

УДК 539.3

ЗГИННІ КОЛИВАННЯ БІМОРФНОГО П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО СТЕРЖНЯ

О. В. БОРИСЕЙКО*, В. М. НІКІТЕНКО,
А. О. ПАВЛИК, І. А. УЛІТКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64/13, 01601, МСП, Київ, Україна
*E-mail: b123@voliacable.com

Одержано 12.01.2012

Розглянуто задачу про поперечні коливання біморфного п'єзокерамічного стержня. Визначені частоти резонансу й антирезонансу. Отримані значення коефіцієнта електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) за формулою Мезона й за енергетичним критерієм. Наведені результати експериментальних досліджень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: біморф, стержень, КЕМЗ, енергетичний критерій

Рассмотрена задача о поперечных колебаниях біморфного пьезокерамического стержня. Определены частоты резонанса и антирезонанса. Получены значения коэффициента электромеханической связи (КЭМС) по формуле Мезона и по энергетическому критерию. Приведены результаты экспериментальных исследований.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: біморф, стержень, КЭМС, энергетический критерий

A problem on bending vibration of the bimorph piezoceramic rod is considered. The resonance and antiresonance frequencies are defined. The values of electromechanical coupling factor (ECF) are obtained by Mason's formula and energy criterion. The experimental results are presented.

KEY WORDS: bimorph, rod, ECF, energy criterion

ВСТУП

П'єзокерамічні елементи широко застосовуються як перетворювачі електричної енергії в енергію механічної деформації й навпаки, тому важливо реалістично оцінювати їхню ефективність. Перетворення енергії на деформаціях згину можна дослідити на прикладі коливань елементів біморфної структури. Ступінь ефективності перетворення енергії – коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) – для найпростіших п'єзоелементів визначають за емпіричною формулою Мезона [3]. У випадку біморфних елементів її використання може призвести до суттєвих похибок у порівнянні з уточненими результатами, отриманими за так званим енергетичним критерієм [2]. У цій статті згадану проблему буде проаналізовано на прикладі згинних коливань біморфного стержня.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядаються усталені згинні коливання біморфного п'єзокерамічного стержня розмірами $2l \times 2b \times h$ (див. рисунок) під дією змінного в часі електричного навантаження. Змінна різниця електричних потенціалів з круговою частотою ω під-

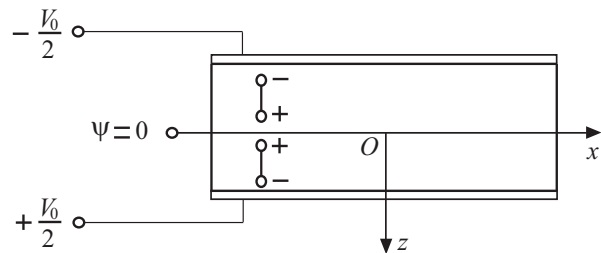


Рисунок. Структура біморфного п'єзостержня

водиться до електродованих поверхонь стержня $z = \pm h/2$. Електрод у серединній поверхні стержня $z = 0$ не навантажений. Усі поверхні стержня вільні від механічних навантажень.

Рівняння коливань для функції прогину серединної поверхні w біморфа у рамках теорії Кірхгофа співпадає з рівнянням для випадку одношарового стержня [4]:

$$\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} - \beta^4 \hat{w} = 0, \quad (1)$$

де

$$\beta^4 = \frac{\rho h}{D^*},$$

$$D^* = \frac{h^3}{12} \frac{1}{s_{11}^E (1 - k_{31}^2)}. \quad (2)$$

Аналогічний вигляд мають і механічні граничні умови для краю, вільного від механічних навантажень:

$$M_x|_{x=\pm l} = 0, \quad Q_x|_{x=\pm l} = 0. \quad (3)$$

Відмінність задачі для стержня біморфної структури полягає у зміні розподілу товщинних компонентів напруженості електричного поля й електричної індукції. У процесі деформування одна частина буде знаходитись у стані комбінованого розтягу–згину, а інша – стиску–згину. Математично ця відмінність враховується зміною знаку сталої п'єзоефекту d_{31} у рівняннях стану.

