

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В СТУПЕНЧАТОМ УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ*, Е. А. НЕДИЛЬКО

Институт гидромеханики НАН Украины
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Киев-180, Украина
*E-mail: nsgihm@gmail.com

Получено 09.09.2013

На основе метода суперпозиции проведен расчет дифракции волн Рэлея–Лэмба на вертикальной границе волновода, образованного при жестком контакте двух полуполос разной ширины. Показано, что при отражении первой нормальной волны от границы раздела в ступенчатом волноводе существуют два диапазона частот, в которых наблюдается увеличение энергии отраженного поля. Первый максимум обнаружен вблизи частоты запираения для второй распространяющейся волны в более широком волноводе. Второй максимум существует в более высокочастотной области, когда в более широком волноводе существует две распространяющиеся волны.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: метод суперпозиции, ступенчатый упругий волновод, волны Рэлея–Лэмба, дифракция на границе, трансформация энергии, нормальные волны

На базі методу суперпозиції проведено розрахунок дифракції хвиль Релея–Лемба на вертикальній межі хвилеводу, утвореного при жорсткому контакті двох півсмуг різної ширини. Показано, що при відбитті першої нормальної хвилі від межі у хвилеводі зі сходиною існує два частотних діапазони, в яких спостерігається збільшення енергії відбитого поля. Перший максимум знайдено поблизу частоти відсікання другої хвилі, що поширюється у ширшому хвилеводі. Другий максимум існує у більш високочастотній області, коли у ширшому хвилеводі поширюються дві хвилі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод суперпозиції, ступінчастий пружний хвилевід, хвилі Релея–Лемба, дифракція на межі, трансформація енергії, нормальні хвилі

The paper deals with calculating of a diffraction of the Rayleigh–Lamb wave on a vertical interface boundary of the waveguide formed by a strong contact of two halfstrips with different widths using the method of superposition. The two frequency ranges where the energy of the field reflected from the interface increases are shown to exist in the case of incidence of the first normal wave. The first maximum is found near the locking frequency for the second propagating wave in the wider waveguide. The second peak exists at higher frequencies where two propagating waves are observed in the wider waveguide.

KEY WORDS: a superposition method, step-wise elastic waveguide, the Rayleigh–Lamb waves, energy transformation, normal waves

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день использование волн Рэлея–Лэмба для контроля состояния больших пластинообразных структур – один из наиболее быстроразвивающихся направлений метода неразрушающего контроля. Анализ распространения этого типа волн позволяет определить и локализовать большинство типов дефектов, которые могут существовать в таких упругих телах, и дают возможность осуществлять мониторинг их состояния на больших расстояниях. Именно возможность оценивать состояние крупных объектов на основе анализа амплитудно-фазовых характеристик волн Рэлея–Лэмба оказывается существенным преимуществом такого подхода по сравнению с классическими методами, использующими объемные волны и доставляющими информацию о состоянии структуры поточечно.

Для использования волн Рэлея–Лэмба при неразрушающем контроле необходимо изучить осо-

бенности их рассеяния различными дефектами и неоднородностями. В настоящее время опубликовано значительное количество работ, посвященных взаимодействию волн Рэлея–Лэмба с отверстиями [1], вертикальной трещиной [2], поверхностными дефектами [3], изменением толщины волновода [4, 5]. Как правило, для анализа такого взаимодействия исследуются частотные зависимости амплитудно-фазовых характеристик нормальных волн. Следует отметить, что при дифракции нормальных волн на нерегулярностях в упругих волноводах на определенных частотах могут наблюдаться резонансные явления, которые проявляются в резком изменении модуля амплитуды распространяющихся волн, а, следовательно, и энергии рассеянного поля. При этом частота, на которой наблюдаются подобные эффекты, существенно зависит от многих факторов – типа неоднородности, симметрии колебаний, спектральных особенностей волновода. Удобно разделить физические неоднородности, обусловленные резкой сме-

ной механических свойств волновода вдоль направления распространения волны, и геометрические неоднородности, порожденные нерегулярностью формы или размеров волновода.

Влиянию физической неоднородности на трансформацию энергии падающей волны в отраженное и прошедшее поле посвящены работы [6–10], в которых показано, что в области существования только одной распространяющейся волны существуют диапазоны как с существенным возрастанием эффективности прохождения, так и с усилением отражающих свойств границы. Отметим, что в указанных работах рассмотрены симметричные колебания волновода. При этом на более низких частотах происходит увеличение прозрачности границы, а улучшение отражения наблюдается в более высокочастотной области. Если в волноводе существует только одна распространяющаяся волна, то резкие изменения отражающих свойств границы могут быть обусловлены только значительным возбуждением неоднородных волн. Так, в работах [6–8, 10] найдена корреляция между увеличением коэффициента отражения и уровнем возбуждения неоднородных волн.

Изменение механических характеристики контактирующих сред позволяет сместить частоты, на которых наблюдаются резонансные явления, и варьировать добротность резонансов. В значительной степени на частоты резонансов и эффективность их проявления влияет тип возбуждаемых колебаний. В публикации [11] показано, что при изменении типа симметрии колебаний увеличения прозрачности границы в области относительно низких частот не наблюдается, а возрастание эффективности отражения обусловлено появлением распространяющихся волн высших порядков.

Влиянию геометрической неоднородности посвящена статья [12], в которой рассмотрена трансформация падающей волны в ступенчатом волноводе при симметричных колебаниях. Показано, что при наличии геометрической неоднородности также наблюдаются эффекты резкого изменения отражающих свойств границы. На низких частотах происходит резкое увеличение ее прозрачности, что обусловлено значительным возбуждением неоднородных волн. В более высокочастотной области, наоборот, возрастает эффективность отражения за счет появления распространяющихся волн высших порядков.

В данном исследовании на основе метода суперпозиций проводится решение граничной задачи о жестком контакте двух упругих волноводов разной ширины и с одинаковыми механическими

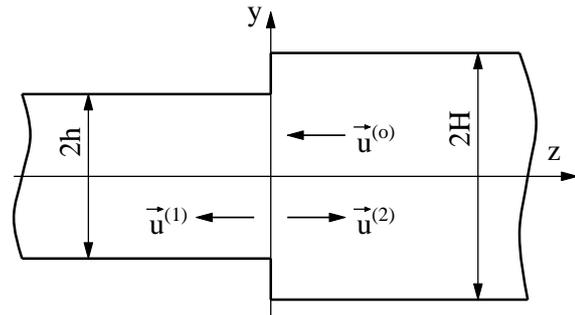


Рис. 1. Геометрия задачи

характеристиками при возбуждении антисимметричных колебаний. Особый акцент сделан на изучении энергетических особенностей процесса отражения–прохождения волн на вертикальной границе при изменении ширины одного из волноводов.

