

УДК 539.3

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ВЫНУЖДЕННЫХ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ И ДИССИПАТИВНОМ РАЗОГРЕВЕ ПОЛОГО КОНУСА ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

А. В. ЗАВГОРОДНИЙ

Николаевский национальный университет им. В. А. Сухомлинского
ул. Никольская, 24, 54030, Николаев, Украина
E-mail: Andrew-mdu@ukr.net

Получено 22.03.2014

На основе концепции комплексных характеристик представлена постановка связанной краевой задачи термовязкоупругости о вынужденных гармонических колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругой конической панели при действии на нее нормального внешнего давления. Для решения задачи применен метод конечных элементов. Исследовано влияние механических граничных условий на такие фундаментальные характеристики как зависимости амплитуды и температуры диссипативного разогрева от частоты.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: вязкоупругий материал, коническая панель, резонансные колебания, диссипативный разогрев, метод конечных элементов

На основі концепції комплексних характеристик представлено постановку зв'язаної крайової задачі термов'язкоупружності про вимушені гармонічні коливання й дисипативний розігрів в'язкоупружної конічної панелі при дії на неї нормального зовнішнього тиску. Для розв'язання задачі застосовано метод скінченних елементів. Досліджено вплив механічних граничних умов на такі фундаментальні характеристики як залежності амплітуди й температури дисипативного розігріву від частоти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: в'язкоупружний матеріал, конічна панель, резонансні коливання, дисипативний розігрів, метод скінченних елементів

On the base of a concept of complex characteristics, a coupled boundary problem on forced harmonic vibrations and dissipative heating of a viscoelastic conical panel under the action of normal external pressure is formulated. To solve this problem, a method of finite elements was used. The effect of mechanical boundary conditions on such fundamental characteristics as the dependencies of amplitude and temperature of dissipative heating on frequency is studied.

KEY WORDS: viscoelastic material, a conical panel, resonance vibrations, dissipative heating, the finite element method

ВВЕДЕНИЕ

Конические оболочки находят широкое применение в различных областях современной техники [1–3]. Для расчета напряженно-деформированного состояния, собственных частот и форм колебаний используются различные подходы – теории, основанные на гипотезах Кирхгофа–Лява [4, 5], уточненные теории с учетом деформаций сдвига [4–6] и формулировки, использующие трехмерные уравнения теории упругости. В настоящее время для решения задач последнего из упомянутых классов обычно используются численные методики, в частности, метод конечных элементов [7–11].

В связи с тем, что для изготовления конических элементов конструкций все чаще применяются композитные материалы на полимерной основе, становятся актуальными новые вопросы, связанные с учетом неупругого поведения материала.

Например, при вынужденных гармонических колебаниях в неупругих телах наблюдаются так называемые гистерезисные потери, в результате которых механическая энергия преобразуется в тепло, что приводит к повышению температуры тела – диссипативному разогреву. Его степень зависит от многих факторов: амплитуды и частоты механического нагружения, механических и тепловых граничных условий, свойств материала (в частности, диссипативных характеристик) и т. п. Следует ожидать, что наиболее высокий уровень диссипативного разогрева будет наблюдаться при колебаниях на резонансных частотах. Вопросы учета тепловых эффектов возникают также при пассивном демпфировании колебаний конических элементов за счет включения в них компонент с высокими гистерезисными потерями. Наиболее широко для этой цели используются вязкоупругие материалы [12–15]. Температура диссипативного разогрева может решающим образом влиять

на механическое и тепловое состояние неупругого тела, вплоть до его разрушения. Так, при достижении точек дегградации материала (например, точки плавления) элемент конструкции может потерять свое функциональное назначение [16–18].