Згідно з [2], вираз для товщинної компоненти напруженості електричного поля внаслідок різних напрямків поляризації шарів кераміки має вигляд

$$E_z = E_0 \pm z E_1. \quad (4)$$

У формулі (4) верхній знак відповідає нижній частині стержня ($z \geq 0$), а нижній – його верхній частині ($z \leq 0$).

Товщинний розподіл компонентів зв'язаного електричного поля визначимо, використавши рівняння вимушеної електростатики:

$$E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \text{div} \vec{D} = 0. \quad (5)$$

Величина E_0 визначається з електричних граничних умов

$$\psi|_{z=\pm h} = \pm \frac{V_0(t)}{2}. \quad (6)$$

Тоді вираз для E_z (4) набуває вигляду

$$E_z = -\frac{V_0}{h} - \left(\frac{h}{4} \mp z\right) E_1. \quad (7)$$

З другого рівняння (5) отримуємо

$$D_z = \text{const}. \quad (8)$$

Тоді з рівнянь п'єзоефекту [2] з урахуванням гіпотез про лінійність розподілу механічних деформацій за товщиною стержня отримуємо остаточний вираз для товщинної компоненти вектора напруженості електричного поля:

$$E_z = -\frac{V_0}{h} - \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \left(\frac{h}{4} \mp z\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Тут k_{31}^2 – поздовжній статичний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Співвідношення для товщинної компоненти електричної індукції D_z має вигляд

$$D_z = -\varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \times$$

$$\times \left(\frac{V_0}{h} + \frac{h}{4d_{31}} \frac{k_{31}^2}{(1 - k_{31}^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (10)$$

Деформація ε_x визначається співвідношеннями Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (11)$$

та кінематичною гіпотезою

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (12)$$

Компонента напружень σ_x задається рівнянням п'єзоефекту

$$\sigma_x = \frac{1}{s_{11}^E} (\varepsilon_x \mp d_{31}(1 + \nu) E_z). \quad (13)$$

Провівши інтегрування, отримуємо вираз для згинаючого моменту M_x :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz =$$

$$= -D^* \left(1 - \frac{3}{4} k_{31}^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{V_0}{h}. \quad (14)$$

2. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Загальний розв'язок задачі (1), (3), зважаючи на симетрію, буде містити лише парні функції:

$$\hat{w} = A \cos \beta x + C \text{ch} \beta x. \quad (15)$$

Для визначення сталих інтегрування A і C з граничних умов (3) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$-A\beta^2 \cos \beta l + C\beta^2 \text{ch} \beta l = P^*,$$

$$A\beta^3 \sin \beta l + C\beta^3 \text{sh} \beta l = 0, \quad (16)$$

де

$$P^* = \frac{h}{4} \frac{d_{31} V_0}{s_{11}^E D^* \left(1 - \frac{3}{4} k_{31}^2 \right)}.$$

Звідси маємо

$$C = -\frac{P^*}{\beta} \frac{\sin \beta l}{\Delta}, \quad A = \frac{P^*}{\beta^2} \frac{\text{sh} \beta l}{\Delta}, \quad (17)$$

Таблиця. Резонансні частоти та КЕМЗ

№	АНАЛІТИЧНІ РОЗРАХУНКИ				ЕКСПЕРИМЕНТ		
	$(\beta l)_p$	$(\beta l)_a$	k_d^2 (Мезон)	k_d^2 (енерг. кр.)	Резонанс, кГц	Антирезонанс, кГц	k_d^2 (Мезон)
1	2.365	2.4	0.0289	0.0365	6.25	6.2	0.0243
2	5.5	5.51	0.0058	0.0072	37.33	37.52	0.004
3	8.639	8.650	0.0024	0.003	–	–	–

де

$$\Delta = -\beta(\cos \beta l \operatorname{sh} \beta l + \operatorname{ch} \beta l \sin \beta l). \quad (18)$$

Резонансні частоти коливань біморфного стержня визначаються з умов нескінченного зростання амплітуди струму зміщення, а антирезонансні – з умови її рівності нулю:

$$\hat{I} = \infty, \quad \hat{I} = 0. \quad (19)$$

Струм зміщення визначається за формулою [2]:

$$I = -\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} D_z dS. \quad (20)$$

