

УДК 539.3

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ДИФРАКЦИИ ИЗГИБНЫХ ВОЛН НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕ В СОСТАВНОМ УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ\*, Е. А. НЕДИЛЬКО

Институт гидромеханики НАН Украины  
ул. Желябова, 8/4, 03680, ГСП, Киев-180, Украина  
\*E-mail: nsgihm@gmail.com

Получено 24.12.2011

На основе метода суперпозиции проведен расчет дифракции антисимметричных волн Рэлея – Лэмба на вертикальной границе волновода, образованного при жестком контакте двух полуполос одинаковой высоты, но с различными упругими свойствами. Эффективность метода обеспечивается учетом характера особенности по напряжениям, возникающей в угловой точке на линии контакта при определенном сочетании упругих характеристик сред. Проведен анализ трансформации энергии падающей волны в отраженную и прошедшую волны.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** метод суперпозиции, упругая полуполоса, волны Рэлея – Лэмба, трансформация волн, локальная особенность

На базі методу суперпозиції проведено розрахунок дифракції антисиметричних хвиль Релея – Лемба на вертикальній межі хвилепроводу, утвореного при жорсткому контакті двох півсмуг однакової висоти, але з різними пружними властивостями. Ефективність методу забезпечується урахуванням характеру особливості по напруженнях, яка виникає в кутовій точці на лінії контакту при певному поєднанні пружних характеристик середовищ. Проведено аналіз трансформації енергії падаючої хвилі у відбиту хвилю й хвилю, що пройшла у інше середовище.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** метод суперпозиції, пружна півсмуга, хвилі Релея – Лемба, трансформація хвиль, локальна особливість

On the basis of a superposition method, the diffraction of the Rayleigh – Lamb waves on a vertical boundary of a waveguide formed by a rigid contact of two halfstrips is calculated for the case of their identical heights, but different elastic properties. The efficiency of the method is provided by accounting for stress singularity occurring in the edge of a contact line at particular combinations of elastic properties of media. The analysis of energy transformation of the incidence wave into the reflected and transmitted ones is carried out.

**KEY WORDS:** a superposition method, elastic halfstrip, the Rayleigh – Lamb waves, wave transformation, a local singularity

### ВВЕДЕНИЕ

Анализ закономерностей распространения упругих волн в волноводах является научным фундаментом для таких направлений техники как дефектоскопия, неразрушающий контроль, акустоэлектроника. В их практических приложениях, как правило, используются нерегулярные волноводы. Такая нерегулярность может быть обусловлена различными причинами:

- спецификой геометрии волновода со скачкообразным изменением высоты;
- изменением физико-механических свойств по направлению распространения волны при стыке волноводов с разными механическими характеристиками;
- переменным характером граничных условий, обусловленных появлением трещины.

Для относительно низкочастотных процессов достоверные количественные оценки волнового по-

ля можно получить в рамках упрощенных моделей стержней и пластин. Принято считать, что одномерное приближение справедливо, если поперечный размер волновода меньше трети длины волны. С ростом частоты усложняется пространственная структура бегущих волн. В формировании прошедшего и отраженного полей существенную роль начинают играть локализованные вблизи поверхности раздела неоднородные волны. Кроме того, для достоверного описания поля в области поверхности контакта необходимо учитывать характер локального поведения поля. Оба указанных фактора значительно усложняют задачу анализа волнового поля, особенно в ближней зоне в окрестности неоднородности.

В данной работе основной акцент сделан на анализе влияния типа симметрии колебаний на характер процесса отражения – прохождения волны в зависимости от частоты. При этом учитывается влияние обоих указанных выше факторов применительно к задаче распространения антисимметричных волн в составном упругом волноводе.

Это необходимо, поскольку рассматривается относительно высокочастотный диапазон. Кроме того, как известно, в случае жесткого контакта двух упругих волноводов при определенных сочетаниях механических характеристик их материалов в угловой точке на линии контакта, являющейся точкой смены типа граничных условий, может существовать локальная особенность по напряжениям. Ее характер (логарифмическая или степенная) и соответствующий показатель степени  $\epsilon$  зависят от механических характеристик контактирующих сред, но не от частоты [1, 2]. В дальнейшем будем считать, что поле напряжений в угловой точке имеет степенную особенность.

В настоящее время разработаны эффективные методы решения соответствующей граничной задачи. При этом значительное внимание уделено вопросам учета особенности по напряжениям в угловой точке. Это обусловлено тем, что при представлении решения через нормальные волны, которые могут существовать на частоте нагрузки, возбуждающей волновое поле, ряды по напряжениям расходятся на зависящем от показателя особенности интервале  $h \leq |1 - 2\epsilon| \leq y \leq h$ , где  $2h$  – высота волновода [3, 4]. На примере решения граничной задачи о колебании полуполосы с заземленным торцом были предложены различные методы учета сингулярностей по напряжениям. Сюда можно отнести использование обобщенных сумм расходящихся рядов [3], выделение особенности в явном виде [4, 7], нахождение асимптотики неизвестных, определяемой показателем особенности [5, 6]. Отметим, что в задаче о колебаниях полуполосы с заземленным торцом необходимо удовлетворить граничные условия на торце по перемещениям, а ряды по перемещениям являются сходящимися на всем интервале  $|y| \leq h$ .

В ряде публикаций методы выделения особенности были обобщены на случай составных волноводов. В работах [8, 9] для улучшения сходимости на данном интервале применялись обобщенные методы суммирования и регуляризации. Граничная задача решалась в рамках метода однородных решений с использованием условия обобщенной ортогональности. Так, в статье [10] предложено разлагать решение по ортогональным полиномам с весом, учитывающим локальную особенность поля напряжений в угловой точке. В исследовании [11] рассмотрена граничная задача для жесткого контакта двух полуполос и предложен метод, основанный на использовании решений вспомогательных граничных задач для изолированных полуполос с заданными граничными условиями, позволяющий учитывать особенность по напряжениям в угловых

точках на линии контакта. Аналогичный же подход развивался в статье [12].

