

УДК 534.26

## ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКОЇ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ НА СКІНЧЕННОМУ М'ЯКОМУ КОНУСІ ПРИ ОСЬОВОМУ ОПРОМІНЕННІ

Д. Б. КУРИЛЯК, В. О. ЛИСЕЧКО\*

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України

вул. Наукова, 5, 79060, Львів, Україна

\*E-mail: vtlysechko@gmail.com

Отримано 02.04.2014

Отримано розв'язок задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на скінченному м'якому порожнистому конусі при осьовому опроміненні. Задачу розв'язано відносно потенціалу швидкості дифрагovanого поля методом власних функцій підобластей з використанням процедури аналітичної регуляризації. Невідомі коефіцієнти розкладу отримано з розв'язку нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, які допускають розв'язок із заданою точністю. Досліджено вплив параметрів конуса на його дифракційні характеристики. Отримані числові результати порівнюються з відомими даними для диска.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** акустична хвиля, скінченний конус, діаграма спрямованості, переріз розсіювання, аналітична регуляризація

Получено решение задачи дифракции плоской акустической волны на конечном мягком полом конусе при осевом облучении. Задача решена относительно потенциала скорости дифрагированного поля методом собственных функций подобластей с использованием процедуры аналитической регуляризации. Незвестные коэффициенты разложения получены из решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода, допускающих решение с заданной точностью. Исследовано влияние параметров конуса на его дифракционные характеристики. Полученные численные результаты сравниваются с известными данными для диска.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** акустическая волна, конечный конус, диаграмма направленности, сечение рассеяния, аналитическая регуляризация

The paper deals with solving of a problem on diffraction a plane acoustic wave by a finite soft hollow cone in axial irradiation. The problem is solved in terms of the velocity potential using the technique of matching of eigenmodes for subdomains and analytical regularization procedure. The unknown expansion coefficients are determined from the infinite system of linear algebraic equations of the second kind that allow the obtaining of a solution with a desired accuracy. The effect of the finite cone parameters to its scattering characteristics is studied. The obtained numerical results are compared with the known ones for a disk.

**KEY WORDS:** acoustic wave, finite cone, scattering pattern, scattering cross-section, analytical regularization procedure

### ВСТУП

Неруйнівне діагностування і акустичний контроль матеріалів неможливо уявити без теоретичного моделювання взаємодії хвиль з дефектами канонічної форми, для яких існують коректні аналітичні чи напіваналітичні розв'язки відповідних дифракційних задач. Для надійної ідентифікації дефектів і включень важливо знати, як впливають фізичні властивості їхніх поверхонь на розсіяне поле. Проте задачі дифракції на скінченному імпедансному конусі, які дозволяють наближено врахувати ці ефекти, не піддаються розв'язанню математично строгими методами. Зауважимо, що дослідження дифракції хвиль на напівнескінчених імпедансних конусах було виконано в [1].

У статті [2] у якості тестової математичної моделі був розглянутий скінченний жорсткий конус, для якого розв'язано задачу дифракції плоскої

акустичної хвилі при осьовому опроміненні. У даній роботі буде розв'язано задачу дифракції поля плоскої хвилі на м'якому скінченному конусі. Це в сукупності з даними, отриманими в [2], дозволить оцінити вплив на дифрагovanе поле граничних значень імпедансу. Окрім того, розв'язки задач дифракції на м'якому і жорсткому конусах можуть використовуватись для моделювання конусів з поглинаючим покриттям [3].

Задачі дифракції акустичних хвиль на скінченних м'якому і жорсткому конусах досліджувались у [4–7]. Так, у статті [4] застосовувався метод геометричної теорії дифракції. У [5] задачу дифракції акустичних хвиль на порожнистому конусі було розв'язано методом Вінера–Хопфа у поєднанні з методом інтегральних перетворень Конторович–Лебедева. Метод підобластей [6] використовувався в роботі [7] для дослідження задачі випромінювання із сферичного сегменту м'якого конуса.