Тоді з (10) та (15) отримуємо

$$\hat{I} = i\omega C_0 V_0 \left(1 - \frac{1}{\Delta} \frac{\beta}{2l} \frac{3k_{31}^2}{1 - \frac{3}{4}k_{31}^2} \sin \beta l \operatorname{sh} \beta l \right), \quad (21)$$

де статична електрична ємність біморфного п'єзокерамічного стержня при нульових деформаціях дається формулою

$$C_0 = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{4bl}{h}. \quad (22)$$

Таким чином, резонансні частоти знаходимо, порівнявши до нуля визначник (18). Антирезонансні ж частоти визначаються нулями виразу (21). Їхні значення й величини відповідних динамічних КЕМЗ, розраховані за емпіричною формулою Мезона [3], наведені у таблиці.

Для того, щоб незалежно оцінити отримані результати, було проведено розрахунок КЕМЗ за допомогою енергетичного критерію [2]:

$$k_d^2 = \frac{U_p - U_k}{U_p}. \quad (23)$$

Тут U_p – повна енергія у стержні з розімкненими електродами:

$$\iint_{S^+} D_z ds = 0 \quad (24)$$

на отриманому полі деформацій; U_k – повна енергія у тому ж стержні для випадку коротко замкнених електродів:

$$\frac{V_0}{h} = 0. \quad (25)$$

Повна енергія для стержня з коротко замкненими електродами визначається за формулою

$$U_k = \frac{h^3 b}{8s_{11}^E (1 - k_{31}^2)} \frac{P^{*2} \beta^3}{\Delta^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{3k_{31}^2}{4} \right) \times \\ \times \{ \operatorname{sh}^2 \beta l (2\beta l + \sin 2\beta l) + \sin^2 \beta l (2\beta l + \operatorname{sh} 2\beta l) + \\ + 2\operatorname{sh} \beta l \sin \beta l (\operatorname{ch} \beta l \sin \beta l + \cos \beta l \operatorname{sh} \beta l) \}. \quad (26)$$

Різниця у чисельнику виразу (23) визначається як

$$U_p - U_k = \frac{bh^3}{32ls_{11}^E} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \left[\int_{-l}^l \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx \right]^2. \quad (27)$$

Відповідні результати наведені у таблиці разом зі значеннями резонансних та антирезонансних частот, а також КЕМЗ, отриманими експериментальним шляхом. Зазначимо, що в експерименті було досліджено зразок довжини $2l = 63$ мм, ширини $2b = 10$ мм й товщини $h = 5$ мм, виготовлений з кераміки цирконату титанату свинцю PZT-4 [2, 3].

ВИСНОВКИ

Величини КЕМЗ, отримані при згинних коливаннях біморфного п'єзокерамічного стержня з товщинною поляризацією, приблизно в чотири рази нижчі, ніж для випадку поздовжніх коливань стержня з товщинною поляризованою п'єзокераміки, при яких динамічний (на першій робочій частоті) та статичний КЕМЗ, у тому числі й отримані за енергетичним критерієм, мають практично рівні значення [4]. При згинних же коливаннях біморфа відмінності у значеннях КЕМЗ на першій резонансній частоті більш істотні і складають до 30 %.

Застосування емпіричної формули Мезона призводить до отримання дещо занижених результатів. Це пояснюється, насамперед, неоднорідністю поля деформацій комбінованого розтягу–стиску по товщині стержня. Якісно схожі дані були отримані раніше при розв'язанні аналогічної задачі про згинні коливання біморфного п'єзокерамічного диска [1].

Розрахункові результати щодо КЕМЗ при згинних коливаннях біморфного стержня підтверджені експериментально.

1. Борисейко О. В., Остапчук В. В., Улітко І. А. Про визначення динамічних КЕМЗ на згинних коливаннях круглої біморфної платівки // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: Мат. мех.– 2006.– 17.– С. 45–48.
2. Гринченко В. Т., Улітко А. Ф., Шульга Н. А. Електроупругість / Механика связанных полей в элементах конструкций: том 5.– К.: Наук. думка, 1989.– 280 с.
3. Мэзон У. П. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке.– М.: Изд-во иностр. лит., 1952.– 448 с.
4. Улітко А. Ф., Борисейко О. В., Улітко І. А. Прикладні методи в задачах електропружності.– К.: ВПЦ “Київський університет”, 2007.– 128 с.