Обсуждению и разработке методов решения граничных задач для упругих волноводов с вертикальной неоднородностью посвящена довольно обширная литература. Так, в работах [6, 8, 13, 14] рассмотрены симметричные колебания составного волновода, проведен физический анализ результатов и приведены данные о распределении энергии падающей волны между отраженным и прошедшим полями. В частности, найдены два характерных частотных диапазона, в которых наблюдается резкое изменение эффективности прохождения волн:

- 1) в области частот, где распространяется только по одной отраженной и прошедшей волне, существует диапазон, в котором прозрачность границы резко возрастает (отражается только незначительная часть энергии падающей волны);
- 1) в более высокочастотной области существует диапазон, в котором увеличиваются отражающие свойства границы.

В исследовании [11] эффект увеличения прозрачности границы объяснялся появлением энергетических вихрей, частично перекрывающих энергетический поток. В публикациях [6, 8, 13] показано, что при симметричных колебаниях в той области частот, для которой в отраженном и прошедшем полях существует только по одной распространяющейся волне, увеличение эффективности прохождения энергии во вторую среду и рост напряжений на границе контакта обусловлены значительным возбуждением неоднородных волн.

Данная работа посвящена дальнейшему исследованию особенностей процесса отражения – прохождения антисимметричных волн на границе двух жестко соединенных полуполос одинаковой высоты, но с разными механическими характеристиками. При этом акцент сделан на изучении влияния типа симметрии на изменение отражающих свойств границы в зависимости от частоты. В частности показано, что для антисимметричных колебаний в области частот, для которой существует только по одной распространяющейся волне в отраженном и прошедшем полях, увеличение прозрачности границы не наблюдается. Более того, здесь усиливаются отражающие свойства границы и при определенных параметрах контактирующих сред волновод может оказаться практически запертым, т. е. энергия во вторую среду практически не будет проходить.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается стационарное волновое поле в упругом волноводе, образованном жестким соединением двух упругих полуполос одинаковой высоты  $2h$ , но с разными механическими характеристиками (рис. 1). Волновое поле возбуждается первой нормальной волной, приходящей из бесконечности в правой полуполосе ( $+\infty$ ). Падающей волне соответствует индекс 0, а индексы 1 и 2 – прошедшим и отраженным волнам соответственно. Свойства изотропных сред характеризуются модулями сдвига  $\mu_1, \mu_2$ , коэффициентами Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  и плотностями  $\rho_1, \rho_2$ . При этом индекс 1 присвоен левой полуполосе, в которой распространяются прошедшие волны. Поверхности  $Y = \pm h$  считаем свободными от напряжений. В дальнейшем математическую постановку и решение проводим в безразмерных координатах  $y = Y/h, z = Z/h$ .

В зоне контакта условия сопряжения записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(y, 0) &= \sigma_z^{(2)}(y, 0) + \sigma_z^{(0)}(y, 0), \\ \tau_{zy}^{(1)}(y, 0) &= \tau_z^{(2)}(y, 0) + \tau_z^{(0)}(y, 0), \\ u_y^{(1)} &= u_y^{(2)} + u_y^{(0)}, \\ u_z^{(1)} &= u_z^{(2)} + u_z^{(0)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь далее временной множитель  $e^{-i\omega t}$  опускаем ( $\omega$  – круговая частота).

Необходимо найти векторы смещений в отраженном и прошедшем полях, удовлетворяющие векторному уравнению Ламе

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Дополнительно к условиям сопряжения (1) должны выполняться условия излучения на бесконечности, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся нормальная волна в прошедшем и отраженном поле уносит энергию от границы раздела на бесконечность.

Прежде чем перейти к описанию метода решения сформулированной граничной задачи и анализу результатов полученного решения, рассмотрим отличия процесса отражения волн при симметричных и антисимметричных колебаниях жестко соединенных стержней. Такая постановка соответствует низкочастотному пределу рассматриваемой модели.

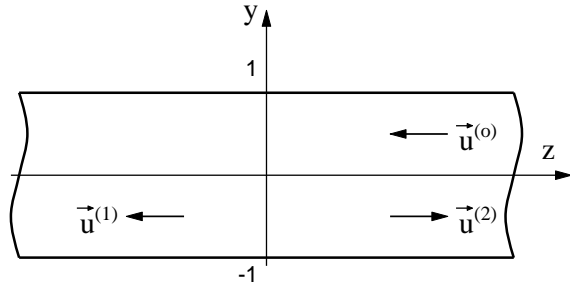


Рис. 1. Геометрия задачи

### 2. ВОЛНЫ В ЖЕСТКО СОЕДИНЕННЫХ СТЕРЖНЯХ

Простейшей моделью составного волновода является жесткое соединение (неразъемный контакт) стержней одинакового сечения, но с различными механическими свойствами – плотностями  $\rho_1, \rho_2$  и модулями Юнга  $E_1, E_2$ . Определим коэффициент отражения и прохождения по энергии гармонической волны на границе раздела при продольных и изгибных колебаниях стержней. Пусть на границу падает волна, приходящая из бесконечности во втором стержне. Для продольных гармонических колебаний в стержне волновое уравнение упрощается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0, \quad c = \sqrt{E/\rho}.$$

Здесь  $u$  – продольная компонента смещения. При жестком сцеплении таких стержней смещения и силы (напряжения) при подходе к границе слева и справа одинаковы, т. е. условия сопряжения имеют вид

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \quad E_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} = E_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z}, \quad z = 0.$$

Решение данной задачи ищем как

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= A(e^{-ik_2 z} + V e^{ik_2 z}), \\ u^{(1)} &= A W e^{-ik_1 z}, \\ k_i &= \frac{\omega}{c_i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь  $A$  – амплитуда падающей волны;  $V$  – коэффициент отражения;  $W$  – коэффициент прохождения. Выполняя условия сопряжения, получаем со-

отношения для обоих коэффициентов:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{E_2\rho_2} - \sqrt{E_1\rho_1}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}}, \\ W &= \frac{2\sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Выражения (3) совпадают с формулами Френеля для коэффициентов отражения и прохождения при нормальном падении продольной волны на границу раздела двух сред.  $U$  и  $V$  – действительные величины и зависят только от волновых сопротивлений сред ( $z_{1,2} = \rho_{1,2}c_{1,2} = \sqrt{E_{1,2}\rho_{1,2}}$ ).