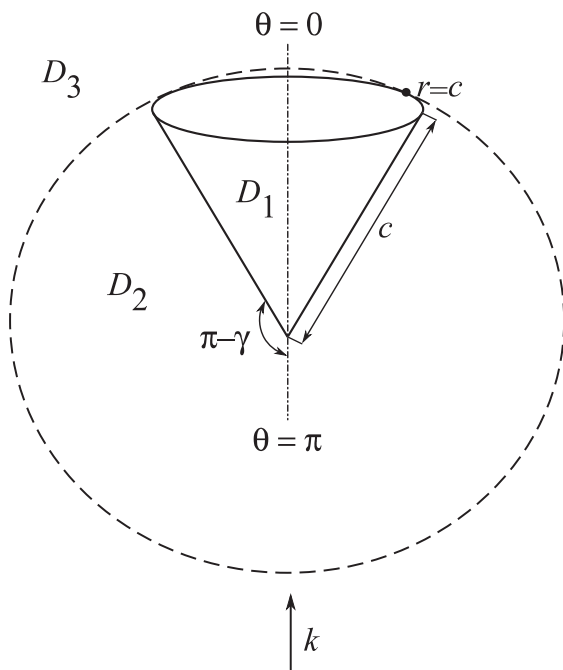


Рис. 1. Геометрія задачі

У монографії [8] для розв'язання задач дифракції на конусах було запропоновано метод аналітичної регуляризації. У цій роботі його буде використано для опису дослідження дифракції плоскої звукової хвилі на скінченному м'якому конусі.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Ідеально м'який порожнистий скінченний конус (рис. 1) задамо у сферичній системі координат  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$Q : \{r \in (0, c); \theta = \gamma; \varphi = [0, 2\pi]\}.$$

Вважаємо, що він розташований у необмеженому просторі, заповненому акустичним середовищем, і опромінюється плоскою монохроматичною хвилею, яка поширюється вздовж додатного напрямку осі  $z$  ( $\theta = 0^\circ$ ). Гармонічний часовий множник  $e^{-i\omega t}$  надалі опускаємо.

Взаємодія згаданої хвилі з конусом  $Q$  призводить до встановлення незалежного від кутової координати  $\varphi$  розподілу звукового тиску, який можна знайти, розв'язавши осесиметричну змішану крайову задачу для рівняння Гельмгольца відносно потенціалу швидкості дифрагованого поля  $U(r, \theta)$ :

$$\Delta U(r, \theta) + k^2 U(r, \theta) = 0.$$

Тут  $k = \omega/c_0$  – хвильове число;  $\omega$  – кругова частота;  $c_0$  – швидкість поширення звукової хвилі;  $\Delta$  – оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Потенціал  $U(r, \theta)$  задовольняє граничну умову

$$\left[ U(r, \theta) + U^{(i)}(r, \theta) \right] \Big|_{r, \theta \in Q} = 0,$$

умову випромінювання Зомерфельда, а також умову обмеженості енергії поля у довільному скінченному об'ємі  $V$ , яка зводиться до виконання умови Мейкснера на краю та вершині конуса. Тут  $U^{(i)}(r, \theta) = e^{ikr \cos \theta}$  – потенціал швидкості плоскої хвилі одиничної амплітуди:

$$U^{(i)}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(0)} P_{z_n-1/2}(\cos \theta) I_{z_n}(sr),$$

де  $s = -ik$ ;  $z_n = n - 1/2$ ;  $A_n^{(0)} = \sqrt{2\pi}(-1)^{n-1} z_n$ ;  $P_{\eta-1/2}(\cdot)$  – функція Лежандра;  $I_{\eta}(\cdot)$  – модифікована функція Бесселя.

### 2. ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ДО НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Подамо повне поле так:

$$U^{(t)}(r, \theta) = \begin{cases} U^{(i)}(r, \theta) + U(r, \theta), & r, \theta \in D_3; \\ U(r, \theta), & r, \theta \in D_1, D_2, \end{cases}$$

де

$$R^3 : \{r \in (0, \infty), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

а підобласті  $D_i$  визначаються співвідношеннями

$$D_1 : \{r \in (0, c); \theta \in [0, \gamma]\},$$

$$D_2 : \{r \in (0, c); \theta \in (\gamma, \pi]\},$$

$$D_3 : \{r \in (c, \infty); \theta \in [0, \pi]\}.$$

Запишемо загальний вигляд потенціалу швидкості дифрагованого поля:

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{p=1}^{\infty} y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta) \frac{I_{\nu_p}(sr)}{I_{\nu_p}(sc)}, & r, \theta \in D_1; \\ \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta) \frac{I_{\mu_k}(sr)}{I_{\mu_k}(sc)}, & r, \theta \in D_2; \\ \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \frac{K_{z_n}(sr)}{K_{z_n}(sc)}, & r, \theta \in D_3. \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $y_p^{(1)}$ ,  $y_k^{(2)}$ ,  $\bar{x}_n$  – невідомі коефіцієнти розкладу;  $K_{\eta}(\cdot)$  – функція Макдональда;  $\nu_p$ ,  $\mu_k$  – додатні корені трансцендентних рівнянь

$$P_{\eta-1/2}(\cos \gamma)|_{\eta=\nu_p} = 0, \quad P_{\eta-1/2}(-\cos \gamma)|_{\eta=\mu_k} = 0.$$

Невідомі коефіцієнти розкладу (1) шукаємо у класі послідовностей, що забезпечує рівномірну збіжність рядів, перші похідні яких допускають особливості типу  $\rho^{-1/2}$ , де  $\rho$  – відстань до краю конуса в локальній системі координат.