Показано, что при отражении первой нормальной волны от границы раздела в ступенчатом волноводе существуют два диапазона частот, на которых наблюдается увеличение энергии отраженного поля. Первый из них наблюдается вблизи частоты запираения для второй распространяющейся волны в более широком волноводе. Второй максимум проявляется в более высокочастотной области, когда в более широком волноводе существуют две распространяющиеся волны.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарное волновое поле в упругом волноводе, образованном жестким соединением двух упругих полуслоев различной ширины h и H , но с одинаковыми механическими характеристиками, рис. 1. Пусть механические свойства среды характеризуются модулем сдвига μ , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Индексы 1 и 2 будем относить к более узкому и более широкому волноводам соответственно. Поверхности $Y = \pm h$ и $Y = \pm H$ считаем свободными от напряжений. Для перехода к безразмерным пространственным величинам введем нормировку на H : $\alpha = h/H$, $y = Y/H$, $z = Z/H$.

Волновое поле возбуждается первой нормальной изгибной волной. Возможны два случая:

- падающая волна, распространяясь в более широком волноводе, приходит из $+\infty$;
- падающая волна, распространяясь в более узком волноводе, приходит из $-\infty$.

Падающей волне присвоим индекс 0. Для первого случая в зоне контакта условия сопряжения записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(2)}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) &= \begin{cases} \sigma_{zz}^{(1)}(y, 0), & |y| \leq \alpha, \\ 0, & |y| \geq \alpha, \end{cases} \\ \tau_{zy}^{(2)}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) &= \begin{cases} \tau_{zy}^{(1)}(y, 0), & |y| \leq \alpha, \\ 0, & |y| \geq \alpha, \end{cases} \quad (1) \\ u_y^{(1)} &= u_y^{(2)} + u_y^{(0)}, \quad |y| \leq \alpha, \\ u_z^{(1)} &= u_z^{(2)} + u_z^{(0)}, \quad |y| \leq \alpha. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем (ω – круговая частота).

Необходимо найти векторы смещений в отраженном и прошедшем полях, удовлетворяющие заданным граничным условиям, условиям сопряжения и векторному уравнению Ламе:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

Дополнительно к условиям сопряжения (1) должны выполняться условия излучения на бесконечности, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся в прошедшем и отраженном поле нормальная волна уносит энергию от границы раздела на бесконечность.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Применим метод суперпозиции [13], который позволяет учесть особенности по напряжениям в угловых точках. В его рамках построим решение граничной задачи для антисимметричных колебаний ступенчатого волновода. Следуя общей схеме метода, компоненты вектора смещений в отраженном поле ($z > 0$) представим в виде

$$\begin{aligned} u_y^{(1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z} \right) \cos \beta_k y + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(2)}(\tau) U_y^{(2)}(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \\ u_z^{(1)} &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z} \right) \sin \beta_k y - \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(2)}(\tau) U_z^{(2)}(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

с неизвестными постоянными $A_k, B_k, (k=1, 2, \dots)$ и функцией $x^{(2)}(\tau)$. Здесь введены дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} U_y^{(2)}(\tau, y) &= \tau^2 \frac{\text{ch } p_2 y}{\text{ch } p_2} - \frac{(\tau^2 + p_2^2) \text{ch } p_1 y}{2 \text{ch } p_1}; \\ U_z^{(2)}(\tau, y) &= \tau \left(-p_2 \frac{\text{sh } p_2 y}{\text{ch } p_2} + \frac{(\tau^2 + p_2^2) \text{sh } p_1 y}{2 \text{ch } p_1} \right); \\ p_j &= \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| < \Omega_j; \end{cases} \\ q_j &= \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & |\beta_k| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & |\beta_k| < \Omega_j; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}.$$

В этих соотношениях $\Omega_{1,2} = \Omega_{1,2}^{(H)} = \omega H / c_{1,2}$ – безразмерная частота; c_1 и c_2 – скорости продольной и поперечной волн соответственно.

Решение для прошедшего поля ($z < 0$) получаем из выражений (2) при замене неизвестных A_k, B_k на $C_k, -D_k$, смене знака для u_z и замене y на y/α , а z – на z/α . Для прошедшего поля нормированные частоты $\Omega_{1,2}^{(h)} = \omega h / c_{1,2} = \Omega_{1,2}^{(H)} \alpha$. В дальнейшем будем обозначать частоту в прошедшем поле через $\Omega_{1,2}$.

Волновое поле в ступенчатом волноводе возбуждается первой нормальной волной, распространяющейся во втором волноводе в отрицательном направлении оси z . В этом случае выражения для смещений в падающей волне имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_z^{(0)} &= -U_z^{(2)}(\xi, y) e^{-i\xi z}, \\ u_y^{(0)} &= iU_y^{(2)}(\xi, y) e^{-i\xi z}. \end{aligned}$$

Здесь ξ – постоянная распространения первой нормальной волны во втором волноводе, определяемая для заданной частоты из дисперсионного уравнения Рэлея – Лэмба:

$$\Delta(\xi) = \xi^2 p_2 \text{th } p_2 - \frac{(\xi^2 + p_2^2)^2}{4p_1} \text{th } p_1. \quad (3)$$

Представление для смещений выбрано таким образом, чтобы условие отсутствия касательных напряжений на поверхностях $y = \pm 1$ для отраженного поля и на поверхностях $y = \alpha$ для прошедшего поля выполнялось автоматически.