Нормированная на энергию падающей волны энергия, переносимая отраженной волной, имеет вид

$$\frac{En^{(2)}}{En^{(0)}} = |V|^2.$$

Энергию, прошедшую во вторую среду, можно найти, используя закон сохранения энергии:

$$\frac{En^{(1)}}{En^{(0)}} = 1 - |V|^2.$$

Как следует из приведенных выражений, распределение энергии падающей волны между отраженным и прошедшим полями определяется только отношением волновых сопротивлений сред и не зависит от того, в какой из сред распространяется падающая волна.

При изгибных колебаниях стержней волновое уравнение для смещений (теперь уже поперечных) несколько сложнее:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \omega^2 \frac{\rho}{r_0^2 E} u = 0.$$

Здесь  $\rho_0$  – радиус инерции поперечного сечения. Общее решение этого уравнения уже нельзя представить в виде волны произвольной формы, которая распространяется с постоянной скоростью, как это было в случае продольных колебаний. Теперь общее решение, содержащее как распространяющиеся, так и неоднородные волны, имеет вид

$$u = A_1 e^{ikz} + B_1 e^{kz} + A_2 e^{-ikz} + B_2 e^{-kz}.$$

Индекс 1 соответствует волнам, распространяющимся в положительном направлении оси  $z$ , а индекс 2 – в отрицательном. Распространяющиеся волны имеют амплитуды  $A_{1,2}$ , а неоднородные –  $B_{1,2}$ .

При жестком сцеплении стержней на границе для случая изгибных колебаний слева и справа от границы одинаковы смещения, угол наклона,

момент и перерезывающая сила. Таким образом, условия сопряжения запишутся как

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^{(2)}, & \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z}, \\ E_1 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2} &= E_2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z^2}, \\ E_1 \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial z^3} &= E_2 \frac{\partial^3 u^{(2)}}{\partial z^3}. \end{aligned}$$

Вновь опуская гармонический временной множитель, решение данной задачи ищем в виде

$$u^{(2)} = A(e^{-ik_2 z} + V e^{ik_2 z} + V_1 e^{-k_2 z}),$$

$$u^{(1)} = A(W e^{-ik_1 z} + W_1 e^{-ik_1 z}),$$

$$k_i = \sqrt{\omega} \left( \frac{\rho_i}{E_i r_0^2} \right)^{1/4}, \quad i = 1, 2.$$

Выполнив условия сопряжения, найдем выражение для коэффициентов отражения и прохождения:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\gamma\alpha^2 + 4i\alpha\gamma^2 - 4i\alpha - 4\alpha\gamma + 2\gamma}{2\gamma\alpha^2 + 4\alpha\gamma^2 + 4\alpha + 4\alpha\gamma + 2\gamma}, \\ V_1 &= -\frac{2(\gamma(1+i)(\alpha-1)(\alpha+1))}{2\gamma\alpha^2 + 4\alpha\gamma^2 + 4\alpha + 4\alpha\gamma + 2\gamma}, \\ W &= \frac{4(\gamma+1)(\alpha+1)}{2\gamma\alpha^2 + 4\alpha\gamma^2 + 4\alpha + 4\alpha\gamma + 2\gamma}, \\ W_1 &= \frac{4(\gamma+1)(\alpha-1)}{2\gamma\alpha^2 + 4\alpha\gamma^2 + 4\alpha + 4\alpha\gamma + 2\gamma}, \\ \gamma &= \frac{k_2}{k_1}, & \alpha &= \frac{E_2 k_2^2}{E_1 k_1^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Как и при продольных колебаниях, распределение энергии падающей волны между отраженным и прошедшим полями не зависит от того, в какой из сред распространяется падающая волна. Однако при изгибных колебаниях существуют качественные отличия. Прежде всего, за счет появления неоднородных волн в прошедшем и отраженном полях коэффициенты становятся комплексными. Кроме того, их уже невозможно выразить только через отношения импедансов контактирующих стержней  $z_{1,2} = \rho_{1,2}c_{1,2} = (E_{1,2}\rho_{1,2})^{1/4} = \alpha\gamma$ . Несмотря на то, что неоднородные волны энергию не переносят, уровень их возбуждения суще-

ственно влияет на распределение энергии падающей волны между отраженными и прошедшими волнами.

Следовательно, при жестком контакте двух стержней с разными механическими характеристиками характер распределения энергии падающей волны между отраженными и прошедшими волнами для случаев продольных и изгибных колебаний существенно различается.

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В данной работе применяется метод суперпозиции [15], позволяющий учесть особенности по напряжениям в угловых точках. В его рамках построим решение граничной задачи для изгибных колебаний составного волновода. Следуя общей схеме метода, компоненты вектора смещений в отраженном поле ( $z > 0$ ) представим в виде

$$\begin{aligned}
 u_y^{(1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z} \right) \times \\
 &\quad \times \cos \beta_k y + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(2)}(\tau) U_y^{(2)}(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \\
 u_z^{(1)} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z} \right) \times \\
 &\quad \times \sin \beta_k y - \\
 &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(2)}(\tau) U_z^{(2)}(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau
 \end{aligned} \tag{5}$$

с неизвестными постоянными  $A_k, B_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) и функцией  $x^{(2)}(\tau)$ . В соотношениях (5) введены обозначения

$$\begin{aligned}
 U_y^{(2)}(\tau, y) &= \tau^2 \frac{\operatorname{ch} p_2 y}{\operatorname{ch} p_2} - \frac{(\tau^2 + p_2^2)}{2} \frac{\operatorname{ch} p_1 y}{\operatorname{ch} p_1}; \\
 U_z^{(2)}(\tau, y) &= \tau \left( -p_2 \frac{\operatorname{ch} p_2 y}{\operatorname{ch} p_2} + \frac{(\tau^2 + p_2^2)}{2} \frac{\operatorname{ch} p_1 y}{\operatorname{ch} p_1} \right); \\
 p_j &= \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \geq \Omega_j; \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| < \Omega_j; \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_j &= \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & |\beta_k| \geq \Omega_j; \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & |\beta_k| < \Omega_j; \end{cases} \\
 \beta_k &= \frac{(2k-1)\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega_{1,2}^{(2)} = \omega h / c_{l,s}$  – безразмерные частоты;  $c_l$  и  $c_s$  – скорости продольной и поперечной волны во второй среде соответственно.

