

УДК 534.1:629.764.7

НЕЛИНЕЙНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В СРЕЗАННЫХ КОНИЧЕСКИХ БАКАХ

И. А. ЛУКОВСКИЙ, А. В. СОЛОДУН, А. Н. ТИМОХА

*Институт математики НАН Украины, Киев**Получено 20.09.2011*

Рассматриваются нелинейные резонансные колебания идеальной несжимаемой жидкости в жестком баке в форме срезанного кругового конуса при его поступательных колебаниях с частотой, близкой к основной собственной частоте колебаний жидкости. С использованием техники неконформных отображений построена нелинейная модальная асимптотическая теория. Предложен алгоритм определения коэффициентов соответствующей нелинейной модальной системы. С помощью этой системы проанализированы установившиеся резонансные движения жидкости. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Розглядаються нелінійні резонансні коливання ідеальної нестисливої рідини в жорсткому баці у формі зрізаного кругового конуса при його поступальних коливаннях з частотою, близькою до основної власної частоти коливань рідини. З використанням техніки неконформних відображень побудовано нелінійну модальну асимптотичну теорію. Запропоновано алгоритм визначення коефіцієнтів відповідної нелінійної модальної системи. За допомогою цієї системи проаналізовано усталені резонансні рухи рідини. Проведене порівняння одержаних результатів з експериментальними даними.

The paper deals with considering of nonlinear resonant sloshing of an ideal incompressible liquid in a rigid truncated conical tank at its translatory oscillations with a frequency close to the lowest natural sloshing frequency. A nonlinear asymptotic modal theory is derived by the non-conformal mapping technique. An algorithm for finding of the hydrodynamic coefficients of the corresponding nonlinear modal system is proposed. The system is used to describe the steady-state liquid motions. The obtained results are compared with the experimental data.

ВВЕДЕНИЕ

Среди множества подвижных технических объектов, имеющих в своем составе жидкие грузы, следует особо выделить твердотельные конструкции с коническими резервуарами, частично заполненными жидкостью. При их проектировании возникает целый комплекс проблем, связанных с безопасной эксплуатацией. На первый план здесь выступают проблемы определения частот и форм свободных колебаний жидкости в конических резервуарах, а также сил взаимодействия между стенками бака и жидкостью. Это крайне важно для прогнозирования динамического поведения конструкций при воздействии на них различных возмущающих факторов вибрационного, сейсмического, ветрового и другого происхождения. Подобные проблемы традиционно возникают в авиации, ракетной и космической технике, при создании морского и железнодорожного транспорта. В настоящее время исследования по динамике твердых тел с жидкостью пополнились новыми постановками задач. Прежде всего, они связаны с проектированием новых наземных жидкостно-наполненных объектов типа водонапорных башен, состоящих из цилиндрических резервуаров с коническим дном, нефтехранилищ в виде срезанных

круговых конусов (рис. 1), а также резервуаров с жидкостью, выступающих в качестве динамических демпферов колебаний высотных домов и протяженных мостов.

В математическом отношении упомянутые проблемы достаточно сложны. Первая трудность возникает уже на стадии построения математической модели, пригодной для описания совместного движения механической системы, состоящей из разнородных физических объектов – твердого тела и жидкости. В большинстве практически важных случаев привлекательной формой их представления оказывается система линейных или нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. На ее основе методами аналитической механики удается наиболее корректно поставить и решить возникающие проблемы устойчивости, а для управляемых объектов – проблемы, связанные с построением автоматов стабилизации. Вторая трудность связана с решением спектральных задач математической физики, порождаемых в теории колебаний ограниченного объема жидкости со свободной границей. При этом формы (моды) колебаний должны удовлетворять ряду специальных требований, связанных из методологии составления уравнений движения системы (особенно для резервуаров сложной формы [3–8]).