В рамках метода суперпозиции характер сингулярности в поле напряжений может быть определен до решения граничной задачи в целом [14]. Поступив аналогично [11], представим нормальные и касательные напряжения в угловой точке в более широком волноводе ($z=0, y_2=\pm\alpha$) в виде [14]:

$$\begin{aligned} \sigma_z(\pm\alpha, z) &= \frac{\sigma_2}{(\alpha^2 - y^2)^{1-\epsilon}}, \\ \tau_{zy}(\pm\alpha, z) &= \frac{\tau_2}{y(\alpha^2 - y^2)^{1-\epsilon}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\sigma_{(2)}, \tau_{(2)}$ – неизвестные амплитуды напряжений. Для более узкого волновода выражения для напряжений в точке $z=0, y_2=\pm 1$ аналогичны. Используя стандартные интегралы [15]:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha (\alpha^2 - y^2)^{\beta-1} \cos by dy &= \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\alpha)^{\beta-1} \Gamma(\beta) \frac{J_{\beta-1}(b\alpha)}{b^{\beta-1}}, \\ \int_0^\alpha y(\alpha^2 - y^2)^{\beta-1} \sin by dy &= \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\alpha}{2} (2\alpha)^{\beta-1} \Gamma(\beta) \frac{J_{\beta+1}(b\alpha)}{b^{\beta-1}}, \end{aligned}$$

алгебрализуем уравнения (4) и получим уравнения для нахождения асимптотики неизвестных A_n, B_n ($n \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} A_n \left(\beta_n^2 - \frac{\Omega_2^2}{2} \right) + B_n \beta_n q_2 &= \sigma_2 \frac{J_{\epsilon+0.5}(\beta_n \alpha)}{\beta_n^{\epsilon-0.5}}, \\ -A_n \beta_n q_1 + B_n \left(\beta_n^2 - \frac{\Omega_2^2}{2} \right) &= \tau_2 \frac{J_{\epsilon-0.5}(\beta_n \alpha)}{\beta_n^{\epsilon-0.5}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Асимптотика неизвестных C_n, D_n ($n \rightarrow \infty$) находится аналогично.

Выполнение условия отсутствия нормальных напряжений на поверхностях $y=\pm 1$ и $y=\alpha$ для отраженного и прошедшего полей соответственно, а также условий сопряжения приводит к системе интегро-алгебраических уравнений относительно неизвестных A_k, B_k, C_k, D_k ($k=1, 2, \dots$) и

функций $x^{(i)}(\tau)$ ($i=1, 2$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(a_k \frac{2q_1(\beta_k^2 + \Omega_0^2)}{\tau^2 + q_1^2} + b_k \frac{2\beta_k q_2^2}{\tau^2 + q_2^2} \right) + \\ + x^{(2)}(\tau) \Delta^{(2)}(\tau) - \tau_2 S_N^{(1)}(\tau) + \sigma_2 S_N^{(2)}(\tau) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \left(c_k \frac{2\tilde{q}_1(\beta_k^2 + \tilde{\Omega}_0^2)}{\tau^2 + \tilde{q}_1^2} - d_k \frac{2\beta_k \tilde{q}_2^2}{\tau^2 + \tilde{q}_2^2} \right) + \\ + x^{(1)}(\tau) \Delta^{(1)}(\tau) + \tau_1 \tilde{S}_N^{(1)}(\tau) + \sigma_1 \tilde{S}_N^{(2)}(\tau) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n q_1 \beta_n + b_n \frac{\beta_n^2 + q_2^2}{2} + \frac{2(-1)^n \cos \beta_n \alpha}{\alpha^2} \times \\ \times \sum_{k=1}^\infty \left(c_k \frac{\tilde{q}_1 \beta_k^2}{\beta_n^2 - (\beta_k/\alpha)^2} - d_k \frac{\beta_k \tilde{q}_2^2}{2(\beta_n^2 - (\beta_k/\alpha)^2)} \right) = \\ = -2\beta_n \xi \left(\xi^2 - \frac{\Omega_2^2}{2} \right) \left(\frac{1}{q_2^2 + \xi^2} - \frac{1}{q_1^2 + \xi^2} \right) \times \\ \times \left(a_n \frac{\beta_n^2 + q_2^2}{2} + b_n \beta_n q_2 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty x^{(2)}(\tau) d_n(\tau) d\tau \right) - \\ - \frac{(-1)^n 2\beta_n \cos \beta_n \alpha}{\alpha} \left(\sum_{k=1}^\infty \left(c_k \frac{\beta_k^2 + \tilde{q}_2^2}{2} - d_k \beta_k \tilde{q}_2 \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\beta_n^2 - (\beta_k/\alpha)^2} - \frac{(-1)^n}{\pi \alpha} \int_0^\infty x^{(1)}(\tau) \tilde{g}_n(\tau) d\tau \right) = id_n(\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \left(a_k q_1 + b_k \beta_k \right) (-1)^k \frac{2\beta_k \cos \beta_k \alpha}{\beta_k - (\beta_n/\alpha)^2} + c_n \alpha \tilde{q}_1 - \\ - d_n \alpha \beta_k = -\xi \left(\frac{2(\xi^2 - \Omega_2^2)}{\xi^2 - \Omega_2^2 + (\beta_n/\alpha)^2} \frac{\text{ch } \alpha(\xi^2 - \Omega_2^2)}{\text{ch } \xi^2 - \Omega_2^2} - \right. \\ \left. - \frac{2\xi^2 - \Omega_2^2}{\xi^2 - \Omega_1^2 + (\beta_n/\alpha)^2} \frac{\text{ch } \alpha(\xi^2 - \Omega_1^2)}{\text{ch } \xi^2 - \Omega_2^2} \right) \times \\ \times \sum_{k=1}^\infty \left(a_k \beta_k + b_k q_2 \right) (-1)^k \frac{2 \cos \beta_k \alpha}{\beta_k - (\beta_n/\alpha)^2} - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty x^{(2)}(\tau) \gamma_n(\tau) d\tau - \alpha^2 \left(c_n - d_n \frac{\tilde{q}_2}{\beta_n} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty x^{(1)}(\tau) \tilde{\eta}_n(\tau) d\tau \right) = i\gamma_n(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$S_N^{(1)}(\tau) = 4 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{J_{\epsilon-0.5}(\beta)}{\beta^{\epsilon-1.5}} \times \\ \times \left(\frac{1}{2(\tau^2+q_1^2)} + \frac{\tau^2}{(\tau^2+q_1^2)(\tau^2+q_2^2)} + \right. \\ \left. + \frac{4\Omega_1^4 - 2\Omega_1^2\Omega_2^2 + \Omega_2^4}{8\beta_k^2(\tau^2+q_1^2)(\Omega_2^2-\Omega_1^2)} - \frac{\Omega_2^4}{8\beta_k^4(\Omega_2^2-\Omega_1^2)} + \right. \\ \left. + \frac{\tau^2(\Omega_1^4+\Omega_2^4)}{4\beta_k^2(\tau^2+q_2^2)(\tau^2+q_1^2)(\Omega_2^2-\Omega_1^2)} \right) (-1)^k;$$