Решение для первой полуполосы (прошедшее поле,  $z < 0$ ) получаем из (5) при замене неизвестных  $A_k, B_k$  на  $C_k, -D_k$  и смене знака для  $u_z$ . Кроме того, в выражения для величин, аналогичных  $p_j$  и  $q_j$  (обозначаем их как  $\tilde{p}_j$  и  $\tilde{q}_j$ ), следует подставить соответствующим образом нормированные частоты  $\Omega_{1,2}^{(2)}$ .

Считаем, что волновое поле в составном волноводе возбуждается первой нормальной волной, распространяющейся во второй полуполосе в отрицательном направлении оси  $z$ . В этом случае выражения для смещения в падающей волне запишутся как

$$\begin{aligned}
 u_z^{(0)} &= -U_z^{(2)}(\xi, y) e^{-i\xi z}, \\
 u_y^{(0)} &= iU_y^{(2)}(\xi, y) e^{-i\xi z},
 \end{aligned}$$

где  $\xi$  – постоянная распространения первой нормальной волны во второй полуполосе. Для заданной частоты она определяется из дисперсионного уравнения Рэлея–Лэмба:

$$\Delta(\xi) = \xi^2 p_2 \operatorname{th} p_2 - \frac{(\xi^2 + p_2^2)^2}{4p_1} \operatorname{th} p_1.$$

Представление (5) выбрано таким образом, чтобы условие отсутствия касательных напряжений на поверхностях  $y = \pm 1$  выполнялось автоматически. Дополнительное выполнение условий сопряжения приводит к следующей системе интегро-алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_k, B_k, C_k, D_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) и функций  $x^{(i)}(\tau)$ :

$$\begin{aligned}
 & x^{(2)}(\tau)\Delta_2(\tau) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( A_k \frac{2q_1(\beta_k^2 + \Omega_0^2)}{\tau^2 + q_1^2} + \right. \\
 & \left. + B_k \frac{2\beta_k q_2^2}{\tau^2 + q_2^2} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}
 & x^{(1)}(\tau)\Delta_1(\tau) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( C_k \frac{2\tilde{q}_1(\beta_k^2 + \tilde{\Omega}_0^2)}{\tau^2 + \tilde{q}_1^2} - \right. \\
 & \left. - D_k \frac{2\beta_k \tilde{q}_2^2}{\tau^2 + \tilde{q}_2^2} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_k q_1 + B_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2\beta_k} + \\
 & + \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( C_k \tilde{q}_1 - D_k \frac{\beta_k^2 + \tilde{q}_2^2}{2\beta_k} \right) = \\
 & = -(-1)^k \xi (\xi^2 + p_2^2) \left( \frac{1}{p_2^2 + \beta_k^2} - \frac{1}{p_2^2 + \beta_k^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_k q_1 + B_k \beta_k + C_k \tilde{q}_1 - D_k \beta_k = \\
 & = -(-1)^k \xi \left( \frac{2p_2^2}{p_2^2 + \beta_k^2} - \frac{\xi^2 + p_2^2}{p_2^2 + \beta_k^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_k + B_k \frac{q_2}{\beta_k} - \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(2)}(\tau) e_k(\tau) d\tau - \\
 & - C_k + D_k \frac{\tilde{q}_2}{\beta_k} + \\
 & + \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) \tilde{e}_k(\tau) d\tau = 2ie_k(\xi),
 \end{aligned} \tag{6b}$$

$$\begin{aligned}
 & A_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} + B_k \beta_k q_2 - \\
 & - \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(2)}(\tau) d_k(\tau) d\tau - \\
 & - \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( C_k \frac{\beta_k^2 + \tilde{q}_2^2}{2} D_k \beta_k \tilde{q}_2 - \right. \\
 & \left. - \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) \tilde{d}_k(\tau) d\tau \right) = i2d_k(\xi),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_k(\tau) &= \frac{\tau^2}{\beta_k^2 + p_2^2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{2(\beta_k^2 + p_1^2)}; \\
 d_k(\tau) &= \frac{(\tau^2 + \Omega_0^2)(\tau^2 + p_2^2)}{2(\tau^2 + q_1^2)} - \frac{\tau^2 p_2^2}{\tau^2 + q_2^2}; \\
 \Omega_0^2 &= \frac{\Omega_2^2}{2} - \Omega_1^2.
 \end{aligned}$$

Система (6) относится к системам второго рода, в которых естественным образом выделяются главные элементы, ответственные за выполнение конкретных граничных условий. Само формирование алгебраической системы проводится с использованием основных свойств разложений в ряды Фурье. Это обеспечивает ее сходимость даже при наличии интегрируемых особенностей в разлагаемых функциях. Более того, даже с использованием метода простой редукции интегральные характеристики поля (его энергия) могут быть получены с высокой точностью. Для более полного описания волновых полей в составном волноводе необходимо в явном виде учитывать локальные особенности на границе контакта двух сред. Так, при жестком контакте двух полуполос в угловой точке, являющейся точкой смены типа граничных условий, при определенных соотношениях параметров контактирующих сред может существовать особенность по напряжениям с показателем  $\epsilon$  [1]. Как уже отмечалось, ее наличие приводит к тому, что в рамках метода суперпозиции интегралы и ряды для напряжений на линии контакта  $z=0$  сходятся медленно, а на отрезке  $h|1-2\epsilon| \leq y \leq h -$  расходятся [3, 4].

Для получения решения, адекватно описывающего волновое поле на границе раздела, необходимо использовать асимптотическое поведение неизвестных. Его анализ в суммах основан на свойствах сходимости рядов для напряжений вблизи угловых точек на линии контакта двух сред:  $y = \pm 1, z = +0$ . Процедура нахождения асимптотики для неизвестных системы (6) аналогична описанной в работах [5, 13] для продольных колебаний и в [6] для изгибных. В отраженном поле при  $k > K$  выражения для коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned}
 A_K &= \frac{J_{\epsilon+1/2}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon-1/2}} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}, \\
 B_K &= \frac{J_{\epsilon+1/2}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon-1/2}} \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} + \frac{\sigma_1}{\beta_k^2} \right), \\
 x^{(2)}(\tau) &= \frac{\sqrt{2} \text{cth} \frac{\pi \epsilon}{2} (\sigma_1(1 - \epsilon) + \sigma_2(1 + \epsilon))}{\sqrt{\pi} (\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \tau^{1+\epsilon}}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Для прошедшего поля следует заменить  $\Omega_i$  на  $\tilde{\Omega}_i$ ;  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$ ;  $A_K$  на  $C_K$ ;  $B_K$  на  $-D_K$ .