При знаходженні невідомих коефіцієнтів розкладу в рівняннях (1) слід використати умови спряження повного потенціалу і його нормальної похідної на сфері  $r=c$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , яка містить край конуса. Результуючі суматорні рівняння задачі з урахуванням особливості градієнта потенціалу при  $r \rightarrow c \pm 0$  і  $\theta \rightarrow \gamma \pm 0$  набудуть форми

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N A_n^{(0)} P_{z_n-1/2}(\cos \theta) I_{z_n}(sc) = \\ & = \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta), & \theta \in [0, \gamma); \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta), & \theta \in (\gamma, \pi]; \end{cases} \quad (2) \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \frac{K'_{z_n}(sc)}{K_{z_n}(sc)} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N A_n^{(0)} P_{z_n-1/2}(\cos \theta) I'_{z_n}(sc) = \\ & = \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta) \frac{I'_{\nu_p}(sc)}{I_{\nu_p}(sc)}, & \theta \in [0, \gamma); \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta) \frac{I'_{\mu_k}(sc)}{I_{\mu_k}(sc)}, & \theta \in (\gamma, \pi]. \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

Тут граничний перехід проведено так, щоб забезпечити виконання умови Мейкснера на краю конуса;  $N = P + K$ ; штрих означає похідну за аргументом  $f'(sc) = \partial f / \partial (sc)$ .

Для зведення рівнянь (2), (3) до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) використаємо формули перерозкладу функцій Лежандра:

$$P_{z_n-1/2}(\cos \theta) = q(z_n, \gamma) \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P \frac{\nu_p \alpha^+(\nu_p, \gamma)}{\nu_p^2 - z_n^2} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta), & \theta \in [0, \gamma), \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \frac{\mu_k \alpha^-(\mu_k, \gamma)}{\mu_k^2 - z_n^2} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta), & \theta \in (\gamma, \pi], \end{cases} \quad (4)$$

у яких  $q(z_n, \gamma) = P_{z_n-1/2}(\cos \gamma)$ ;  $\alpha^{\pm}(\eta, \gamma) = -2 [\partial P_{\nu-1/2}(\pm \cos \gamma) / \partial \nu]_{\nu=\eta}^{-1}$ ;  $\eta = \nu_p$  при верхньому знаку і  $\eta = \mu_k$  – при нижньому.

Справедлива теорема, яка може бути сформульована так: “Для усіх  $0 < \gamma < \pi$  ряди (4) збігаються до функції  $P_{z_n-1/2}(\cos \theta)/q(z_n, \gamma)$  рівномірно по куту  $\theta$  в областях  $\theta \in [0, \gamma]$  і  $\theta \in (\gamma, \pi]$  відповідно”. Її доведення аналогічне викладеному в роботі [2].

Використовуючи співвідношення (4) і виключаючи невідомі  $y_p^{(1)}$ ,  $y_k^{(2)}$ , системи суматорних рівнянь (2), (3) приводимо до НСЛАР порядку  $N = P + K$ :

$$\sum_{n=1}^N x_n \frac{scW[K_{z_n} I_{\nu_p}]_{sc}}{[\nu_p^2 - z_n^2] K_{z_n}(sc) I_{\nu_p}(sc)} = \sum_{n=1}^N \bar{A}_n^{(0)} \frac{scW[I_{z_n} I_{\nu_p}]_{sc}}{[\nu_p^2 - z_n^2] I_{z_n}(sc) I_{\nu_p}(sc)}, \quad (5a)$$

$$p = 1, 2, \dots, P;$$

$$\sum_{n=1}^N x_n \frac{scW[K_{z_n} I_{\mu_k}]_{sc}}{[\mu_k^2 - z_n^2] K_{z_n}(sc) I_{\mu_k}(sc)} = \sum_{n=1}^N \bar{A}_n^{(0)} \frac{scW[I_{z_n} I_{\mu_k}]_{sc}}{[\mu_k^2 - z_n^2] I_{z_n}(sc) I_{\mu_k}(sc)}, \quad (5b)$$

$$k = 1, 2, \dots, K,$$

де  $x_n = q(z_n, \gamma) \bar{x}_n$ ;  $W[f g]_x = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ ;  $\bar{A}_n^{(0)} = -q(z_n, \gamma) A_n^{(0)} I_{z_n}(sc)$ .