$$S_N^{(2)}(\tau) = 4 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^k J_{\epsilon+0.5}(\beta)}{\beta^{\epsilon-1.5}(\Omega_2^2-\Omega_1^2)} \times \\ \times \left(\frac{\tau^2(\Omega_2^2-\Omega_1^2)}{(\tau^2+q_1^2)(\tau^2+q_2^2)} + \frac{\Omega_2^4 + 2\Omega_2^2\Omega_1^2}{8\beta_n^2(\tau^2+q_1^2)} + \right. \\ \left. + \frac{2\Omega_2^2\Omega_1^2 - 3\Omega_2^4}{8\beta_k^4} + \frac{\tau^2(3\Omega_1^4 + 3\Omega_2^4 - 4\Omega_1^2\Omega_2^2)}{4\beta_n^2(\tau^2+q_1^2)(\tau^2+q_2^2)} \right);$$

$$g_n(\tau) = \beta_b \cos \alpha \beta_n \left(\frac{g_n^{(1)} \operatorname{sh} p_1}{p_1 \operatorname{ch} p_1} - g_n^{(2)} \frac{\operatorname{sh} p_2}{\operatorname{ch} p_2} \right) - \\ - \frac{\sin \alpha \beta_n}{\alpha} \left(g_n^{(1)} - p_2 g_n^{(2)} \right);$$

$$g_n^{(1)} = \frac{(\tau^2 + \Omega_0^2)(\tau^2 + p_2^2)}{(\beta_n^2 + (p_1/\alpha)^2)};$$

$$g_n^{(2)} = \frac{2\tau^2 p_2}{\beta_n^2 + (p_2/\alpha)^2};$$

$$d_n(\tau) = \frac{(\tau^2 + p_2^2)(\tau^2 + \Omega_0^2)}{\beta_k^2 + p_1^2} - \frac{2\tau^2 p_2^2}{\beta_k^2 + p_2^2},$$

$$\eta_m = \frac{2\tau^2}{p_2^2 + \beta_n^2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{p_1^2 + \beta_n^2};$$

$$\gamma_n = \frac{2\tau^2}{p_2^2 + (\beta_n/\alpha)^2} \frac{\operatorname{ch} \alpha p_2}{\operatorname{ch} p_2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{p_1^2 + (\beta_n/\alpha)^2} \frac{\operatorname{ch} \alpha p_1}{\operatorname{ch} p_1};$$

$$2\Omega_0^2 = \Omega_2^2 - 2\Omega_1^2.$$

Полученная система (6) является системой второго рода. Ее структура подобна структуре системы интегро-алгебраических уравнений, вытекающих из условий сопряжения на стыке полуслоев одинаковой ширины [11].

Существование в угловой точке особенности по напряжениям [14] приводит к тому, что в рамках метода суперпозиции интегралы и ряды для напряжений на линии контакта сходятся медленно.

Однако использование асимптотических свойств неизвестных, учитывающих характер локальной особенности по напряжениям в точке смены типа граничных условий, позволяет разработать алгоритмы улучшенной сходимости.

Показатель особенности ϵ в формуле (4) находят из уравнения [14]:

$$\sin \frac{3\epsilon\pi}{2} - \epsilon^2 = 0, \quad (7)$$

которое может быть получено по аналогии с [7]. Сохраняя в системе (6) только главные члены, приходим к системе из четырех уравнений относительно неизвестных $\sigma_{1,2}$, $\tau_{1,2}$. Приравнивание ее определителя к нулю дает уравнение (7), что служит дополнительным критерием проверки правильности математических выкладок. Анализ особенностей ближнего волнового поля должен быть проведен с учетом особенности по напряжениям в угловой точке ($z=0$, $y=\pm\alpha$), см., например, [7].

Исследуем интегральные (энергетические) характеристики отраженного и прошедших полей, на величины которых учет особенности по напряжениям практически не влияет. Это обусловлено тем, что, как и для составного волновода постоянной ширины [11], коэффициенты возбуждения распространяющихся мод определяются в основном первыми неизвестными системы (6). Поэтому анализ трансформации энергии падающей волны в отраженные и прошедшие распространяющиеся волны можно провести при простой редукции исходной системы.

Запись вектора смещений в форме (2) в отраженном и прошедшем полях допускает переход к представлению в виде суммы нормальных волн в бесконечном слое с использованием теории вычетов. Для отраженного поля вектор смещения имеет вид

$$\mathbf{u}(y, z) = \sum_{j=1}^J Ak_j \mathbf{U}(\xi_j, y) e^{i\xi_j z} + \\ + \sum_{l=1}^{J'} Ak_l \mathbf{U}(i\eta_l, y) e^{-\eta_l z} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} Ak_m \mathbf{U}(\zeta_m, y) e^{i\zeta_m z}. \quad (8)$$

Здесь ξ_j ($j=1, \dots, J$) – действительные, η_l ($l=1, \dots, J'$) – чисто мнимые, а ζ_m ($m=1, \dots, \infty$) – комплексные корни дисперсионного уравнения Рэлея–Лэмба (3); Ak – амплитуды нормальных волн:

$$\begin{aligned}
 Ak_n &= \operatorname{Res}_{\tau=\kappa_n} x^{(2)}(\tau), \\
 \kappa_n &= \xi_n \quad (n = 1, \dots, J), \\
 \kappa_{n+J} &= \eta_n \quad (n = 1, \dots, J'), \\
 \kappa_{n+J+J'} &= \zeta_n \quad (n = 1, \dots, \infty).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, выражения типа (2) в неявном виде содержат два типа движения. Первый из них связан с распространяющимися нормальными волнами, уносящими энергию на бесконечность от поверхности контакта. Число этих волн определяется частотой. Другой тип движения характеризуется локализацией возмущения вблизи границы и связан с неоднородными волнами, число которых всегда неограниченно. Именно поведением неоднородных волн и обусловлены необычные эффекты локализации движений вблизи неоднородностей в упругих волноводах.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Количественный анализ выполнен с целью изучения трансформации энергии падающей волны в отраженные и прошедшие волны. Расчеты проведены для материала с коэффициентом Пуассона $\nu=0.3$ и диапазона частот, лежащего ниже частоты запертия для третьей распространяющейся волны в отраженном или прошедшем полях. Для первого рассматриваемого случая (волна падает из более широкого волновода) в отраженном поле бегущие волны более высоких порядков появляются раньше, чем в прошедшем. Показатель особенности поля напряжений в угловой точке составлял $1-\epsilon=0.09$.