Построение конечной системы, соответствующей бесконечной системе (6), выполнено по аналогии со статьей [5] с учетом асимптотического поведения неизвестных в рассматриваемом случае.

Для нахождения показателя особенности  $\epsilon$  в выражениях (7) сохраним только главные члены системы (6). Определитель усеченной таким образом системы совпадает с уравнением Дандерса для статических задач [1]:

$$\left(\beta \sin^2 \frac{\pi \epsilon}{2} + (\alpha - \beta) \epsilon^2\right)^2 - \frac{1}{4} \sin^2 \pi \epsilon - \epsilon^2 \alpha^2 = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\mu_2(1 - \nu_1) - \mu_1(1 - \nu_2)}{\mu_2(1 - \nu_1) + \mu_1(1 - \nu_2)}; \quad (9)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\mu_2(1 - 2\nu_1) - \mu_1(1 - 2\nu_2)}{\mu_2(1 - \nu_1) + \mu_1(1 - \nu_2)}.$$

Заканчивая описание метода суперпозиции применительно к решению задачи дифракции нормальных волн на вертикальной границе в составном волноводе, подчеркнем еще раз, что основное его преимущество заключается в возможности учета локальных особенностей по напряжениям на границе раздела. Это позволяет построить эффективный алгоритм для вычисления характеристик отраженного и прошедшего полей при учете конечного числа слагаемых в рядах системы (6).

Для оценки качества полученного решения использовались различные методы.

1. Анализ точности выполнения условий сопряжения показал, что при учете 20 членов ряда в системе (6) погрешности выполнения условий сопряжения по смещениям  $u_z$ ,  $u_y$  для всех рассмотренных случаев не превышали 4 % от  $u_z^{(0)}(0, 0)$ . Погрешность по касательным напряжениям не превышала 0.02 % от  $\sigma_0 = \sigma^{(0)}(0, 0)$  для всех  $|y| < 1$ , кроме малой окрестности угла, и практически не зависела от показателя особенности в угловой точке. Для нормального напряжения и  $\sigma_z$  ситуация оказалась иной – точность выполнения условий сопряжения в малой окрестности угловых точек ( $y = \pm 1$ ,  $z = 0$ ) существенно падает. Тем не менее, при проведенных расчетах для  $|y| < 0.98$  условия сопряжения по нормальным напряжениям выполнялись с погрешностью до 5 % от  $\sigma_0$ .

2. Для широкого диапазона изменения параметров среды при принятом числе неизвестных в конечной системе закон сохранения энергии выполнялся с точностью до 0.2 % энергии падающей волны. Следует отметить, что учет особенности по напряжениям практически не сказывался на точности выполнения закона сохранения энергии. Это обусловлено тем, что коэффициенты возбуждения распространяющихся волн определяются в основном первыми коэффициентами системы (6).

3. Также оценивалась скорость стремления неизвестных с большими номерами к их асимптотическим значениям. При  $K = 20$  неизвестные  $A_{19}$ ,  $B_{19}$ ,  $C_{19}$ ,  $D_{19}$  отличались от асимптотических значений во втором знаке после запятой.

### 3.1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В соответствии с законом сохранения энергии сумма энергий отраженного и прошедшего полей равна энергии падающей волны. Энергия же отраженного поля равна сумме энергий, переносимой каждой распространяющейся волной, которая может существовать на частоте падающей волны и определяется соотношением

$$W = \sum_{j=1}^J W_j, \quad W_j = |K_j|^2 \mu_2 \Omega_2^2 \Delta_2'(\xi_j). \quad (10)$$

Здесь  $J$  – количество распространяющихся волн в отраженном поле;  $K_j$  коэффициент возбуждения  $j$ -ой нормальной волны.

Коэффициенты  $K_j$  для нормальных волн в отраженном поле находились из соотношения

$$K_j^{(\text{np})} = \text{Res}_{\tau=\xi_j} x_2(\tau), \quad (11)$$

где  $\text{Res}$  обозначает вычет функции  $x_2(\tau)$  при  $\tau = \xi_j$ . Для прошедшего поля все выглядит аналогично.

Рассмотрим особенности процесса отражения – прохождения первой нормальной волны от границы раздела в составном волноводе в случае, когда в отраженном поле распространяющиеся волны высших порядков появляются раньше, чем в прошедшем. Рассматривается диапазон вплоть до критической частоты для третьей распространяющейся волны в отраженном поле. Указанная ситуация может возникнуть при условии  $\tilde{c}_2 = \sqrt{\mu_1/\rho_1} > c_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$ . При антисимметричных колебаниях на частотах выше

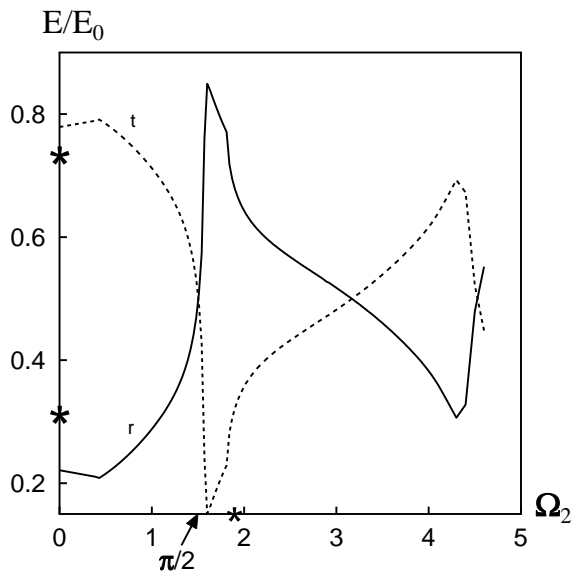


Рис. 2. Распределение энергии падающей волны в отраженном и прошедшем полях (случай падения из более жесткой среды)

