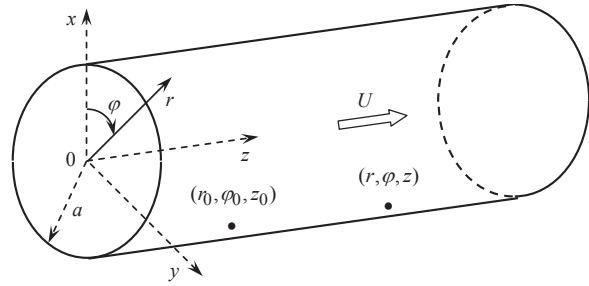


Рис. 3. Нескінченний прямий канал кругового поперечного перерізу

3.2. Канал кругового поперечного перерізу

Якщо поперечний переріз каналу, розглянутого у розділах 1 і 2, – круг із радіусом a , то за систему координат (x_1, x_2, x_3) доцільно вибрати циліндричну – (r, φ, z) (див. рис. 3). Зауважимо, що тут співпадають початки координатних систем (x, y, z) і $(x_1, x_2, x_3) = (r, \varphi, z)$, а також їхні осі z і x_3 , направлені вздовж напрямку основної течії в каналі. У такій ситуації

$$x_1 \equiv r, \quad x_2 \equiv \varphi, \quad x_3 \equiv z,$$

а зв’язок (51) між координатами x, y, z та x_1, x_2, x_3 довільної точки каналу (див. додаток Б) буде

$$x = r \cos \varphi \equiv x_1 \cos x_2,$$

$$y = r \sin \varphi \equiv x_1 \sin x_2,$$

$$z = x_3.$$

За таких обставин коефіцієнти Ляме (3) матимуть вигляд

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1,$$

а рівняння (4) для функції Гріна G переписеться таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 G}{dt^2} - \nabla_{(r, \varphi, z)}^2 G &= \\ &= \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0), \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\nabla_{(r, \varphi, z)}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\begin{aligned} 0 \leq r, & \quad r_0 \leq a; \\ 0 \leq \varphi, & \quad \varphi_0 \leq 2\pi; \\ |z| < \infty, & \quad |z_0| < \infty; \\ |t| < \infty, & \quad |t_0| < \infty. \end{aligned}$$

Тут $r_0 = x_{10}$, $\varphi_0 = x_{20}$, $z_0 = x_{30}$ – координати одиничного точкового імпульсного акустичного джерела.

Умови (5)–(7), яким задовольняє функція G , слід доповнити природними умовами її періодичності по азимутальній координаті φ :

$$G|_{\varphi=\varphi_*+2s\pi} = G|_{\varphi=\varphi_*}, \quad s = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (33)$$

і симетрії відносно осьового перерізу каналу $\varphi = \varphi_0$, в якому розташоване джерело:

$$G|_{\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi} = G|_{\varphi=\varphi_0-\Delta\varphi}, \quad \Delta\varphi > 0. \quad (34)$$

Сама ж функція Гріна G рівняння (1) для зображеного на рис. 3 каналу з урахуванням співвідношення (18) матиме такий вигляд⁵:

$$\begin{aligned} G(r, \varphi, z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) = & \\ = \frac{c_0}{2} \left[H\left(\frac{\lambda}{a}(z_0 - z)\right) \times \right. & \\ \times H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) + & \\ + H\left(\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) \times & \\ \times H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) \Big] \times & \\ \times \sum_{j=1}^2 \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) \times & \\ \times J_0\left(k_{nm}a\sqrt{\xi}\right), & \end{aligned} \quad (35)$$

де

$$\begin{aligned} \xi = \frac{c_0^2}{\lambda^2 a^2} (t - t_0)^2 + 2\frac{c_0 M}{a^2} (t - t_0)(z - z_0) + & \\ + (M^2 - 1)\frac{\lambda^2}{a^2} (z - z_0)^2. & \end{aligned}$$

Наявність у виразі (35) додаткової (у порівнянні з формулою (18)) суми пояснюється тим, що акустичні моди каналу кругового поперечного перерізу Ψ_{nm} природним чином поділяються на парні

⁵Тут, виходячи з наведеного після виразу (17) пояснення, за масштаб довжини l вибрано радіус поперечного перерізу каналу a .