Із множин індексів  $\{\nu_p\}_{p=1}^\infty$  і  $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$  утворимо зростаючу послідовність

$$\{\xi_q\}_{q=1}^\infty = \{\nu_p\}_{p=1}^\infty \cup \{\mu_k\}_{k=1}^\infty. \quad (6)$$

Далі перейдемо в системі (5) до границі, коли  $N, P, K \rightarrow \infty$  ( $N = P + K$ ), розмістивши її рівняння у відповідності до послідовності (6). Отриману НСЛАР запишемо у матричному вигляді:

$$A_{11} X = F. \quad (7)$$

Тут  $X = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ ;  $A_{11}$  – нескінченний матричний оператор,

$$A_{11} : \left\{ a_{qn} = \frac{scW[K_{z_n} I_{\xi_q}]_{sc}}{[\xi_q^2 - z_n^2] K_{z_n}(sc) I_{\xi_q}(sc)} \right\}_{q,n=1}^\infty; \quad (8)$$

$F = \{f_q\}_{q=1}^\infty$  – відомий вектор,

$$f_q = \sum_{n=1}^\infty \bar{A}_n^{(0)} \frac{scW[I_{z_n} I_{\xi_q}]_{sc}}{[\xi_q^2 - z_n^2] I_{z_n}(sc) I_{\xi_q}(sc)}.$$

### 3. РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ НСЛАР

Головні члени асимптотик оператора (8) при  $\xi_q, z_n \gg |sc|$ ,  $|sc| \rightarrow 0$  мають вигляд матричного оператора типу згортки [8, 10]:

$$A : \left\{ a_{qn} = \frac{1}{\xi_q - z_n} \right\}_{q,n=1}^\infty. \quad (9)$$

Для знаходження оберненого оператора  $A^{-1}$  вводим до розгляду функцію

$$M(\nu, \gamma) = \frac{\cos \pi \nu}{\pi P_{\nu-1/2}(\cos \gamma) P_{\nu-1/2}(-\cos \gamma)}. \quad (10)$$

Тут  $M(\nu, \gamma)$  – парна мероморфна функція, яка є регулярною у смузі  $\Pi : \{\text{Re } \nu < 1/2\}$ , а за її межами має прості дійсні нулі і полюси у точках  $\pm z_k$ ,  $\pm \xi_q$  ( $k, q = \overline{1, \infty}$ );  $M(\nu, \gamma) = O(\nu)$  при  $|\nu| \rightarrow \infty$ .

Функція (10) допускає факторизацію у вигляді

$$M(\nu, \gamma) = M_+(\nu, \gamma) M_-(\nu, \gamma),$$

де  $M_\pm(\nu, \gamma)$  – функції, регулярні у півплощинах  $\text{Re } \nu > -1/2$  і  $\text{Re } \nu < -1/2$ ;  $M_+(\nu, \gamma) = M_-(-\nu, \gamma)$ ;  $M_\pm(\nu, \gamma) = O(\nu^{1/2})$  при  $\nu \rightarrow \infty$  в областях регулярності.

Використовуючи метод нескінченних добутків, функцію  $M_+(\nu, \gamma)$  подаємо так:

$$M_+(\nu, \gamma) = B_0 \left\{ \Gamma(\nu + 1/2) e^{\chi \nu} \times \prod_{n=1}^\infty \left( 1 + \frac{\nu}{\nu_n} \right) e^{-\nu/\nu_n} \prod_{n=1}^\infty \left( 1 + \frac{\nu}{\mu_n} \right) e^{-\nu/\mu_n} \right\}^{-1},$$

$$B_0 = [P_{-1/2}(\cos \gamma) P_{-1/2}(-\cos \gamma)]^{-1/2},$$

$$\chi = \frac{\gamma}{\pi} \ln \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\pi - \gamma}{\pi} \ln \frac{\pi - \gamma}{\pi} - \psi(3/4) - S(\gamma) - S(\pi - \gamma),$$

$$S(\gamma) = \sum_{n=1}^\infty \left\{ \frac{\gamma}{\pi(n-1/4)} - \frac{1}{\nu_n} \right\},$$

$$S(\pi - \gamma) = \sum_{n=1}^\infty \left\{ \frac{\pi - \gamma}{\pi(n-1/4)} - \frac{1}{\mu_n} \right\}.$$

Тут  $\psi(\cdot)$  – логарифмічна похідна гамма-функції.