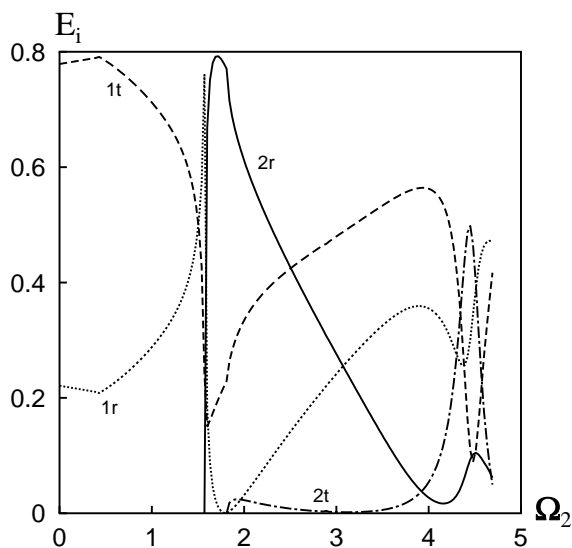


Рис. 3. Распределение энергии падающей волны между двумя первыми распространяющимися волнами в отраженном и прошедшем полях (случай падения из более жесткой среды)

$\Omega_2 \geq \pi/2$  появляются распространяющиеся волны высших порядков. Конкретные вычисления выполним для волновода со следующими характеристиками:  $\mu_2/\mu_1 = 6.36$ ,  $\rho_2/\rho_1 = 8.5$ ,  $\nu_2 = 0.29$ ,  $\nu_1 = 0.17$ . В этом случае возникает особенность по напряжениям в угловой точке, имеющая показа-

тель  $\epsilon = 0.907$ .

Остановимся вначале на анализе энергетических характеристик волнового поля. На рис. 2 представлено распределение энергии падающей волны в отраженном и прошедшем полях для данного волновода. Сплошная кривая соответствует энергии отраженного поля, а штриховая – прошедшего. Звездочками на оси  $E$  обозначены (в процентном отношении) энергии отраженного и прошедшего полей, найденные по стержневой модели. На оси  $\Omega_2$  стрелочкой указана частота  $\Omega_2 = \pi/2$ , на которой в отраженном поле появляется вторая распространяющаяся волна. На частоте  $\Omega_2 = 1.9$  (она обозначена на рисунке звездочкой) вторая распространяющаяся волна появляется в прошедшем поле. В отличие от продольных колебаний составного волновода с теми же механическими характеристиками контактирующих сред [13], при изгибных колебаниях распределение энергии между отраженной и прошедшей волной в рамках стержневой модели справедливо только для очень низких частот – ее погрешность не превышает 4 % в диапазоне  $\Omega_2 < 0.4$ .

При увеличении частоты проявляется еще одна отличительная особенность антисимметричных колебаний составного волновода – энергия отраженного поля увеличивается, а часть энергии, прошедшей во вторую среду, уменьшается. Увеличения прозрачности границы, обусловленного эффективным возбуждением неоднородных волн в области частот, для которой в отраженном и прошедшем полях распространяется только по одной волне, при изгибных колебаниях неоднородные волны возбуждаются лишь незначительно. В окрестности частоты, на которой в отраженном поле появляется вторая распространяющаяся волна, наблюдается максимум энергии отраженного поля и волновод оказывается практически заперт – только порядка 10 % энергии падающей волны проходит во вторую среду. При дальнейшем росте частоты прозрачность границы вновь начинает увеличиваться и при  $\Omega_2 = 4.33$  во вторую среду проходит уже около 70 % энергии падающей волны. Для еще более высоких частот энергия отраженного поля вновь возрастает. Таким образом, частотная зависимость энергии отраженного (прошедшего) поля имеет два локальных экстремума – существуют диапазон, в котором основная часть энергии отражается от границы, и диапазон, в котором прозрачность границы резко увеличивается. Указанные особенности трансформации энергии падающей изгибной волны в отраженные и прошедшие волны отмечены и в [14].

Для объяснения наблюдаемых эффектов рас-



смотрим распределение энергии падающей волны между различными распространяющимися волнами в отраженном и прошедшем полях, представленное на рис. 3. Здесь номера кривых соответствуют номерам распространяющихся волн. Индексом  $r$  обозначены отраженные волны, а индексом  $t$  – прошедшие. В области частот, для которой существует только по одной распространяющейся волне в отраженном и прошедшем полях, с ростом частоты энергия, переносимая первой распространяющейся волной в отраженном поле, увеличивается, а в прошедшем – падает. При появлении в отраженном поле второй распространяющейся волны она становится доминирующей в диапазоне  $\pi/2 < \Omega_2 < 2.5$  и на частоте  $\Omega_2 = 1.71$  в ней концентрируется до 80 % энергии падающей волны. Энергия, переносимая в отраженном поле первой распространяющейся волной, резко уменьшается. Следует обратить внимание на то, что на частоте  $\Omega_2 = 1.8$  первая распространяющаяся отраженная волна вырождается практически полностью. Таким образом, существуют частоты, на которых происходит полное превращение энергии падающей волны одного типа в энергию отраженных и прошедших волн другого типа.

Сравнивая данные о распределении энергии отраженного поля между первой и второй распространяющимися волнами для рассматриваемого составного волновода (см. рис. 3) с распределением энергии при отражении первой изгибной нормальной волны от свободного торца [17], отметим, что в обоих случаях вторая распространяющаяся волна после своего появления становится наиболее энергетически выраженной и доминирует в определенном диапазоне выше своей критической частоты. Такая же тенденция наблюдается и для вынужденных изгибных колебаний полуслоя [17]. Отметим, что скорость нарастания энергии второй моды с ростом частоты в полуслое в значительной мере зависит от вида нагрузки [17].