При вычислениях в суммах, входящих в систему (6), учитывалось до 60 неизвестных. При этом наблюдалась устойчивость решения, которая выражалась в том, что при увеличении числа членов усеченных рядов от 55 до 60 значения первых неизвестных A_k, B_k, C_k, D_k ($k=1, \dots, 5$) изменялось незначительно. При этом погрешность выполнения закона сохранения энергии не превышала 0.7 %.

Энергия отраженного поля определялась соотношением

$$E_r = \sum_{j=1}^J E_j, \tag{10}$$

$$E_j = |Ak_j|^2 \omega p_1^2(\xi_j) \Omega_2^{(2)2} \Delta^{(2)'(\xi_j)},$$

где J – число распространяющихся волн; Ak_j – коэффициент возбуждения j -ой нормальной вол-

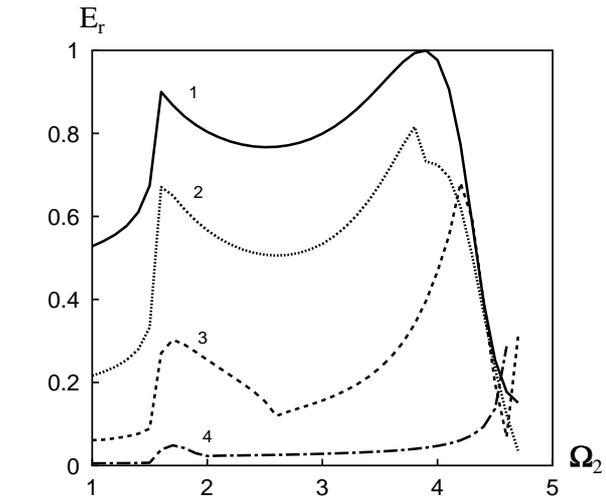


Рис. 2. Частотные зависимости энергии волн в отраженном поле (при падении из более широкой части волновода):
 1 – $\alpha=0.2$; 2 – $\alpha=0.4$; 3 – $\alpha=0.6$; 4 – $\alpha=0.8$

ны. Коэффициенты Ak_j в отраженном поле находились из соотношения (9).

Энергия прошедшего поля находится аналогично с проведением соответствующих формальных замен.

На рис. 2 представлено нормированное на энергию падающей волны распределение энергии в отраженном поле в зависимости от частоты $\Omega_2 = \omega H/c_2$. Как видно из графика, для всех α на кривых наблюдается первый локальный максимум на частоте $\Omega_2 = \pi/2$, на которой в отраженном поле появляется вторая распространяющаяся волна. Процентное содержание переносимой ею энергии зависит от величины α . Чем меньше α , тем сильнее возбуждается данная мода и тем ближе волновая картина в ступенчатом волноводе к волноводу со свободным торцом [16].

Доля энергии второй распространяющейся отраженной волны в зависимости от частоты представлена на рис. 3. Выше частоты запертия для второй распространяющейся отраженной волны при всех рассмотренных α эта волна увеличивает свою энергоемкость. При этом для $\alpha=0.2$ и 0.4 на частоте, на которой наблюдается первый максимум отражения, энергия рассеянного поля в основном определяется второй отраженной волной. Однако частота, на которой переносимая ею энергия максимальна, не совпадает с частотой, соответствующей максимуму отраженного поля. В частности для $\alpha=0.2$ при $\Omega_2 = 1.6 > \pi/2$ вторая отраженная волна переносит 64 % энергии

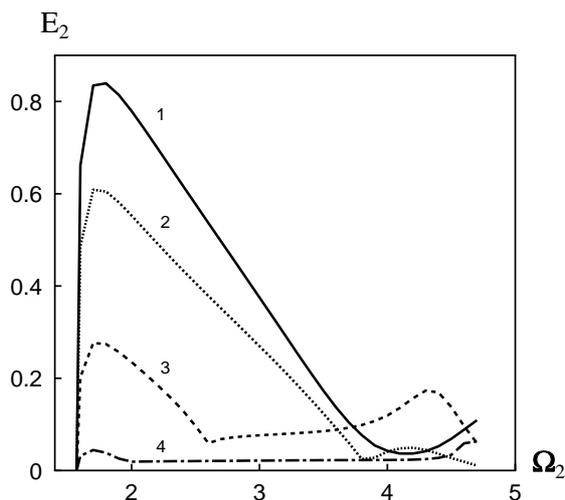


Рис. 3. Частотные зависимости энергии второй распространяющейся отраженной волны (при падении из более широкой части волновода):
1 – $\alpha=0.2$; 2 – $\alpha=0.4$; 3 – $\alpha=0.6$; 4 – $\alpha=0.8$

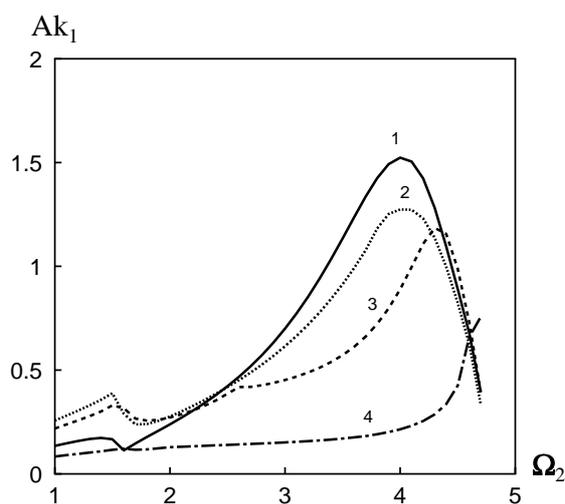


Рис. 4. Частотные зависимости модуля амплитуды отраженной нормальной волны с первым комплексным волновым числом (при падении из более широкой части волновода):
1 – $\alpha=0.2$; 2 – $\alpha=0.4$; 3 – $\alpha=0.6$; 4 – $\alpha=0.8$