Рис. 1. Типичные конические водонапорные баки (сверху) и нефтехимические резервуары на Аляске и в Огайо (внизу)

Указанные проблемы в значительной степени преодолены при рассмотрении задач о взаимодействии твердого тела с жидкостью в линейном приближении [1, 2, 7, 15, 18]. Однако линейной их трактовки в случае функционирования механической системы “тело – жидкость” в экстремальных условиях (при землетрясениях, в условиях резонансных колебаний и т. п.) совершенно недостаточно, так как при этом многие физические процессы не отражаются в математической модели даже качественно. Поэтому здесь основные усилия были в последние годы направлены на создание и ис-

следование нелинейных математических моделей, адекватно описывающих подавляющее большинство реально происходящих физических процессов.

По нашему мнению, для этой цели наиболее подходит модальный метод Майлса – Луковского, базирующийся на вариационном принципе механики, не использующем классический Лагранжиан в виде разности кинетической и потенциальной энергии [4, 21]. Для жидкой среды в качестве Лагранжиана в этом вариационном принципе выступает некоторый определенный интеграл

от давления по области, часть границы которой свободна и подлежит определению в процессе исследования. Из него вытекает вариационная задача с естественными граничными условиями. При этом экстремальные значения соответствующего функционала достигаются на решениях нелинейной краевой задачи для потенциала скоростей, сформулированной для движущейся в пространстве ограниченной области со свободной границей. Оба нелинейных граничных условия этой краевой задачи на свободной поверхности, кинетическое и динамическое, следуют из ее вариационной формулировки. Этого нельзя достичь на основе классического вариационного принципа [6, 8, 14, 22].

При применении упомянутого метода в случае резервуара в виде срезанного кругового конуса возникают типичные для областей сложной геометрии трудности. Прежде всего, отсутствуют точные решения основной спектральной задачи этой теории, позволяющие конструктивно задавать потенциал скоростей и форму свободной поверхности (как это традиционно делается в случае цилиндрических резервуаров). Поэтому требуются специальные приемы, гарантирующие, например, выполнение условия непротекания ($\partial\varphi/\partial\nu=0$) на всей твердой стенке полости или, по крайней мере, на той ее части, где может оказаться жидкость в процессе конечных деформаций свободной поверхности [3]. В настоящее время это ограничение удалось снять, построив приближенное решение спектральной задачи, точно удовлетворяющее условию непротекания на всей конической поверхности резервуара [7, 9, 12].

Важен выбор обобщенных координат, характеризующих положение возмущенной свободной поверхности жидкости в окрестности ее невозмущенного состояния. Для рассмотрения нелинейных проблем колебаний жидкости в конических сосудах потребовалось построить специальную неортогональную систему координат, в которой преобразованная область принимает форму кругового цилиндра, а решение соответствующей задачи можно построить в частично разделенном виде [3, 7]. Это позволило сформулировать модальный метод с такой же степенью общности, как и в случае резервуара цилиндрической формы [11, 12, 17, 18].

В разделе 1 этой статьи приведена общая постановка задачи, введены основные физические и геометрические величины. В разделе 2 представлена нелинейная семимодовая модальная система (система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка), описывающая резонансные колебания жидкости в вертикальном срезанном коническом баке при вынужденных колебани-