$\Psi_{nm}^{(1)}$ і непарні $\Psi_{nm}^{(2)}$ по азимутальній координаті φ моди: $\Psi_{nm} = \{\Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)}\}$.

Щоб мати можливість застосовувати функцію (35) для знаходження на основі теореми Гріна [1, 9–18] характеристик акустичних полів, потрібно конкретизувати вигляд акустичних мод Ψ_{nm} , квадратів їхніх норм $\|\Psi_{nm}\|^2$ і модальних хвильових чисел k_{nm} зазначеного каналу. Також необхідно вказати кількість мод Ψ_{nm} і чисел k_{nm} . Усі ці параметри однозначно даються рівнянням (11) з урахуванням вигляду граничних умов, наведених у підрозділі 2.1.

3.2.1. Канал кругового поперечного перерізу з акустично жорсткими стінками

Нехай зображений на рис. 3 канал має акустично жорсткі стінки. У такій ситуації його акустичні моди Ψ_{nm} і відповідні модальні (радіальні) хвильові числа k_{nm} задовольнятимуть розписане у координатах (r, φ) рівняння (11):

$$\nabla_{(r,\varphi)}^2 \Psi_{nm}(r, \varphi) = -k_{nm}^2 \Psi_{nm}(r, \varphi), \quad (36)$$

$$\nabla_{(r,\varphi)}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

граничну умову (5):

$$\left. \frac{\partial \Psi_{nm}}{\partial r} \right|_{r=a} = 0,$$

умови періодичності (33) та симетрії (34), і матимуть такий вигляд:

$$\Psi_{nm} = \{\Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)}\},$$

$$\Psi_{nm}^{(1)}(r, \varphi) = J_n(k_{nm}r) \cos(n\varphi),$$

$$\Psi_{nm}^{(2)}(r, \varphi) = J_n(k_{nm}r) \sin(n\varphi),$$

(37)

$$k_{nm} = \frac{\zeta_{nm}}{a}; \quad n=0, 1, 2, \dots; \quad m=1, 2, \dots$$

Тут J_n – циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n , ζ_{nm} – корені рівняння

$$J'_n(\zeta_{nm}) = 0,$$

а $\Psi_{0m}^{(2)} \equiv 0$.

Квадрати норм функцій Ψ_{nm} , ортогональних у поперечному перерізі каналу:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) \Psi_{sq}^{(l)}(r, \varphi) r dr d\varphi = \begin{cases} \|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2, & (s, q, l) = (n, m, j), \\ 0, & (s, q, l) \neq (n, m, j), \end{cases}$$

задаються співвідношеннями

$$\|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2 = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(k_{0m}a), & n=0, \\ \frac{\pi a^2}{2} J_n^2(k_{nm}a) \left[1 - \frac{n^2}{k_{nm}^2 a^2}\right], & n \geq 1. \end{cases} \quad (38)$$

$$\|\Psi_{nm}^{(2)}\|^2 = \begin{cases} 0, & n=0, \\ \|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2, & n \geq 1. \end{cases}$$

Підстановка виразів (37) і (38) у формулу (35) дає функцію Гріна конвективного хвильового рівняння (1) для розглянутого у даному підрозділі каналу. Вона збігається з відповідною функцією Гріна, одержаною в роботі [19].

3.2.2. Канал кругового поперечного перерізу з акустично м'якими стінками

Якщо стінки зображеного на рис. 3 каналу акустично м'які, то його акустичні моди Ψ_{nm} , квадрати їхніх норм $\|\Psi_{nm}\|^2$ і модальні хвильові числа k_{nm} відрізнятимуться від наведених у підрозділі 3.2.1 лише значеннями параметрів ζ_{nm} . У даному разі ці величини будуть коренями рівняння

$$J_n(\zeta_{nm}) = 0,$$

яке випливає з граничної умови (6) для мод Ψ_{nm} :

$$\Psi_{nm}|_{r=a} = 0.$$

Зауважимо, що кількість мод Ψ_{nm} і чисел k_{nm} співпадає з кількістю мод для каналу, розглянутому в попередньому підрозділі. Відповідно, й функції Гріна рівняння (1) каналів кругового поперечного перерізу з акустично жорсткими й акустично м'якими стінками відрізнятимуться лише значеннями ζ_{nm} .