падающей волны, первая отраженная – 27 %, а первая прошедшая – 0.9 %. При дальнейшем возрастании частоты в том диапазоне, где наблюдается максимальная эффективность отражения, энергия второй отраженной моды увеличивается, первой отраженной – падает, а прошедшей – растет. Несмотря на то, что отражающие свойства границы в основном определяются уровнем возбуждения второй распространяющейся волны,

первая отраженная волна также возбуждается достаточно сильно. Для $\alpha=0.4$ характер распределения энергии падающей волны между двумя отраженными и одной прошедшей волной аналогичен. При дальнейшем увеличении α ситуация меняется: хотя выше своей частоты запирающая вторая отраженная распространяющаяся волна и увеличивает свою энергоемкость, но первая прошедшая волна остается определяющей в распределении энергии, вносимой в систему, и большая часть энергии падающей волны проходит в более узкую часть волновода. Для $\alpha=0.6$ эта доля составляет 73.7 % E_0 , а для $\alpha=0.8$ – 96.1 %.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что первый локальный максимум в энергии отраженного поля обусловлен появлением второй отраженной распространяющейся волны, а уровень ее возбуждения определяет эффективность отражающих свойств границы.

На рис. 2 в области более высоких частот наблюдается второй локальный максимум энергии отраженного поля. Отметим, что для всех значений α вблизи частоты второго максимума в отраженном поле существуют две распространяющиеся волны. В прошедшем же поле на исследуемых частотах могут распространяться одна или две волны. В частности, для $\alpha=0.2$ частота запирающая для второй моды лежит вне рассмотренного диапазона. Для $\alpha=0.4$ вторая волна появляется на частоте $\Omega_2=3.8$; для $\alpha=0.6$ – при $\Omega_2=2.6$; а для $\alpha=0.8$ – при $\Omega_2=1.9$. На этих частотах не наблюдается резких изменений отражающих свойств границы. Очевидно, что увеличение эффективности отражения на более высоких частотах обусловлено особенностями возбуждения неоднородных волн.

На рис. 4 представлены частотные зависимости модуля амплитуды отраженной нормальной волны с первым комплексным волновым числом. Прежде всего, отметим, что для величин $\alpha=0.2, 0.4$ и 0.6 модуль амплитуды неоднородной волны с первым комплексным волновым числом превышает амплитуду падающей волны. С увеличением α (толщины первой полуполосы, в которой существует прошедшее поле) амплитуда неоднородной волны падает, а ее максимум смещается в область более высоких частот. Сравнение рис. 2 и 4 показывает, что второй локальный максимум энергии отраженного поля коррелирует с максимумом амплитуды неоднородной волны с первым комплексным волновым числом. С увеличением α величина максимума по энергии и по модулю амплитуды неоднородной волны падает, смещаясь в более высокочастотную область.

На рис. 5 представлены зависимости модуля

амплитуды прошедшей волны с первым комплексным волновым числом от частоты Ω_2 . Для $\alpha=0.2, 0.8$ амплитуда прошедшей неоднородной волны с первым комплексным волновым числом в определенных частотных диапазонах превышает амплитуду падающей. Однако установить корреляцию между уровнем возбуждения неоднородной волны и эффективностью прохождения энергии во вторую среду не удалось.

Таким образом, для случая падения волны из более широкой полуполосы при отражении первой нормальной волны от границы раздела в ступенчатом волноводе существуют два диапазона частот, в которых наблюдается увеличение энергии отраженного поля. Более низкочастотный из них связан со значительным возбуждением в отраженном поле второй распространяющейся волны вблизи ее частоты запирания и не зависит от величины α . Максимум энергии отраженного поля, наблюдаемый в области более высоких частот, связан со значительным возбуждением отраженной неоднородной волны. В этой ситуации как его расположение, так и величина в значительной степени определяются значением α . Отметим, что оба максимума наблюдаются в той области частот, где в отраженном поле существуют две распространяющиеся волны.

Рассмотрим падение волны из более узкого волновода. На рис. 6 для этой ситуации представлена энергия волны в отраженном поле в зависимости от частоты $\Omega_2 = \omega H/c_2$. Сравнение рис. 2 и 6 показывает, что соответствующие частотные зависимости сохраняют много общего независимо от того, из какого волновода первая распространяющаяся волна падает на ступеньку. В обоих случаях выделяются два частотных диапазона, в которых энергия отраженного поля увеличивается, а ее первый пик наблюдается на частоте появления второй распространяющейся волны ($\Omega_2 = \pi/2$). При падении волны из более узкого волновода вторая распространяющаяся волна (как и волны высших порядков) появляется в прошедшем поле раньше, чем в отраженном. В отличие от случая падения волны из более широкого волновода, при появлении в прошедшем поле второй распространяющейся моды она не становится доминирующей выше своей частоты запирания, а рассеянное поле в основном определяется первыми отраженной или прошедшей распространяющимися волнами. При этом, в зависимости от величины α , доминировать будут отраженная или прошедшая волна. Эти рассуждения в целом подтверждает анализ рис. 7, а, на котором представлены частотные зависимости энергии первой отраженной волны и рис. 7, б (то

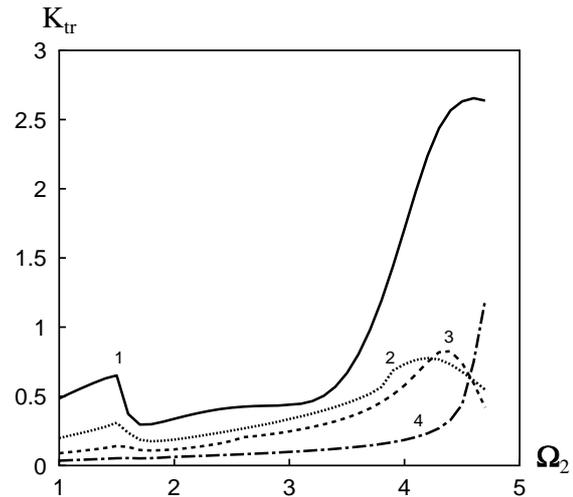


Рис. 5. Частотные зависимости модуля амплитуды прошедшей нормальной волны с первым комплексным волновым числом (при падении из более широкой части волновода):
1 - $\alpha=0.2$; 2 - $\alpha=0.4$; 3 - $\alpha=0.6$; 4 - $\alpha=0.8$