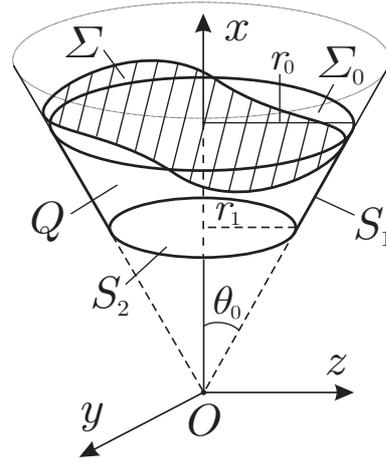


Рис. 2. Эскиз рассматриваемой модели

ях системы в одной из плоскостей симметрии бака. В широком диапазоне геометрических параметров бака подсчитаны и затабулированы возникающие здесь безразмерные гидродинамические коэффициенты. В разделе 3 исследованы установившиеся режимы движения рассматриваемой механической системы и их устойчивость в случае гармонических горизонтальных колебаний бака с малой амплитудой. Наконец, в разделе 4 рассмотрен вопрос о силовом взаимодействии жидкости со стенками резервуара. Для подсчета гидродинамических сил использованы известные формулы Луковского [5, 6].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим поступательное движение твердого тела, которое содержит полость (бак) в форме обратного вертикального срезанного кругового конуса с углом полураствора θ_0 , рис. 2. Бак частично заполнен идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ и совершает поступательные перемещения со скоростью $\vec{v}_0(t)$. Движение жидкости рассматривается в связанной с баком системе координат $Oxyz$. Начало координат размещено в условной вершине конуса O . Ось Ox направлена вдоль оси конуса в направлении, противоположном вектору ускорения сил земного тяготения \vec{g} в статическом (неподвижном) положении бака.

Распределение абсолютной скорости жидкости можно представить в виде $\vec{v}=\nabla\Phi(x,y,z,t)$, где потенциал скоростей $\Phi(x,y,z,t)$ – функция координат и времени в неинерциальной (связанной с баком) системе. Согласно [6], $\Phi(x,y,z,t)$ и мгновенное положение свободной поверхности, которое

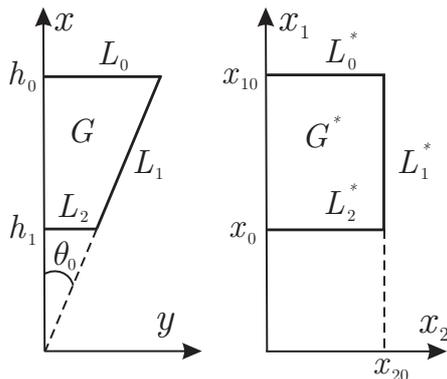


Рис. 3. Исходная и трансформированная область меридионального сечения

можно задать неявно в виде $\zeta(x, y, z, t) = 0$, являясь решением следующей краевой задачи со свободной границей $\Sigma(t)$:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \vec{r} \in Q(t), \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu}, \quad \vec{r} \in S(t), \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu} - \frac{\zeta_t}{|\nabla \zeta|^2}, \quad \vec{r} \in \Sigma(t), \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 - \nabla \Phi \cdot \vec{v}_0 + U = 0, \quad \vec{r} \in \Sigma(t), \quad (1d)$$

$$\int_{Q(t)} dQ = \text{const}. \quad (1e)$$

Здесь $\vec{\nu}$ – орт внешней нормали к поверхности области $Q(t)$, занятой жидкостью; $S(t) = S_1(t) + S_2$ – смоченная боковая стенка и дно соответственно; $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор точек объема жидкости $Q(t)$ в связанной с баком системе координат; U – потенциал сил земного тяготения, заданный в неинерциальной системе координат $Oxyz$. Интегральное соотношение (1e) выражает условие сохранения объема жидкости и является необходимым условием разрешимости задачи Неймана (1a)–(1c).

Используя интеграл Лагранжа–Коши (уравнение Бернулли), который принимает следующий вид в связанной системе координат $Oxyz$ [6, 8, 19]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 - \nabla \Phi \cdot \vec{v}_0 + gx + \frac{p - p_0}{\rho} = 0 \quad (2)$$

(p_0 – постоянное атмосферное давление газа над свободной поверхностью жидкости), можно найти поле давления в объеме $Q(t)$.

Эволюционная задача со свободной границей (1a)–(1d) требует подчинения ее решения начальным условиям, которые состоят в задании начального профиля свободной поверхности $\Sigma(t_0)$ и распределения скоростей на $\Sigma(t)$ в начальный момент времени $t = t_0$:

$$\zeta(x, y, z, t_0) = \zeta_0(x, y, z),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma(t_0)} = \Phi_0(x, y, z),$$

где $\zeta_0(x, y, z)$ и $\Phi_0(x, y, z)$ – известные функции.

Для определения и анализа установившихся решений в случае гармонического возбуждения бака может быть использовано условие периодичности по времени для функций ζ и Φ .