Следует отметить, что в литературе отсутствуют работы, в которых исследовались бы колебания и диссипативный разогрев конических панелей из материалов с неупругими свойствами. Поэтому целью данной работы было рассмотрение трехмерной задачи о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве конической панели из вязкоупругого материала. Для моделирования механического поведения системы при гармоническом деформировании выбрана концепция комплексных характеристик [13, 14, 17, 19], суть которой состоит в том, что использованные уравнения состояния имеют такой же вид, как для упругого материала, с той лишь разницей, что они имеют комплексные коэффициенты. Для указанного вида деформирования существенно упрощается и уравнение состояния для диссипативной функции, которая равна усредненной за период мощности [17–19], переходящей в тепло и выступающей в качестве источников члена в уравнении энергии. Рассмотрен случай, когда комплексные характеристики материала не зависят от температуры. В этой ситуации достаточно найти решение задачи механики о вынужденных колебаниях конической панели из неупругого материала, откуда находится диссипативная функция, после чего решается уравнение энергии с известным источником тепла.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачу о вынужденных колебаниях конической панели будем решать методом конечных элементов в цилиндрической системе координат (r, z, θ) . Тело находится под действием изменяющегося по гармоническому закону внешнего нормально-го давления с частотой, близкой к резонансной. Рассматриваются два случая механических граничных условий, когда торцы панели жестко зашпелены или шарнирно оперты.

Динамическая задача о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругого тела вращения формулируется для трехмерных уравнений движения в цилиндрической системе координат [1, 4, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \rho \omega^2 w &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho \omega^2 u &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho \omega^2 v &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) – амплитудные значения компонент тензора напряжений; w, u, v – компоненты вектора перемещений; ρ – плотность материала; ω – циклическая частота колебаний.

На части поверхности тела Σ_p , где заданы поверхностные силы \vec{P}_n , тензор напряжений удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$P_{\alpha n} = \sigma_{\alpha\beta} l_{\beta n}. \quad (2)$$

Здесь l_β ($\beta = 1, 2, 3$) – направляющие косинусы внешней нормали \vec{n} к поверхности тела Σ_p ; $P_{\alpha n}$ – проекции поверхностных сил на оси цилиндрической системы координат. На другой части поверхности тела Σ_u , вообще говоря, могут быть заданы компоненты вектора перемещений.

Тензор малой деформации связан с вектором перемещений соотношениями Коши [1, 4, 5]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right), \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right], \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Для замыкания системы (1)–(3) ее необходимо дополнить уравнениями состояния. Будем рассматривать случай трансверсально-изотропного неупругого тела, для которого комплексные уравнения состояния в цилиндрической системе координат

нат (r, z, θ) имеют вид [4, 20]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \varepsilon_{rr} + c_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}^E \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}^E \varepsilon_{rr} + c_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}^E \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}^E \varepsilon_{rr} + c_{12}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}^E \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{rz} &= 2c_{44}^E \varepsilon_{rz}, \\ \sigma_{z\theta} &= (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{z\theta}, \\ \sigma_{r\theta} &= 2c_{44}^E \varepsilon_{r\theta} - e_{15} E_{\theta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Температурное поле диссипативного разогрева находится из решения уравнения теплопроводности [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_q r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + D_M = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными $(T=T_0$ при $t=t_0)$ и граничными условиями конвективного теплообмена с окружающей средой, имеющей температуру T_c :

$$\lambda_q \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_T (T - T_c). \quad (6)$$

Здесь λ_q – коэффициент теплопроводности; α_T – коэффициент теплоотдачи; c – коэффициент удельной массовой теплоемкости материала.

Диссипативная функция D_M , входящая в уравнение энергии (5), определяется по формуле [12, 16]:

$$D_M = \frac{\omega}{2} (\sigma''_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} \varepsilon''_{ij}), \quad i, j = r, \theta, z. \quad (7)$$

2. РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Соотношения (1)–(7), дополненные соответствующими начальными условиями, представляют собой достаточно сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных с переменными комплексными коэффициентами. Линейные задачи вязкоупругости с переменными комплексными коэффициентами и линейные задачи теплопроводности с известным источником тепла чаще всего решаются с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [7, 9, 11, 16]. Для этого дается вариационная формулировка задачи механики, которая сводит ее решение к нахождению

стационарных точек функционала

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{1}{2} \int_V \left[c_{11}^E \varepsilon_{zz}^2 + 2c_{13}^E \varepsilon_{zz} \varepsilon_{rr} + \right. \\ + 2c_{12}^E \varepsilon_{zz} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}^E \varepsilon_{rr}^2 + 2c_{13}^E \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\theta\theta} + \\ + c_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta}^2 + 4c_{44}^E \varepsilon_{r\theta}^2 + 4c_{44}^E \varepsilon_{rz}^2 + \\ \left. + 2(c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{z\theta} - \right. \\ \left. - \rho \omega^2 (u^2 + w^2 + v^2) \right] r dr dz d\theta - \\ - \int_{\Sigma_p} (p_{nz} w + p_{nr} u + p_{r\theta} v - \sigma^e \Psi) d\Sigma_p. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение задачи теплопроводности с известным источником тепла сводится к решению вариационной задачи для функционала