ВИСНОВКИ

1. Розробленим у даній роботі методом побудовано функцію Гріна G тривимірного конвективного хвильового рівняння для нескінченного прямого каналу довільної (але незмінної по його довжині) форми та площі поперечного перерізу з акустично жорсткими й акустично м'якими стінками, а також зі стінками змішаного типу. Ця функція дає можливість на основі теореми Гріна визначати характеристики акустичних полів, згенерованих у каналі акустичними джерелами різної природи.
2. Побудована функція Гріна представляється рядом по акустичних модах вибраного каналу. Кожен член цього ряду є суперпозицією прямої та зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді відповідно вниз та вгору за течією від одиничного точкового імпульсного акустичного джерела.
3. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти рівномірної осередненої течії в каналі. Вони стають вагомими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше наростання асиметрії функції G відносно поперечного перерізу каналу $x_3 = x_{30}$, в якому розташоване зазначене джерело. Навпаки, зі зменшенням числа Маха вплив течії на функцію G зменшується і її асиметрія зникає. У випадку відсутності течії в каналі функція G є симетричною відносно перерізу $x_3 = x_{30}$.
4. У процесі побудови функції Гріна запропоноване перетворення (14), котре дозволяє зводити одновимірне конвективне рівняння Кляйна–Гордона (13) до його класичного одновимірного аналогу (15), розв'язок якого відомий. Це дозволяє одержати розв'язок рівняння (13).
5. Одержано функції Гріна тривимірного конвективного хвильового рівняння для нескінченних прямих каналів найтипівіших прямокутної та кругової форм поперечного перерізу з акустично жорсткими або м'якими стінками.
6. Необхідне проведення подальших досліджень з метою перевірки можливості розширення запропонованого методу на випадок нескінченних прямих каналів довільного поперечного перерізу зі стінками довільних типів (за умови збереження лінійності задачі).

1. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 1. Загальна теорія // Акуст. вісн.– 2003.– 6, № 3.– С. 3–9.
2. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 2. Частинні випадки // Акуст. вісн.– 2004.– 7, № 4.– С. 10–20.
3. Berger S. A., Jou L.-D. Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech.– 2000.– 32.– P. 347–382.
4. Вовк І. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гідромех.– 2009.– 11, № 4.– С. 17–30.
5. Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenosis // J. Biomech. Eng.– 1979.– 101.– P. 157–175.
6. Davies H. G., Ffowcs Williams J. E. Aerodynamic sound generation in a pipe // J. Fluid Mech.– 1968.– 32, № 4.– P. 765–778.
7. Doak P. E. Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (1): The effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern // J. Sound Vib.– 1973.– 31, № 1.– P. 1–72.
8. Blake W. K. Mechanics of flow-induced sound and vibration: in 2 vols.– New York: Acad. Press, 1986.– 974 p.
9. Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics: vol. 1.– New York: McGraw-Hill, 1953.– 997 p.
10. Morse P. M., Ingard K. U. Theoretical acoustics.– New York: McGraw-Hill, 1968.– 927 p.
11. Junger M. C., Feit D. Sound, structures and their interaction.– Cambridge, MA: MIT Press, 1972.– 477 p.
12. Howe M. S. Acoustics of fluid-structure interactions.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.– 560 p.
13. Howe M. S. Hydrodynamics and sound.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.– 463 p.
14. Howe M. S. Theory of vortex sound.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.– 216 p.
15. Crighton D. G., Dowling A. P., Ffowcs Williams J. E., Heckl M., Leppington F. G. Modern methods in analytical acoustics. Lecture Notes.– London: Springer-Verlag, 1992.– 738 p.
16. Исакович М. А. Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 495 с.
17. Гринченко В. Т., Вовк І. В., Маципура В. Т. Основи акустики.– К.: Наукова думка, 2007.– 640 с.
18. Голдстейн М. Е. Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 294 с.
19. Борисюк А. О. Функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією // Акуст. вісн.– 2011.– 14, № 4.– С. 9–17.
20. Borisjuk A. O. Green's function of the convective wave equation for a rigid rectangular pipe // Sci.-Bas. Technol.– 2014.– 3(23).– P. 374–378.
21. Борисюк А. О. Функція Гріна конвективного хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби прямокутного поперечного перерізу // Доп. НАН України.– 2015.– № 3.– С. 40–44.
22. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
23. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: том 2.– М.: Физматгиз, 1962.– 808 с.