Оператор, обернений до (9), запишемо у вигляді [8]

$$A^{-1} : \left\{ \tau_{kq} \right\}_{k,q=1}^\infty, \quad (11)$$

$$\tau_{kq} = \frac{1}{\{M_-^{-1}(\xi_q, \gamma)\}' M'_-(z_k, \gamma)(z_k - \xi_q)}.$$

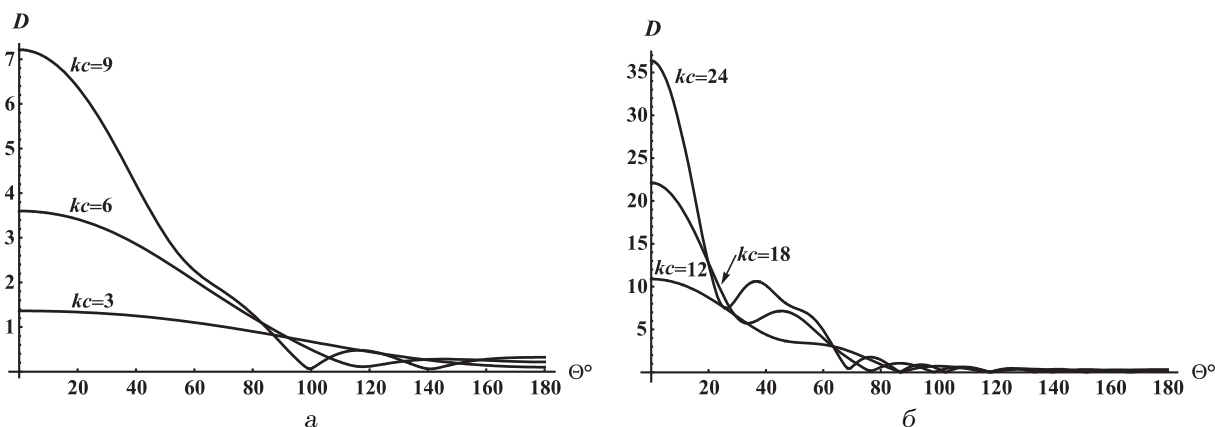


Рис. 2. Залежність діаграм спрямованості дифрагованого поля при  $\gamma = 20^\circ$  від параметра  $kc$ :  
 а –  $kc \leq 10$ ; б –  $kc > 10$

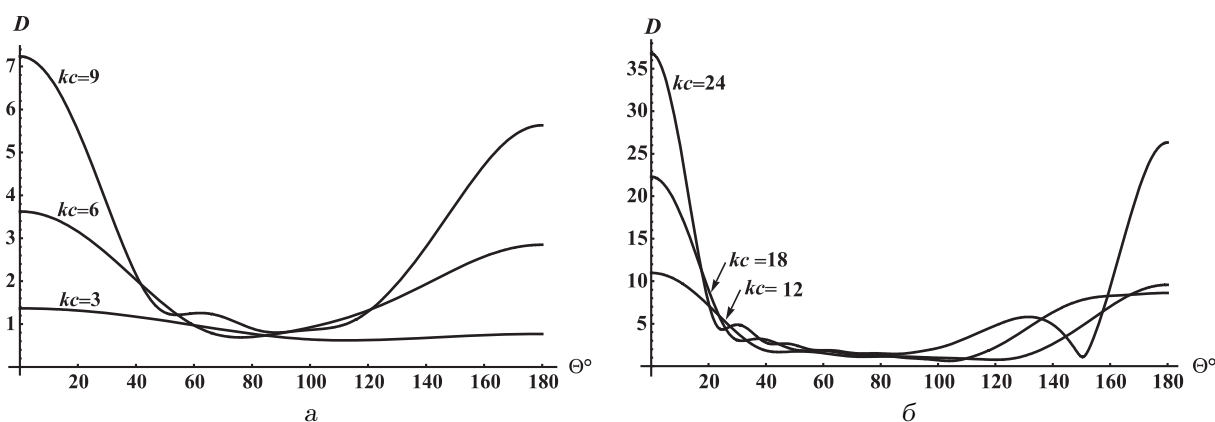


Рис. 3. Залежність діаграм спрямованості дифрагованого поля при  $\gamma = 160^\circ$  від параметра  $kc$ :  
 а –  $kc \leq 10$ ; б –  $kc > 10$