Хотя для рассматриваемых частот приближенные теории уже несправедливы, отмеченные аналогии в энергетической структуре отраженного поля для полуслоя со свободным торцом и для рассматриваемого составного волновода можно объяснить, оценив изгибные жесткости контактирующих полуполос по соотношению [16]:

$$D_i = \frac{E_i h^3}{12(1 - \nu_i^2)} = \frac{2\mu_i(1 + \nu_i)h^3}{12(1 - \nu_i^2)}, \quad i = 1, 2.$$

Для рассматриваемой пары материалов  $D_2/D_1 = 7.4$ , т.е. волна падает из более жесткой среды в значительно более мягкую. Поэтому для данного составного волновода характерные

особенности распределения энергии отраженного поля между различными распространяющимися волнами в целом сходны со случаем отражения первой распространяющейся волны от свободного торца.

Таким образом, можно утверждать, что увеличение энергии отраженного поля обусловлено не только первой отраженной волной, но и появлением в отраженном поле второй распространяющейся волны, которая выше своей частоты запирается становится доминирующей.

Возвращаясь к рис. 3, обратимся к частотным зависимостям энергии, переносимой первой и второй распространяющимися волнами в прошедшем поле (кривые  $1t$  и  $2t$ ). Заметим, что здесь вторая распространяющаяся волна не становится доминирующей выше своей частоты запирается, а увеличение энергии прошедшего поля происходит в основном за счет энергии первой прошедшей распространяющейся волны. Последняя становится доминирующей в диапазоне  $2.6 < \Omega_2 < 4.3$ , который можно естественным образом разбить на два интервала. Ниже частоты  $\Omega_2 = 3.2$  большая часть энергии падающей волны отражается, а выше нее – проходит во вторую среду. Максимум прохождения наблюдается на частоте  $\Omega_2 = 4.33$ , на которой в прошедшем поле доминирует вторая распространяющаяся волна.

Таким образом, для рассматриваемого составного волновода увеличение энергии отраженного поля обусловлено доминированием второй распространяющейся отраженной волны. Увеличение энергии прошедшего поля также обусловлено доминированием второй волны, но уже в прошедшем поле.

Рассмотрим процесс отражения первой нормальной волны от границы раздела составного волновода с теми же физическими характеристиками, но при условии, что падающая волна приходит из более мягкой среды в более жесткую, т.е. распространяется в первом волноводе. Тогда в прошедшем поле распространяющиеся волны высших порядков должны появляться раньше, чем в отраженном. Распределение энергии падающей волны между отраженным и прошедшим полями для данного случая представлено на рис. 4. Для удобства сравнения данных на рис. 2 и 4 на последнем графике по оси абсцисс отложена эта частота волны во втором полуслое, соответствующая частоте падающей волны –  $\Omega_2 = \omega h/c_2$ . На оси  $E/E_0$  звездочками показаны доли энергии, рассчитанные по стрелневой модели. На оси  $\Omega_2$  звездочкой отмечена частота, на которой в прошедшем поле появляется вторая распространяющаяся

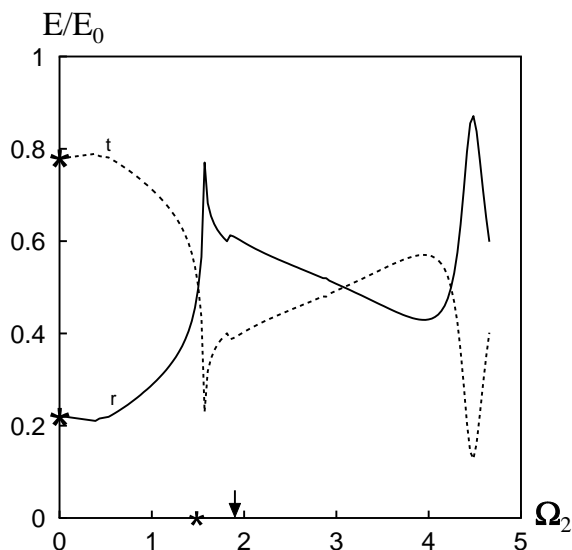


Рис. 4. Распределение энергии падающей волны в отраженном и прошедшем полях (случай падения из более мягкой среды)

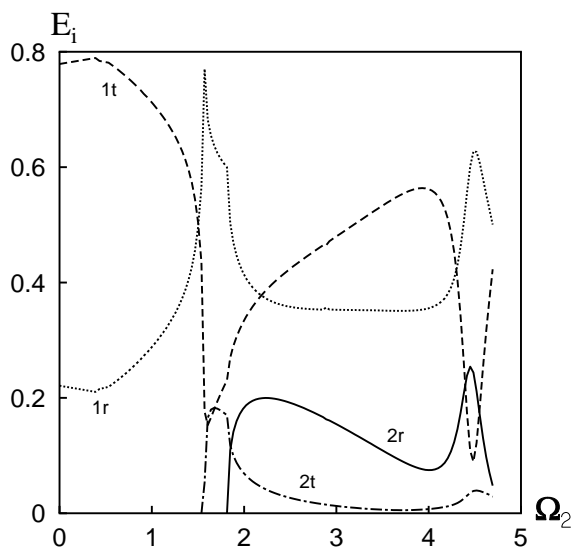


Рис. 5. Распределение энергии падающей волны между двумя первыми распространяющимися волнами в отраженном и прошедшем полях (случай падения из более мягкой среды)

волна, а стрелочкой – частота, на которой вторая распространяющаяся волна появляется в прошедшем поле.

Как следует из соотношений (4), при изменении направления распространения волны, падающей из первой или второй полуполосы, величины

отраженной и прошедшей энергий не меняются. При увеличении частоты энергия отраженного поля увеличивается, а прошедшего – падает. Сравнение данных, приведенных на рис. 2 и 4, позволяет отметить очень интересный факт: в том диапазоне частот, где в отраженном и прошедшем полях существует только по одной распространяющейся волне, обе зависимости совпадают с графической точностью. Несмотря на то, что здесь уже не справедлива приближенная теория, вплоть до критической частоты для второй распространяющейся волны процентное распределение энергии падающей волны между отраженным и прошедшим полями не зависит от направления распространения падающей волны. Этот результат тем более неожиданный, что он не имеет аналога при продольных колебаниях составного волновода.