ДОДАТОК А. УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

l	– характерний розмір поперечного перерізу каналу;
a	– радіус поперечного перерізу (для каналу кругового поперечного перерізу);
l_x, l_y	– розміри поперечного перерізу (для каналу прямокутного поперечного перерізу);
U	– осереднена осьова швидкість рівномірної течії в каналі;
c_0	– швидкість звуку в незбуреній рідині;
M	– число Маха течії в каналі;
λ	– безрозмірний параметр, який залежить від числа M ;
x_1, x_2, x_3	– довільні ортогональні (у загальному випадку, криволінійні) координати;
x, y, z	– прямокутні декартові координати;
r, φ, z	– циліндричні координати;
\vec{r}	– радіус-вектор точки поля;
\vec{r}_0	– радіус-вектор акустичного джерела;
t	– час;
t_0	– пов'язаний з акустичним джерелом час;
Z, Z_0	– безрозмірні осеві координати;
T, T_0	– безрозмірний час;
$\delta(\cdot)$	– дельта-функція Дірака;
ρ	– масова густина рідини;
p	– тиск;
\vec{v}	– швидкість рідини;
ρ_0	– масова густина нестисливої рідини;
p_0	– тиск у нестисливій рідині;
ρ_a	– акустична густина;
p_a	– акустичний тиск;
\vec{v}_a	– акустична швидкість;
\vec{F}	– об'ємні сили;
q	– інтенсивність масових джерел;
γ	– функція, яка описує сумарний розподіл акустичних джерел у каналі;
Ψ_{nm}	– акустичні моди каналу довільного або прямокутного поперечного перерізу;
$\Psi_{nm}^{(j)}$	– акустичні моди каналу кругового поперечного перерізу;
k_{nm}	– модальні хвильові числа;
k_{xn}, k_{ym}	– модальні хвильові числа у напрямках x та y відповідно;
G	– функція Гріна;
h_i	– коефіцієнти Ляме ($i=1, 2, 3$).

ДОДАТОК Б. ТРИВИМІРНЕ КОНВЕКТИВНЕ ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ

Генерація та поширення малих (акустичних) збурень в рідині, яка рухається в області Ω , описується рівняннями Ейлера [9, 10, 12–14, 16–18]:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{\nabla} p, \quad (39)$$

нерозривності:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = q \quad (40)$$

та балансу енергії:

$$\frac{dp}{dt} = c_0^2 \frac{d\rho}{dt}. \quad (41)$$

Тут через

$$\rho = \rho_0 + \rho_a, \quad p = p_0 + p_a, \quad \vec{v} = \vec{U} + \vec{v}_a \quad (42)$$

позначено масову густину, тиск і швидкість рідини. Величини $\rho_0 = \text{const}$, $p_0 = \text{const}$ та \vec{U} відповідають значенням цих параметрів у нестисливному середовищі в області Ω ; ρ_a , p_a і \vec{v}_a – акустичним флуктуаціям густини, тиску та швидкості навколо ρ_0 , p_0 і \vec{U} відповідно:

$$\rho_a \ll \rho_0, \quad p_a \ll p_0, \quad |\vec{v}_a| \ll |\vec{U}|. \quad (43)$$

Тут t – час; \vec{F} і q – об'ємні сили та інтенсивність масових джерел, розподілені в області Ω ; c_0 – швидкість звуку в незбуреному середовищі. Повна похідна за часом записується так:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}. \quad (44)$$

Крапка між векторами \vec{v} та $\vec{\nabla}$ вказує на їх скалярне множення.

Враховуючи представлення (42), нерівності (43), а також той факт, що за умовою задачі $\vec{U} = \text{const}$ (див. розділ 1), перепишемо рівняння (39)–(41) і співвідношення (44) у спрощеному вигляді:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{d\vec{v}_a}{dt} &= \vec{F} - \vec{\nabla} p_a, \\ \frac{d\rho_a}{dt} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_a) &= q, \\ \frac{dp_a}{dt} &= c_0^2 \frac{d\rho_a}{dt}, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}. \end{aligned} \quad (45)$$

Візьмемо повну похідну за часом від другого і дивергенцію від першого рівнянь системи (45), після чого віднімемо від першого з одержаних співвідношень друге. Тепер врахуємо третє рівняння зазначеної системи, яке можна переписати у вигляді [9, 10, 12–14, 16–18, 22]

$$p_a = c_0^2 \rho_a.$$

У результаті одержимо рівняння

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \frac{dq}{dt} - \operatorname{div}(\vec{F}), \quad (46)$$