Тут штрих означає похідну за першим аргументом  $M'_-(\nu, \gamma) = d/d\nu[M_-(\nu, \gamma)]$ , взята в точках  $\nu = \xi_q$  і  $\nu = z_k$ . Матричні елементи оператора (11) знаходимо, використовуючи формули

$$M'_-(z_k, \gamma) = -\frac{1}{[P_{z_k-1/2}(\cos \gamma)]^2 M_+(z_k)},$$

$$\{M_-^{-1}(\xi_q, \gamma)\}' = \frac{\pi M_+(\xi_q)}{\cos \pi \xi_q} \times$$

$$\times \begin{cases} P_{\nu-1/2}(-\cos \gamma) \frac{\partial P_{\nu-1/2}(\cos \gamma)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\xi_q \in \{\nu_k\}_{k=1}^\infty}, \\ P_{\nu-1/2}(\cos \gamma) \frac{\partial P_{\nu-1/2}(-\cos \gamma)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\xi_q \in \{\mu_k\}_{k=1}^\infty}. \end{cases}$$

Виділимо з НСЛАР (7) матричний оператор (9) і, використовуючи обернений оператор (11), отри-

маємо НСЛАР другого роду:

$$X = A^{-1}[A - A_{11}]X + A^{-1}F. \quad (12)$$

Єдиний розв'язок НСЛАР (12) існує в просторі

$$b(\sigma) : \{ \|x_n\| = \sup_n |x_n n^\sigma|, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n n^\sigma = 0 \}$$

при  $0 \leq \sigma < 3/2$ , що забезпечує виконання умов Мейкснера на краю [8].

#### 4. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Усі характеристики розсіяного поля розраховувались на основі розв'язку скінченної системи рівнянь, отриманої з НСЛАР (12) методом редукції з додатковим використанням співвідношення (1). Порядок редукції вибирався з умови  $N = |kc| + q$ ,  $q = (4 \dots 10)$ . Аналізувались діаграми спрямовано-

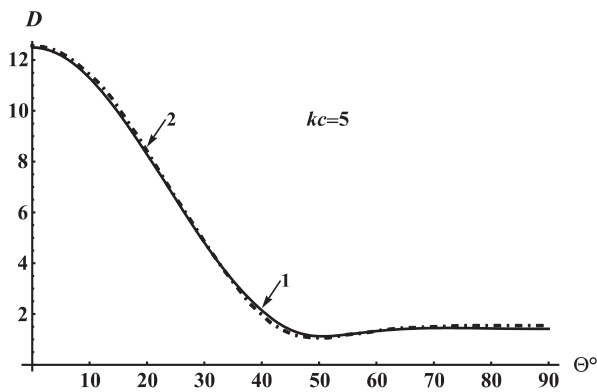


Рис. 4. Діаграми спрямованості для м'якого диска: 1 – наші розрахунки при  $\gamma=90.01^\circ$ ; 2 – “точна” теорія [11]

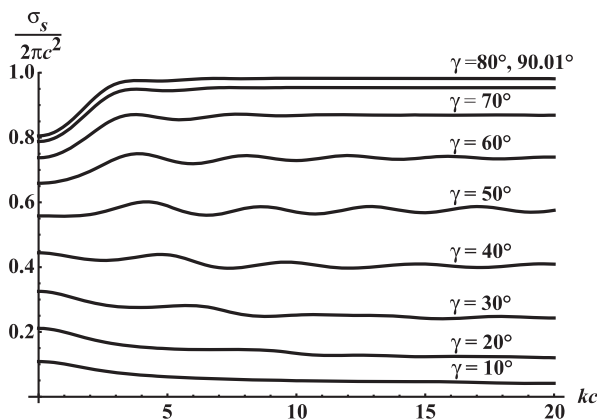


Рис. 5. Сімейство перерізів розсіювання  $\sigma_s(kc)$  для різних кутів розхилу конуса

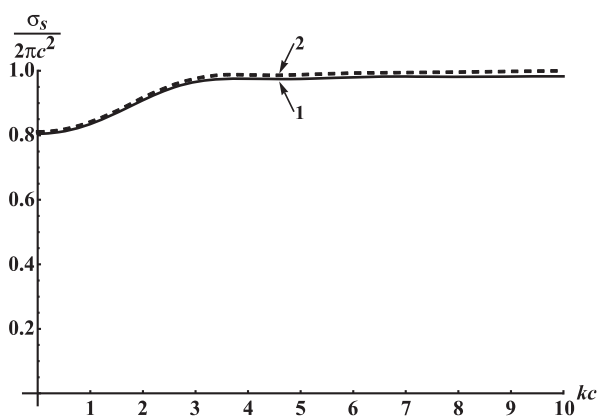


Рис. 6. Перерізи розсіювання для м'якого диска: 1 – наші розрахунки при  $\gamma=90.01^\circ$ ; 2 – “точна” теорія [11]

сті дифрагованого поля, розраховані за формулою

$$D(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} |rU(r, \theta)e^{-ikr}|,$$

де  $U(r, \theta)$  – потенціал швидкості дифрагованого поля (1) в області  $D_3$ .