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2} \times \\ \times \int_V \left[\lambda_q \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + \lambda_q \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{\lambda_q}{r^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - 2D_M T \right] r dr dz d\theta + \\ + \int_S \alpha \left(\frac{T}{2} - T_c \right) T dS. \end{aligned} \quad (9)$$

Для аппроксимации напряженно-деформированного состояния в плоскости меридионального сечения (r, z) применяются алгебраические полиномы второй степени. Для аппроксимации перемещений в окружном направлении в каждом элементе используются тригонометрические полиномы, представляющие три члена ряда Фурье:

$$H(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta. \quad (10)$$

Разобьем область, которую занимает тело, N узловыми точками на M пространственных элементов. При этом предполагаем, что перемещения в пределах элемента аппроксимируются выражениями

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{i=1}^{24} K_i w_i, \\
 u &= \sum_{i=1}^{24} K_i u_i, \\
 v &= \sum_{i=1}^{24} K_i v_i.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь w_i, u_i, v_i – узловые значения перемещений; K_i – аппроксимирующие функции, представляющие собой комбинации алгебраических L_j ($j=1, 2, 3, \dots, 8$) и нормализованных тригонометрических полиномов H_j ($j=1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), \\
 L_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \\
 L_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta+1), \\
 L_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), \\
 L_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \\
 L_6 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi), \\
 L_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \\
 L_8 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi),
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 H_1(\theta) &= \\
 &= \frac{\sin(\theta-\theta_2)-\sin(\theta-\theta_3)+\sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_2)-\sin(\theta_1-\theta_3)+\sin(\theta_2-\theta_3)}, \\
 H_2(\theta) &= \\
 &= \frac{\sin(\theta-\theta_3)-\sin(\theta-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_3)-\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_1)}, \\
 H_3(\theta) &= \\
 &= \frac{\sin(\theta-\theta_1)-\sin(\theta-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_1)-\sin(\theta_3-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Определенные таким образом функции формы $K_1=L_1H_1, K_2=L_2H_1, \dots, K_{24}=L_8H_3$ равны нулю

во всех узловых точках элемента, за исключением узла, номер которого совпадает с номером соответствующей функции формы. Кроме того, они удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{24} K_i = 1.$$

Связь между цилиндрическими (r, z) и местными (ξ, η) координатами осуществляется с помощью зависимостей

$$\begin{aligned}
 r &= \sum_{i=1}^{24} K_i r_i, \\
 z &= \sum_{i=1}^{24} K_i z_i.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Так как получить зависимости вида $\xi(r, z), \eta(r, z)$, обратные выражениям (14), не представляется возможным, то частные производные при определении деформаций следует вычислить по ξ, η , а затем полученные зависимости решить относительно производных по цилиндрическим координатам. В результате выражения для компонент тензора деформаций через узловые значения перемещений запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \sum_{i=1}^{24} \Psi_i u_i, \\
 \varepsilon_{zz} &= \sum_{i=1}^{24} \Phi_i w_i, \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \sum_{i=1}^{24} \left(\frac{1}{r} \chi_i v_i + \frac{1}{r} K_i u_i \right), \\
 \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{24} \Phi_i u_i + \sum_{i=1}^{24} \Psi_i w_i \right), \\
 \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{24} \Phi_i v_i + \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{r} \chi_i w_i \right), \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{24} \frac{1}{r} \chi_i u_i + \sum_{i=1}^{24} \Psi_i v_i - \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{r} K_i v_i \right),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\Phi_i = \frac{1}{|j|} \left(\frac{\partial K_i}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial K_i}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right);$$

$$\Psi_i = \frac{1}{|j|} \left(\frac{\partial K_i}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial K_i}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right); \quad (16)$$

$$\chi_i = \frac{\partial K_i}{\partial \theta}.$$

Отметим, что величина

$$|j| = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi}$$

представляет собой определитель Якоби (якобиан).