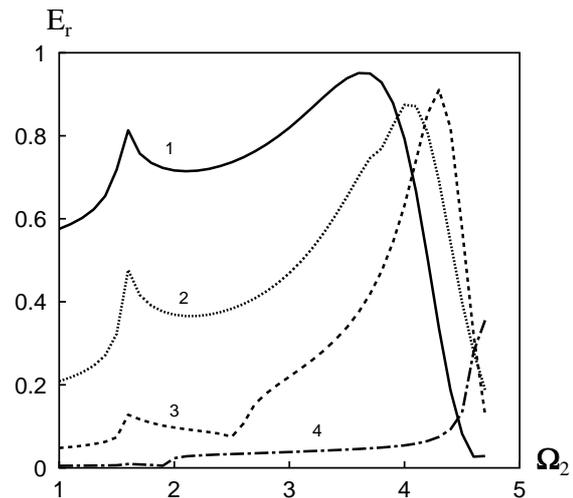


Рис. 6. Частотные зависимости энергии волн в отраженном поле (при падении из более узкой части волновода):
1 - $\alpha=0.2$; 2 - $\alpha=0.4$; 3 - $\alpha=0.6$; 4 - $\alpha=0.8$

же для второй прошедшей волны). Отметим, что энергия отраженного поля вблизи частоты запирания для второй распространяющейся волны в основном определяется первой отраженной волной. Вторая же прошедшая волна для всех рассмотренных значений α переносит не более 20 % энергии падающей волны.

Таким образом, хотя первый пик энергии отраженного поля наблюдается на частоте $\Omega_2 = \pi/2$ не-

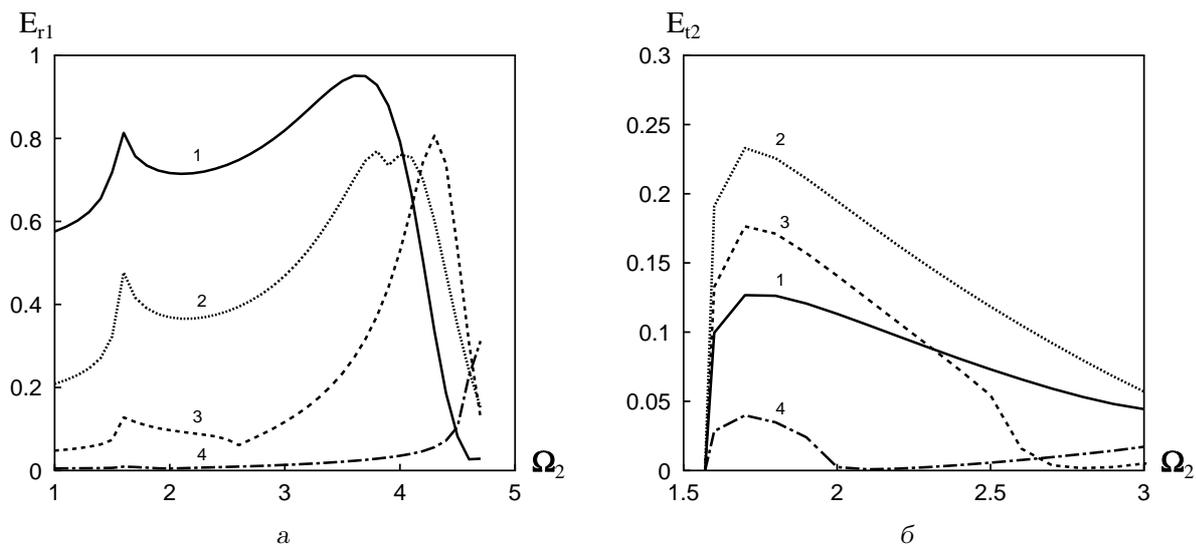


Рис. 7. Частотные зависимости энергии распространяющихся нормальных волн (при падении из более узкой части волновода):
 а – первая отраженная волна, б – вторая прошедшая волна;
 1 – $\alpha=0.2$, 2 – $\alpha=0.4$, 3 – $\alpha=0.6$, 4 – $\alpha=0.8$

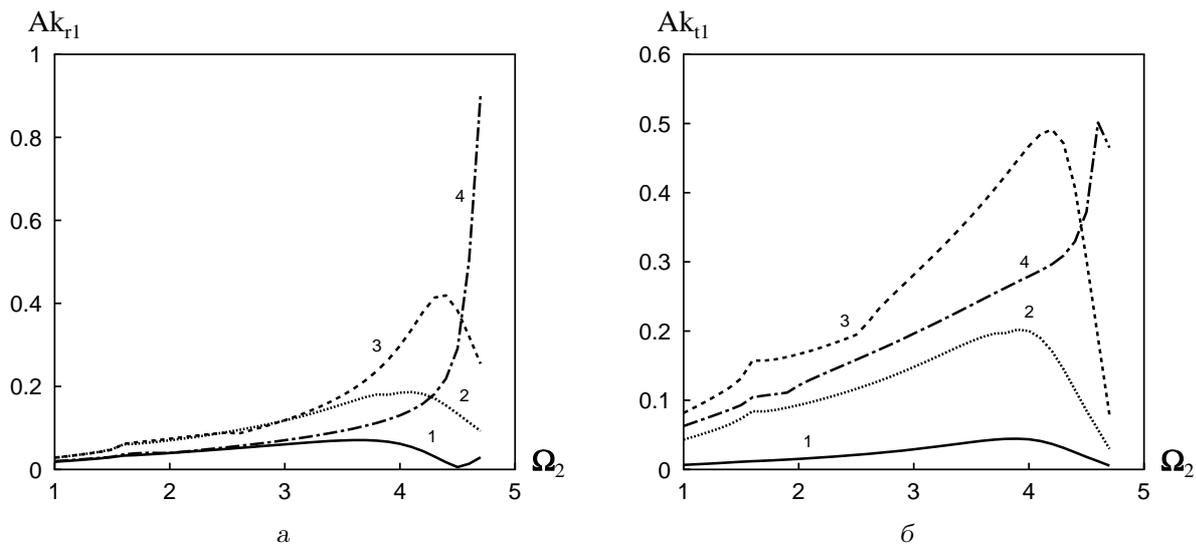


Рис. 8. Частотные зависимости модуля амплитуды неоднородной волны с первым комплексным волновым числом (при падении из более узкой части волновода):
 а – отраженное поле, б – прошедшее поле;
 1 – $\alpha=0.2$; 2 – $\alpha=0.4$; 3 – $\alpha=0.6$; 4 – $\alpha=0.8$

зависимо от направления распространения падающей волны, причины его появления различны. Если волна падает из более широкого волновода, этот максимум обусловлен значительным возбуждением второй отраженной волны, а при падении

из более узкого волновода – увеличением энергии, переносимой первой отраженной волной.