На рис. 2 показано вплив хвильової довжини твірної конуса  $kc$  на діаграми спрямованості вузького конуса ( $\gamma=20^\circ$ ) при опроміненні його плоскою звуковою хвилею з боку вершини. При  $kc \leq 3$  дифраговане поле слабо залежить від хвильового параметра і практично рівномірно розподілене по куту  $\theta$ . Зі зростанням  $kc$  головна пелюстка діаграм спрямованості формується у напрямку  $\theta=0^\circ$ . Таким чином, основне випромінювання дифрагованого поля зосереджується у напрямку падіння плоскої хвилі, тоді як зворотне випромінювання ( $\theta=180^\circ$ ) з ростом  $kc$  практично спадає до нуля. Збільшення  $kc$  призводить до формування “глухої” області при  $\theta > 60^\circ$ , де модуль потенціалу швидкості дифрагованого поля близький до нуля (див. рис. 2, б).

На рис. 3 ілюструються аналогічні залежності для діаграм спрямованості при опроміненні конуса з боку основи ( $\gamma=160^\circ$ ). При  $kc=3$  діаграма спрямованості для скінченного вузького конуса при осьовому опроміненні плоскою хвилею з боку основи мало відрізняється від діаграми конуса, опроміненого від вершини (див. залежності на рис. 2, а і 3, а). Зі зростанням параметра  $kc$  спостерігається значний рівень випромінювання у зворотньому напрямку  $\theta=180^\circ$ , однак він не перевищує максимальний рівень випромінювання дифрагованого поля в напрямку поширення падаючої хвилі. При зростанні параметра  $kc$  понад 10 знову формується область, “глуха” до проникнення дифрагованого поля при  $40^\circ < \theta < 120^\circ$  (див. рис. 3, б). Аналогічну тенденцію можна спостерігати і для діаграм спрямованості скінчених конусів з ширшими кутами розхилу.

Верифікацію отриманих результатів проілюстровано на рис. 4, де отримані нами результати (крива 1) порівнюються з кривою 2, отриманою незалежним методом з використанням розкладу поля в ряд за сфероїдальними функціями [11]. Як видно з графіка, обидві залежності співпадають практично в усьому кутовому діапазоні. Це може служити підтвердженням достовірності отриманих результатів.

На рис. 5 наведені залежності перерізів розсіювання  $\sigma_s = \sigma_s(kc)$ , визначених за формулою

$$\frac{\sigma_s}{2\pi c^2} = -\frac{\pi}{(sc)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\bar{x}_n|^2}{(2n-1)|K_{z_n}(sc)|^2}$$

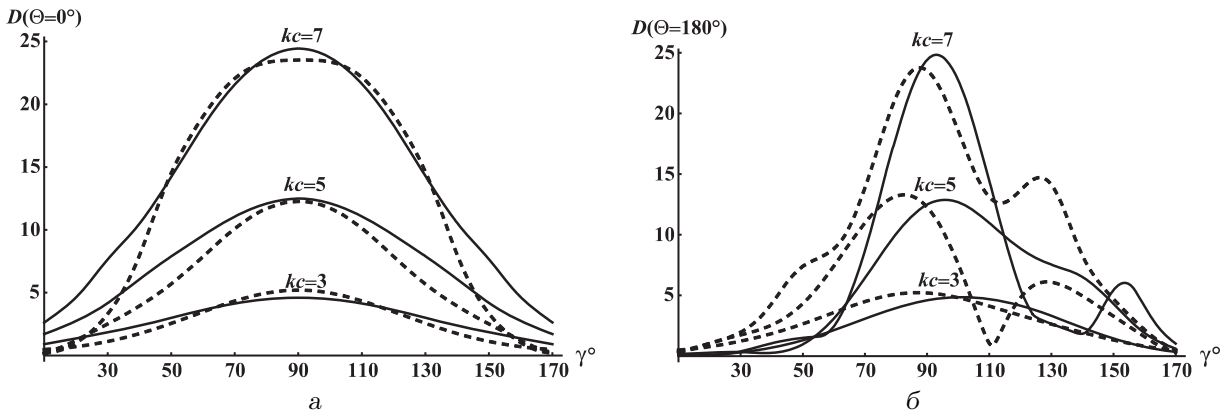


Рис. 7. Залежності  $D(\theta)$  від кута розхилу конуса  $\gamma$  при різних значеннях  $kc$ :  
 неперервна – м'який конус, штрихова – жорсткий конус;  
 а –  $\theta = 0^\circ$ , б –  $\theta = 180^\circ$

для різних кутів розхилу конуса. Як видно з поведінки цих кривих, значення  $\sigma_s(kc)$  зі збільшенням кута розхилу  $\gamma$  і  $kc > 5$  прямують до сталої величини. Як і слід було очікувати, значний рівень розсіювання спостерігається для широких конусів з  $\gamma \rightarrow \pi/2$ .