яке називається тривимірним конвективним хвильовим рівнянням. Конвективним воно називається за рахунок наявності повної похідної за часом d/dt , яка при $\vec{U} = 0$ має ненульову конвективну похідну $\vec{U} \cdot \vec{\nabla}$, спричинену течією в області Ω (див. останнє співвідношення системи (45)). У разі відсутності течії конвективна похідна у рівнянні (46) зникає і воно співпадає з класичним тривимірним хвильовим рівнянням).

Якщо в області Ω присутнє лише одичне точкове імпульсне джерело, яке розташоване у точці з радіус-вектором \vec{r}_0 і діє в момент часу t_0 , то рівняння (46) набуває вигляду

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0). \quad (47)$$

Тут \vec{r} – радіус-вектор точки поля в області Ω ; $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ – тривимірний просторовий, а $\delta(t - t_0)$ – одновимірний часовий дельта-функції Дірака.

Співвідношення (46) і (47) – загальні (операторні) рівняння, які описують генерацію та поширення малих збурень у рухомому акустичному середовищі в області Ω . Якщо в ній увести відповідну ортогональну криволінійну систему координат (x_1, x_2, x_3) так, щоб вісь x_3 була направлена уздовж течії (тобто в напрямку вектора швидкості \vec{U}), то друга повна похідна за часом d^2/dt^2 , оператор Лапласа ∇^2 і дельта-функція Дірака $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{U}{h_3} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_3} + \frac{U^2}{h_3^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right] = \\ &= \nabla_{(x_1, x_2)}^2 + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \\ \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30}), \\ \vec{r} &= x_i \vec{e}_i, \quad \vec{r}_0 = x_{i0} \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Тут h_i ($i=1, 2, 3$) – коефіцієнти Ляме [9, 22, 23]:

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2}; \quad (49)$$

$\nabla_{(x_1, x_2)}^2$ – оператор Лапласа у координатах x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} \nabla_{(x_1, x_2)}^2 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (50)$$

x, y, z – прямокутні декартові координати; $\delta(x_i - x_{i0})$ – одновимірні просторові дельта-функції Дірака. Вектор швидкості течії \vec{U} , градієнт $\vec{\nabla}$, а також їхній скалярний добуток $\vec{U} \cdot \vec{\nabla}$ записуються в координатах x_1, x_2, x_3 так:

$$\begin{aligned} \vec{U} &= U \vec{e}_3, \quad \vec{\nabla} = \nabla_i \vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i, \\ \vec{U} \cdot \vec{\nabla} &= U_i \nabla_i = U \nabla_3 = \frac{U}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Тут \vec{e}_i – орт координатної осі x_i . Окрім того, передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

Якщо область Ω і координатні осі x_1, x_2, x_3 відповідають зображенням на рис. 1, а систему координат (x, y, z) вибрано так, що:

- її початок знаходиться у тому ж поперечному перерізі області Ω , що й початок системи (x_1, x_2, x_3) ;
- вісь z співнаправлена з віссю x_3 ,

то

- координати x, y довільної точки зазначеного перерізу не залежатимуть від x_3 ;
- її координата z співпадатиме з координатою x_3 ;
- загальний зв'язок між координатами x, y, z і x_1, x_2, x_3 матиме вигляд

$$\begin{aligned} x &= x(x_1, x_2); & x_1 &= x_1(x, y); \\ y &= y(x_1, x_2); & x_2 &= x_2(x, y); \\ z &= x_3; & x_3 &= z. \end{aligned} \quad (51)$$

У такій ситуації коефіцієнти Ляме (49) не залежатимуть від x_3 :

$$h_1 = h_1(x_1, x_2), \quad h_2 = h_2(x_1, x_2), \quad h_3 = 1, \quad (52)$$

а наведені у співвідношеннях (48), (50) члени рівнянь (46) і (47) відповідним чином спростяться:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_3} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \right. \\ &+ \left. h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] = \nabla_{(x_1, x_2)}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \end{aligned}$$

$$\nabla_{(x_1, x_2)}^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right],$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{h_1 h_2} \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30}).$$