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Техника неконформных отображений

В рамках декартовой параметризации невозможно дать подходящее представление свободной поверхности. Поэтому, следуя работам [8, 17], с помощью соотношений

$$x = x_1, \quad y = x_1 x_2 \cos x_3, \quad z = x_1 x_2 \sin x_3 \quad (3)$$

введем в рассмотрение криволинейную систему координат $Ox_1 x_2 x_3$ – такую, что переменная $x_3 = \eta$ представляет собой полярный угол в плоскости Oyz .

Как показано на рис. 3, преобразование (3) преобразует меридиональное сечение G невозмущенного объема жидкости в меридиональное сечение G^* – прямоугольник в плоскости $Ox_1 x_2$, имеющих стороны $h = x_{10} - x_0$ и $x_{20} = \text{tg } \theta_0$. Таким образом, усеченный конический объем невозмущенного объема жидкости трансформируется в новой системе в параллелепипед

$$x_0 \leq x_1 \leq x_{10}, \quad 0 \leq x_2 \leq x_{20}, \quad \leq x_3 \leq 2\pi.$$

2.2. Собственные частоты и формы

Прежде всего, следует построить приближенное аналитическое решение спектральной краевой задачи о собственных формах и частотах колебаний жидкости:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, \quad \vec{r} \in Q_0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} &= 0, \quad \vec{r} \in S_0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} &= \varkappa\varphi, \quad \vec{r} \in \Sigma_0, \\ \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} dS &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Нелинейные модальные методы требуют, чтобы такое решение задачи (4) точно удовлетворяло уравнению Лапласа и условию Неймана на стенках сосуда. Кроме того, оно должно быть аналитически продолжаемым за пределы области через невозмущенную свободную границу, причем такое продолжение должно удовлетворять условия непротекания на стенках бака выше Σ_0 . Поскольку мы используем преобразование (3), то приближенное решение задачи необходимо определять в криволинейной системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Представим собственную функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ в виде

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \psi_m(x_1, x_2) \begin{Bmatrix} \sin mx_3 \\ \cos mx_3 \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

и будем следовать выкладкам работы [17]. Можно убедиться, что трансформированная задача (4) допускает разделение переменных (x_1, x_2) и x_3 , порождая следующее m -параметрическое семейство спектральных задач относительно функции $\psi_m(x_1, x_2)$ в двумерной области G^* :

$$p \frac{\partial^2\psi_m}{\partial x_1^2} + 2q \frac{\partial^2\psi_m}{\partial x_1 \partial x_2} + s \frac{\partial^2\psi_m}{\partial x_2^2} + \quad (6a)$$

$$+ d \frac{\partial\psi_m}{\partial x_2} - m^2 c \psi_m = 0 \quad \text{в } G^*,$$

$$s \frac{\partial\psi_m}{\partial x_2} + q \frac{\partial\psi_m}{\partial x_1} = 0 \quad \text{на } L_1^*, \quad (6b)$$

$$p \frac{\partial\psi_m}{\partial x_1} + q \frac{\partial\psi_m}{\partial x_2} = \varkappa_m p \psi_m \quad \text{на } L_0^*, \quad (6c)$$

$$p \frac{\partial\psi_m}{\partial x_1} + q \frac{\partial\psi_m}{\partial x_2} = 0 \quad \text{на } L_2^*, \quad (6d)$$

$$|\psi_m(x_1, 0)| < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (6e)$$

$$\int_0^{x_{20}} \psi_0 x_2 dx_2 = 0, \quad (6f)$$

где $G^* = \{(x_1, x_2) : x_0 \leq x_1 \leq x_{10}, 0 \leq x_2 \leq x_{20}\}$; $p = x_1^2 x_2$; $q = -x_1 x_2^2$; $s = x_2(x_2^2 + 1)$; $d = 1 + 2x_2^2$; $c = 1/x_2$, а L_0^* , L_1^* и L_2^* – соответствующие части границы области G^* (см. рис. 3).