На рис. 6 показано залежність  $\sigma_s(kc)$  для диска, отриману нами (крива 1), і результат, запозичений з [11] (крива 2). Очевидно, що обидві криві практично співпадають в усьому діапазоні зміни параметра  $kc$ . Відзначимо, що у випадку релєвського розсіювання перший і другий методи дають  $\sigma_s(0) = 0.8048$  і  $\sigma_s(0) = 0.8106$  відповідно.

На рис. 7 наведено залежності модуля потенціалу швидкості поля, дифрагованого на м'якому скінченному конусі, від кута  $\gamma$  для різних значень хвильового параметра  $kc$ . Рис. 7, а відповідає  $\theta = 0^\circ$  (розсіювання "вперед" – у напрямку поширення падаючої хвилі), а рис. 7, б –  $\theta = 180^\circ$  ("зворотнє" розсіювання). Для порівняння на цьому ж графіку наведені відповідні характеристики для жорсткого конуса [2]. Отримані залежності дозволяють за даними одночастотного зондування визначити один з двох геометричних параметрів конуса ( $\gamma$  або  $c$ ), коли другий з них відомий. Детально цю процедуру було розглянуто у статті [2].

## ВИСНОВКИ

У результаті спільного застосування методу розкладу потенціалу швидкості в ряди за власними функціями підобластей, методів спряження полів і аналітичної регуляризації задачу дифракції поля плоскої звукової хвилі на скінченному абсолютно м'якому порожнистому конусі при його осьовому опроміненні зведено до НСЛАР другого ро-

ду, розв'язок якої забезпечує виконання усіх необхідних умов і може бути знайдений методом редукування з заданою точністю.

Отримано числовий розв'язок НСЛАР і досліджено характеристики розсіювання скінченного м'якого конуса в широкому діапазоні зміни геометричних параметрів і частоти. Достовірність отриманих результатів підтверджено порівнянням діаграм спрямованості і перерізів розсіювання конусів (при  $\gamma \rightarrow \pi/2$ ) і дисків, отриманих незалежними методами.

Наведено порівняння залежностей  $D(\theta = 0^\circ)$  і  $D(\theta = 180^\circ)$  для м'якого і жорсткого конусів як функцій кута розхилу  $\gamma$  для різних значень параметра  $kc$ . За аналогією зі статтею [2], встановлено можливість однозначного визначення геометричних параметрів конуса (твірної  $c$  і кута розхилу  $\gamma$ ) за даними одночастотного зондування, коли відомий один із цих параметрів. Зауважимо, що для визначення довжини конуса достатньо даних по розсіюванню вперед або назад. У той самий час, для визначення кута розхилу за відомої довжини  $c$  необхідно знати обидва результати при додатковій умові на частоту зондування  $kc \geq 3$ .

1. Antipov Y. A. Diffraction of a plane wave by a circular cone with an impedance boundary condition // SIAM J. Appl. Math. – 2002. – 62, № 4. – P. 1122–1152.
2. Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному жорсткому конусі при осьовому опроміненні // Акуст. вісн. – 2013–2014. – 16, № 2. – С. 8–17.
3. Куриляк Д. Б. Дифракція електричної хвилі на конусі, сформованому з ідеально магнітопровідної та електропровідної поверхонь // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 2. – С. 191–202.

4. Keller J. B. Backscattering from a finite cone // IEEE Trans. Antennas Propag.– 1960.– 8.– P. 175–182.
5. Вайслейб Ю. В. Рассеяние звуковых волн на конечном конусе // Акуст. ж.– 1971.– 17, № 1.– С. 33–42.
6. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Маципура В. Т. Волновые задачи акустики.– К.: Интерсервис, 2013.– 572 с.
7. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Излучение звуковой волны из полого конечного конуса // Линейные краевые задачи мат. физики.– К.: Ин-т математики АН УССР, 1973.– С. 129–139.
8. Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях.– К.: Наук. думка, 2006.– 280 с.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физматиз, 1963.– 1100 с.
10. Kuryliak D. B., Nazarchuk Z. T. Convolution type operators for wave diffraction by conical structures // Radio Science.– 2008.– 43.– RS4S03, doi 10.1029/2007RS003792.
11. Bowman J. J., Senior T. B. A., Uslenghi L. E., Asvestas J. S. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes.– Amsterdam: North-Holland, 1969.– 728 p.