С ростом частоты, когда в прошедшем поле появляются две распространяющиеся волны, общая энергия прошедшего поля увеличивается. В отличие от рассмотренного ранее случая падения волны из второго волновода, в данной ситуации при появлении высших распространяющихся мод энергия отраженного поля начинает падать. Локальный максимум энергии отраженного поля (77.02 % энергии падающей волны) наблюдается на частоте, принадлежащей диапазону, в котором и в отраженном, и в прошедшем полях распространяются только по одной волне. При дальнейшем росте частоты наблюдается максимальное прохождение во вторую среду при  $\Omega_2 = 3.9$ , однако здесь энергия, прошедшая во второй волновод, оказывается меньше, чем в низкочастотном пределе. Еще одна характерная частота, относящаяся к рис. 4, –  $\Omega_2 = 4.48$ . На ней отражается более 87.1 % энергии падающей волны, т.е. волновод оказывается практически заперт.

Рассмотрим распределение энергии отраженного и прошедшего полей между различными распространяющимися модами (рис. 5). Здесь индексация та же, что и на рис. 3. Как видно из графика, при появлении в прошедшем поле второй распространяющейся волны (кривая 2t), она не становится доминирующей. Ее энергосодержание увеличивается до частоты  $\Omega_2 = 1.68$ , на которой вторая мода переносит 18.3 % энергии падающей волны. На более высоких частотах ( $\Omega_2 > 1.8$ ) она возбуждается слабо, а энергия прошедшего поля определяется в основном первой распространяющейся волной. В отраженном поле при появлении второй распространяющейся волны ее энергосодержание увеличивается, но и здесь она переносит не более 20 % энергии падающей волны. Следовательно, энергия отраженного поля также опреде-

ляется первой распространяющейся волной. Отметим, что распределение энергии отраженного поля между двумя распространяющимися волнами в рассматриваемом случае аналогично случаю отражения первой моды от заземленного торца.

Таким образом, при изменении параметров контактирующих сред в составном волноводе при его изгибных колебаниях усиление отражающих свойств границы сохраняется и в той области частот, когда в волноводе появляется вторая распространяющаяся волна, однако изменяется эффективность его проявления. В более высокочастотной области наблюдается еще один эффект – увеличение прозрачности границы. Для контакта полуполос с существенно различными изгибными жесткостями оно обусловлено ростом энергии первой прошедшей волны в определенном частотном диапазоне. Заметим, что наиболее прозрачной граница остается в низкочастотном пределе.

Степень изменения отражающих свойств границы зависит как от соотношения изгибных жесткостей контактирующих волноводов, так и других механических параметров (в частности, от коэффициентов Пуассона). Вопрос изменения эффективности прохождения энергии во вторую среду в зависимости от соотношения указанных механических характеристик требует дополнительного анализа.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В широком диапазоне частот изучены свойства волнового поля в составном упругом волноводе, образованном при жестком контакте двух полуполос одинаковой ширины, но с разными механическими характеристиками.

Основой построения алгоритма вычислений был метод суперпозиции, примененный к решению граничных задач с конечными границами при наличии в волновом поле локальных особенностей. С использованием значений найденных этим методом неизвестных определены коэффициенты возбуждения нормальных волн в отраженном и прошедшем полях. Установлено, что при изгибных колебаниях составного волновода наблюдается значительная зависимость эффективности прохождения во вторую среду от частоты. При этом оказалось возможным выделить диапазоны частот, в которых резко усиливаются отражающие свойства границы, и диапазоны, в которых возрастает ее прозрачность.

Полученные сведения об особенностях процесса отражения – прохождения волн на конечной границе контакта упругих тел с различными вол-

новыми свойствами важны для построения алгоритмов неразрушающего акустического контроля механических соединений.

1. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы // Прикладная механика. Тр. Амер. общ. инж.-мех.–1971.– **38**, № 2.– С. 87–96.
2. Sinclair G. B. Stress singularities in classical elasticity: I Removal, interpretation, and analysis // Appl. Mech. Rev.– 2004.– **57**, № 4.– С. 251–297.
3. Пельц С. П., Шихман В. М. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы // Докл. АН СССР.–1987.– **295**, № 4.– С. 821–824.
4. Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О возможности метода однородных решений в смешанной задаче теории упругости для полуполосы // Теор. прикл. мех.– 1987.– **18**.– С. 3–8.
5. Городецкая Н. С. Дифракция волн Рэлея–Лэмба на вертикальной границе в составном упругом волноводе // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, № 1.– С. 23–35.
6. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С., Старовойт И. В. Антисимметричные колебания полуслоя с заземленным торцом // Акуст. вісн.– 2009.– **12**, № 1.– С. 32–42.
7. Дьяконов М. Б., Устинов Ю. А. Сдвиговые волны в упругом полубесконечном слое с разрезом // Акуст. ж.– 1995.– **41**, № 3.– С. 421–426.
8. Гетман И. П., Лисицкий О. Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // Прикл. мат. мех.– 1988.– **52**, № 6.– С. 1044–1048.
9. Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов.– Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та, 1993.– 142 с.
10. Glushkov E. V., Glushkova N. V. Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // J. Acoust. Soc. Amer.– 1997.– **102**, № 3.– С. 1356–1360.
11. Никитин Ю. Г. Распространение упругих волн в составных волноводах / Автореф. дис. . . к. ф.-м. н.– Краснодар: Кубан. гос. ун-т, 1996.– 16 с.
12. Вовк Л. П. Анализ локальных особенностей волноводного поля в сингулярных точках составных областей // Вісн. Сум. держ. ун-ту. Сер. фіз., мат., мех.– 2003.– **10(56)**.– С. 144–156.
13. Городецкая Н. С. Трансформация энергии падающей волны на границе раздела в составном волноводе // Акуст. вісн.– 2001.– **4**, № 1.– С. 17–25.
14. Scandrett C., Vassudeva N. The propagation of time harmonic Rayleigh–Lamb waves in a bimaterial plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 1991.– **89**, № 4, Pt. 1.– С. 1606–1614.
15. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.– М.: ГИТТЛ, 1953.– 788 с.
17. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С., Старовойт И. В. Особенности возбуждения нормальных волн при изгибных колебаниях полуслоя // Акуст. вісн.– 2007.– **10**, № 3.– С. 42–54.