Сопоставление рис. 2 и 6 показывает, что при обоих направлениях падения волны частоты, на которых наблюдается второй пик, значения энер-

гии отраженного поля для $\alpha=0.6$ и 0.8 совпадают, а для $\alpha=0.2$ и 0.4 отличаются не более, чем на 8 %. Тем не менее, причины возникновения этого максимума при распространении падающей волны в более узком или более широком волноводах различны. Если волна падает из в более узкой части волновода, то во всем рассмотренном частотном диапазоне модуль амплитуды неоднородной волны с первым комплексным волновым числом (как в отраженном, так и в прошедшем полях) не превышает амплитуду падающей волны.

Рассмотрим частотные зависимости модуля амплитуды неоднородной волны с первым комплексным волновым числом для отраженного (рис. 8, а) и прошедшего (рис. 8, б) поля. В отличие от падения первой нормальной волны из более широкого волновода, в данном случае модуль амплитуды неоднородной волны с первым комплексным волновым числом увеличивается с ростом α . Частотная зависимость модуля амплитуды неоднородной волны для прошедшего поля носит резонансный характер, причем ее амплитуда достигает лишь около 50 % амплитуды падающей волны. В отраженном же поле только при $\alpha=0.8$ амплитуда неоднородной волны в рассмотренном частотном диапазоне увеличивается до $0.9Ak_0$. Для других значений α неоднородные волны возбуждаются довольно слабо.

Таким образом, хотя второй пик энергии отраженного поля не связан со значительным увеличением возбуждения неоднородных волн, возрастание энергии отраженного поля обусловлено нарастанием амплитуды первой отраженной распространяющейся волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При отражении первой нормальной волны от границы раздела в материально однородном ступенчатом волноводе существуют два диапазона частот, в которых наблюдается увеличение энергии отраженного поля. Первый из них расположен вблизи частоты запираения для второй распространяющейся волны в более широком волноводе. При этом, если распространяющаяся волна падает из более узкого волновода, то пик энергии наблюдается на частоте запираения для второй прошедшей волны и не изменяется при варьировании отношения ширин полуполос $\alpha=h/H$. При этом увеличение энергии отраженного поля обусловлено ростом амплитуды первой отраженной распространяющейся волны, а ее максимальное значение падает с увеличением α .

Если распространяющаяся волна падает из бо-

лее широкого волновода, то частота, соответствующая первому максимуму отраженного поля, может смещаться в более высокочастотную область относительно частоты запираения для второй распространяющейся волны в зависимости от величины α . Возрастание частоты, на которой наблюдается этот максимум, не превышает 8 % от указанной частоты запираения. В этом случае возрастание энергии отраженного поля обусловлено значительным возбуждением второй распространяющейся отраженной волны, а максимальное ее значение падает с увеличением α .

Второй пик энергии отраженного поля наблюдается в той области частот, для которой в более широком волноводе распространяются две волны. Частота, на которой он наблюдается, незначительно изменяется при смене направления распространения падающей волны, смещаясь при увеличении α в более высокочастотную область. Если падающая волна распространяется в более широком волноводе, то существование указанного максимума обусловлено значительным возбуждением неоднородных волн.

1. Diligent O., Grahn T., Bostrom A., Cawley P., Lowe M. J. S. The lowfrequency reflection and scattering of the S0 Lamb mode from a circular through-thickness hole in a plate: finite element, analytical and experimental studies // J. Acoust. Soc. Amer.– 2002.– 112, № 6.– С. 2589–2601.
2. Castaings M., Le-Clezio E., Hosten B. Modal decomposition method for modeling the interaction of Lamb waves with cracks // J. Acoust. Soc. Amer.– 2002.– 112, № 6.– С. 2567–2582.
3. Cho Y., Rose J. L. An elastodynamic hybrid boundary element study for elastic wave interactions with a surface breaking defect // Int. J. Solid Struct.– 2000.– 37.– С. 4103–4124.
4. Cho Y. Estimation of ultrasonic guided wave mode conversion in a plate with thickness variation // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.– 2000.– 37, № 3.– С. 591–603.
5. Benmmeddour F., Grondel S., Assaad J., Moulin E. Study of the fundamental Lamb modes interaction with symmetrical notches // NDT & E Int.– 2008.– 41.– С. 1–9.
6. Гетман И. П., Лисицкий О. Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // Прикл. мат. мех.– 1988.– 52, № 6.– С. 1044–1048.
7. Городецкая Н. С. Дифракция волн Рэлея–Лэмба на вертикальной границе в составном упругом волноводе // Акуст. вісн.– 2000.– 3, № 1.– С. 1–13.
8. Городецкая Н. С. Трансформация энергии падающей волны на границе раздела в составном волноводе // Акуст. вісн.– 2001.– 4, № 1.– С. 17–25.
9. Вовк Л. П. Анализ локальных особенностей волнового поля в сингулярных точках составной области // Вісн. Сумськ. держ. ун-ту. Сер. фізика, математика, механіка.– 2003.– 10(56).– С. 144–156.

10. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Лапина О. Н. Дифракция нормальных мод в составных и ступенчатых упругих волноводах // Прикл. мат. мех.– 1998.– **62**, № 2.– С. 297–303.
11. Городецкая Н. С., Недилько Е.А. Энергетические особенности дифракции изгибных волн на вертикальной границе в составном волноводе // Акуст. вісн.– 2012.– **15**, № 2.– С. 17–27.
12. Городецкая Н. С. Дифракция волн Рэлея–Лэмба на границе раздела двух состыкованных упругих полуполос разной ширины // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, № 3.– С. 32–42.
13. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
14. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы // Прикладная механика. Тр. Амер. общ. инж.-мех.– 1971.– **38**, № 2.– С. 87–96.
15. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции.– М.: Наука, 1981.– 800 с.
16. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С., Старовойт И. В. Антисимметричные колебания полуполосы. Неоднородные волны // Акуст. вісн.– 2009.– **12**, № 2.– С. 16–24.