Механическое нагружение \vec{P} также аппроксимируем функциями формы в пределах каждого конечного элемента:

$$P_{nz} = \sum_{i=1}^{24} K_i P_{inz},$$

$$P_{nr} = \sum_{i=1}^{24} K_i P_{inr}, \quad (17)$$

$$P_{n\theta} = \sum_{i=1}^{24} K_i P_{in\theta}.$$

Подставив выражения для деформаций в функционал (8), из условия его стационарности получим систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений компонент вектора перемещений (w_i, u_i, v_i, φ_i) для отдельного конечного элемента:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_1} = a_{11}^w w_1 + b_{11}^w u_1 +$$

$$+ c_{11}^w v_1 + d_{11}^w \phi_1 + \dots + a_{124}^w w_{24} +$$

$$+ b_{124}^w u_{24} + c_{124}^w v_{24} + d_{124}^w \phi_{24} = P_1^{(z,w)},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial u_1} = a_{11}^u w_1 + b_{11}^u u_1 +$$

$$+ c_{11}^u v_1 + d_{11}^u \phi_1 + \dots + a_{124}^u w_{24} +$$

$$+ b_{124}^u u_{24} + c_{124}^u v_{24} + d_{124}^u \phi_{24} = P_1^{(r,u)}, \quad (18a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_1} = a_{11}^v w_1 + b_{11}^v u_1 +$$

$$+ c_{11}^v v_1 + d_{11}^v \phi_1 + \dots + a_{124}^v w_{24} +$$

$$+ b_{124}^v u_{24} + c_{124}^v v_{24} + d_{124}^v \phi_{24} = P_1^{(\theta,v)},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_{24}} = a_{241}^w w_1 + b_{241}^w u_1 + c_{241}^w v_1 +$$

$$+ d_{241}^w \phi_1 + \dots + a_{2424}^w w_{24} + b_{2424}^w u_{24} +$$

$$+ c_{2424}^w v_{24} + d_{2424}^w \phi_{24} = P_{24}^{(z,w)},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial u_{24}} = a_{241}^u w_1 + b_{241}^u u_1 + c_{241}^u v_1 +$$

$$+ d_{241}^u \phi_1 + \dots + a_{2424}^u w_{24} + b_{2424}^u u_{24} +$$

$$+ c_{2424}^u v_{24} + d_{2424}^u \phi_{24} = P_{24}^{(r,u)}, \quad (18b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_{24}} = a_{241}^v w_1 + b_{241}^v u_1 + c_{241}^v v_1 +$$

$$+ d_{241}^v \phi_1 + \dots + a_{2424}^v w_{24} + b_{2424}^v u_{24} +$$

$$+ c_{2424}^v v_{24} + d_{2424}^v \phi_{24} = P_{24}^{(\theta,v)}.$$

Выражения для коэффициентов a_{ij}, \dots, d_{ij} этих уравнений определяются через физико-механические характеристики материала и геометрические параметры рассматриваемого тела.

Просуммировав выражения (18) по всем конечным элементам, для общей (глобальной) нумерации узлов придем к системе уравнений, в которой интегрирование по объему тела заменено суммой интегралов, взятых по объему отдельных конечных элементов, а интегрирование по поверхности – суммой интегралов по поверхностям элементов, на которых заданы граничные условия в напряжениях. Результирующая система алгебраических уравнений решается в комплексной области методом Гаусса. Это позволяет с высокой точностью получить решение систем большой размерности без нарушения симметричности и ленточности их структуры. По найденным узловым значениям перемещений определяются компоненты тензора деформаций в произвольной точке конечного элемента. При этом вследствие необходимого дифференцирования точность определения деформаций будет ниже, чем для перемещений. Величина погрешности также будет различаться для разных точек элемента. Наиболее точные значения получаются в точках интегрирования Гаусса, соответствующих минимально допустимому порядку интегрирования [4, 5, 7, 13] (в данном случае $n=8$).

При решении вариационной задачи (9) для уравнения теплопроводности производная по времени $\partial T / \partial t$ не варьируется и заменяется выражением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}, \quad (19)$$

что позволяет реализовать неявную схему решения.

Поэтому вычисления деформаций и механических напряжений проводится в восьми точках интегрирования. Как известно, их положение определяется иррациональными числами [7, 9, 10]. Это доставляет некоторое неудобство при анализе результатов, так как для многих практически важных расчетов необходимы значения напряжений, вычисленные в узловых точках конечно-элементной сетки, а также на границе тела. Наиболее простое определение деформации напряжений в каждом конечном элементе получается при экстраполяции величин, вычисленных в точках интегрирования, на произвольные значения координат (в том числе, и на границу). Для рассматриваемого случая наивысшая точность достигается при экстраполяции напряжений билинейными полиномами.

3. АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве примера применения обсуждавшегося выше подхода рассмотрим задачу о колебаниях и диссипативном разогреве однослойной конической панели со следующими геометрическими размерами: радиусы основ конической панели составляют $R_1=0.15$ м, $R_2=0.2$ м; толщина $h=0.02$ м; высота конуса $l=0.12$ м; угол разворота $\theta_0=\pi/3$.

Комплексные уравнения состояния для трансверсально-изотропного материала в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_{33}\varepsilon_r + C_{13}\varepsilon_\phi + C_{13}\varepsilon_z, \\ \sigma_{r\phi} &= 2C_{44}\varepsilon_{r\phi}, \\ \sigma_\phi &= C_{13}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\phi + C_{12}\varepsilon_z, \\ \sigma_{z\phi} &= (C_{11} - C_{12})\varepsilon_{z\phi}, \\ \sigma_r &= C_{13}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\phi + C_{11}\varepsilon_z, \\ \sigma_{zr} &= 2C_{44}\varepsilon_{zr}. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь комплексные модули C_{kl} ($k, l=1, 2, 3, 4$), определяемые через комплексные податливости по

формулам

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{11}S_{33} - S_{13}^2}{P(S_{11} - S_{12})}; \\ C_{12} &= \frac{S_{13}^2 - S_{12}S_{33}}{P(S_{11} - S_{12})}; \\ C_{13} &= -\frac{S_{13}}{P}; \quad C_{33} = \frac{S_{11} - S_{12}}{P}; \\ C_{66} &= C_{11} - C_{12}; \quad C_{55} = \frac{1}{S_{55}}; \\ P &= (S_{11} + S_{12})S_{33} - 2S_{13}^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Для действительных составляющих податливостей S_{kl} материала (ES-65)PZT использованы представленные в [20] экспериментальные данные об их зависимости от температуры. Они с высокой точностью могут быть аппроксимированы формулами

$$\begin{aligned} S'_{11} &= (0.171 \cdot 10^2 + 0.48335 \cdot 10^{-2}T - \\ &\quad - 0.48511 \cdot 10^{-4}T^2) \cdot 10^{-12} \text{ [м}^2/\text{Н]}, \\ S'_{12} &= -(0.568 \cdot 10^1 + 0.48333 \cdot 10^{-2}T - \\ &\quad - 0.19444 \cdot 10^{-4}T^2) \cdot 10^{-12} \text{ [м}^2/\text{Н]}, \\ S'_{13} &= -(0.91 \cdot 10^1 + 0.97231 \cdot 10^{-2}T - \\ &\quad - 0.38544 \cdot 10^{-4}T^2) \cdot 10^{-12} \text{ [м}^2/\text{Н]}, \\ S'_{33} &= (0.184 \cdot 10^2 - 0.43333 \cdot 10^{-1}T + \\ &\quad + 0.11111 \cdot 10^{-3}T^2) \cdot 10^{-12} \text{ [м}^2/\text{Н]}, \\ S'_{55} &= (0.460 \cdot 10^2 - 0.29167 \cdot 10^{-1}T - \\ &\quad - 0.6944 \cdot 10^{-4}T^2) \cdot 10^{-12} \text{ [м}^2/\text{Н]}. \end{aligned} \tag{22}$$

Кроме того, считалось, что мнимые составляющие податливостей имеют такие значения:

$$\begin{aligned} S''_{11} &= -\frac{0.2}{17.1}S'_{11}, \quad S''_{12} = -\frac{0.1}{5.8}S'_{12}, \\ S''_{13} &= -\frac{0.2}{9.1}S'_{13}, \quad S''_{33} = -\frac{0.4}{18.4}S'_{33}, \\ S''_{55} &= -\frac{5.6}{468}S'_{55}. \end{aligned} \tag{23}$$

Для рассматриваемого материала коэффициент теплопроводности был $\lambda = 1.25 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{С})$, а плотность – $\rho = 0.75 \cdot 10^4 \text{ кг}/\text{м}^3$. Коэффициент теплоотдачи между внешней средой и материалом панели в расчетах принимался постоянным – $\alpha_T = 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$. Нагружение панели проводилось гармоническим во времени внешним поверхностным давлением с амплитудой $P_0 = 0.75 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Свойства материала считались независимыми от температуры.

На рис. 1 и 2 представлены амплитудно- и температурно-частотные характеристики шарнирно опертой конической панели. Аналогичные зависимости для жестко заземленной панели представлены на рис. 3 и 4. Как видно из графиков, механические граничные условия существенно влияют на величину динамических характеристик конической панели. Как и следовало ожидать, в условиях жесткого защемления резонансная частота оказалась примерно в 1.8 раз выше, чем для шарнирного опирания. В то же время, максимальная амплитуда возбуждаемых перемещений шарнирно опертой панели в два с лишним раза выше, чем для заземленной. Очевидным следствием этого стал гораздо более сильный диссипативный разогрев конической оболочки при шарнирном опирании края – на резонансной частоте температура разогрева составила 165°С (см. рис. 2) против 55°С (рис. 4). Следует также отметить, что, судя по графикам, добротность резонанса для панели с жестко заделанным краем оказалась существенно ниже.

Проведенный анализ может служить основой для практических рекомендаций при проектировании конструкций с использованием тонкостенных конических вязкоупругих панелей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. На основе концепции комплексных характеристик представлена постановка краевой задачи о вынужденных гармонических колебаниях и диссипативном разогреве конической панели из вязкоупругого материала с независимыми от температуры механическими и теплофизическими свойствами.
2. В рамках указанной постановки исследование связанной задачи сведено к решению задачи вязкоупругости, расчету диссипативной функции и решению уравнения теплопроводности с известным источником тепла. Для проведения вычислений разработана со-

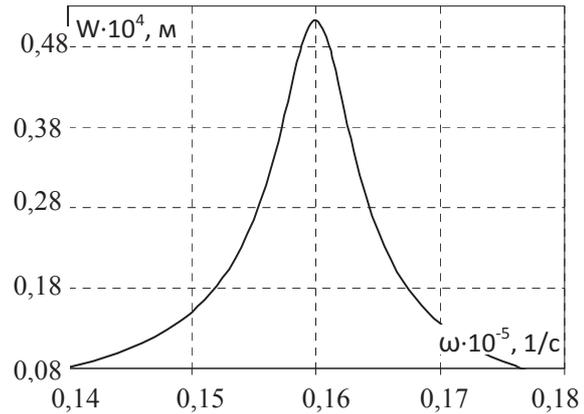


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика для шарнирно опертой конической панели

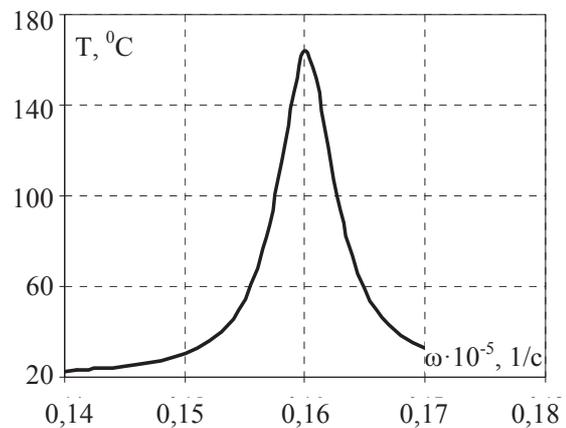


Рис. 2. Температурно-частотная характеристика для шарнирно опертой конической панели

ответствующая модификация метода конечных элементов.

3. С использованием описанного подхода решена новая задача о вынужденных колебаниях и виброразогреве конической панели при воздействии на нее нормального внешнего давления, изменяющегося по гармоническому закону с частотой, близкой к первой резонансной частоте.
4. Исследовано влияние граничных условий на амплитудно- и температурно-частотные характеристики. Сделаны выводы, которые могут иметь практическую ценность для проектировщиков механических систем, содержащих тонкостенные конические элементы.

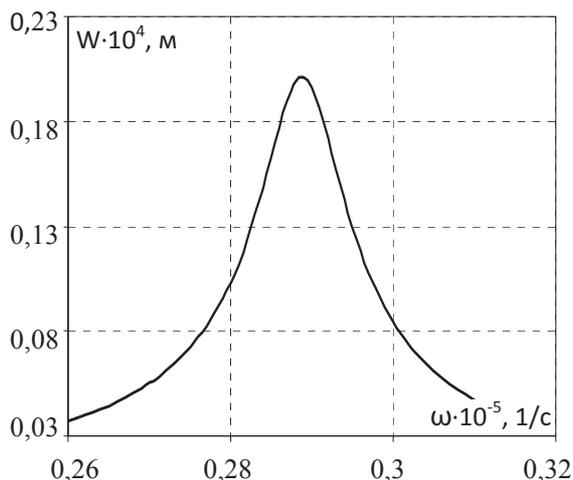


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика для жестко заземленной конической панели

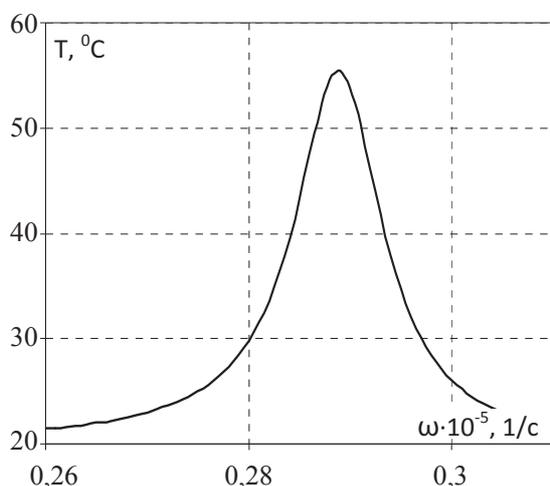


Рис. 4. Температурно-частотная характеристика для жестко заземленной конической панели

1. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 306 с.
2. Kang J.-H. Three-dimensional vibration analysis of joined thick conical-cylindrical shells of revolution with variable thickness // *J. Sound Vib.* – 2012. – **331**, № 18. – P. 4187–4198.
3. Talebitooti M. Three-dimensional free vibration analysis of rotating laminated conical shells: Layerwise differential quadrature (LW-DQ) method // *Arc. Appl. Mech.* – 2013. – **83**, № 5. – P. 765–781.
4. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости / Методы расчета оболочек: том 4. – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с.
6. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища школа, 1986. – 192 с.
7. Бате К. Ю., Вилсон Е. Численные методы анализа. Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
8. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
9. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
10. Рассказов А. О., Козлов В. И. Численное исследование неосесимметричных колебаний оболочек вращения при нестационарном нагружении // *Прикл. мех.* – 1998. – **34**, № 5. – С. 68–75.
11. Bhimaraddi A., Carr A. J., Mass P. T. A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution // *Comput. Struct.* – 1989. – **31**, № 3. – P. 299–308.
12. Дубенец В. Г., Хильчевский В. В. Колебания демпфированных композитных конструкций: том 1. – К.: Вища школа, 1995. – 226 с.
13. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
14. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
15. Савченко Е. В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: Аспект-Полиграф, 2006. – 232 с.
16. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Тепловое разрушение неупругой шарнирно опертой прямоугольной пластины с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при вынужденных резонансных изгибных колебаниях // *Вісн. Дніпроп. ун-ту.* – 2011. – **19**, № 5. – С. 100–116.
17. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖТТУ, 2005. – 428 с.
18. Karnaukhov V. G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // *J. Therm. Stress.* – 2005. – **28**, № 6-7. – P. 783–815.
19. Потураев В. Н., Дырда В. И., Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Козлов В. И., Мазнецова А. В. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении. – К.: Наук. думка, 1987. – 288 с.
20. Sabat R. G., Mukherjee B., Ren W., Yung G. Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // *J. Appl. Phys.* – 2007. – **101**. – P. 06411(1-7).