Можно также показать, что решение спектральной задачи (6) совпадает с экстремальными точками функционала

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\psi_m) &= \frac{1}{\int_{L_0^*} p \psi_m^2 dx_2} \times \\ &\times \int_{G^*} \left[p \left(\frac{\partial\psi_m}{\partial x_1} \right)^2 + 2q \frac{\partial\psi_m}{\partial x_1} \frac{\partial\psi_m}{\partial x_2} + \right. \\ &\left. + s \left(\frac{\partial\psi_m}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{m^2}{x_2} \psi_m^2 \right] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (7)$$

для допустимых достаточно гладких функций ψ_m , удовлетворяющих условию (6e).

С использованием описанной в [7] аналитической процедуры в работе [18] продемонстрирована возможность построения собственных функций задачи (6). При этом использован вариационный метод, основанный на функционале (7) и набор базисных функций $\{w_k^{(m)}, \bar{w}_k^{(m)}\}$, которые аналитически удовлетворяют уравнению (6a) в плоскости Ox_1x_2 (кроме начала координат) и краевому условию (6b) для $x_1 > 0$.

Таким образом, удается представить в $Ox_1x_2x_3$ собственные моды в следующей форме:

$$\begin{aligned} \psi_{mn}(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \left[\sum_{k=1}^{q_1} a_k^{(m)} w_k^{(m)} + \sum_{l=1}^{q_2} \bar{a}_l^{(m)} \bar{w}_l^{(m)} \right] \times \\ &\times \begin{Bmatrix} \sin mx_3 \\ \cos mx_3 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Собственные формы на невозмущенной свободной поверхности определяются по формулам

$$f_{mn}(x_2, x_3) = \frac{\sigma_{mn}}{g} \psi_{mn}(x_{10}, x_2, x_3), \quad (9)$$

где собственные частоты $\sigma_{mn} = \sqrt{g \varkappa_{mn} / r_0}$. Функции $w_k^{(m)}(x_1, x_2)$ и $\bar{w}_k^{(m)}(x_1, x_2)$ представляются в нормированном виде:

$$w_k^{(m)}(x_1, x_2) = N_k^{(m)} x_1^{\nu_{mk}} T_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2), \quad (10)$$

$$\bar{w}_k^{(m)}(x_1, x_2) = \bar{N}_k^{(m)} x_1^{-1-\nu_{mk}} \bar{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2),$$

где $T_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$ и $\bar{T}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$ – функции, базирующиеся на присоединенных функциях Лежандра первого

рода $P_\nu^{(m)}(\mu)$ (см. [7]); $N_k^{(m)}$ и $\bar{N}_k^{(m)}$ – нормирующие множители, которые выбираются из условия

$$\|w_k^{(m)}\|_{L_2^*+L_0^*}^2 = \|\bar{w}_k^{(m)}\|_{L_2^*+L_0^*}^2 = N_k^{(m)} = \bar{N}_k^{(m)} = 1.$$

2.3. Общая нелинейная модальная система Луковского

В криволинейной системе координат уравнение свободной поверхности допускает вид $x_1 = f^*(x_2, x_3, t)$. Перенумеровывая функции (9), функцию $f^*(x_2, x_3, t)$ можно записать в виде обобщенного ряда Фурье:

$$f^*(x_2, x_3, t) = x_{10} + \beta_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(x_2, x_3). \quad (11)$$

Здесь $\beta_i(t)$ – коэффициенты Фурье, зависящие от времени и имеющие смысл обобщенных координат задачи (они характеризуют отклонение свободной поверхности жидкости от невозмущенного положения).

Особенность нецилиндрических баков состоит в том, что собственные функции (9) не гарантируют выполнение нелинейного условия сохранения объема (1e). Поэтому в модальном представлении (11) должна содержаться функция $\beta_0(t)$, которая параметрически зависит от β_i , $i \geq 1$ и выбирается из необходимости удовлетворения условия (1e). Процедура определения $\beta_0(t)$ для исследуемого случая описана в приложении.

В криволинейной системе координат потенциал скоростей допускает модальное решение

$$\Phi^*(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \sum_{j=1}^{\infty} R_j(t) \phi_j(x_1, x_2, x_3), \quad (12)$$

где ϕ_j – собственные функции (8), перенумерованные относительно одного индекса j . В этом модальном решении $R_j(t)$ – обобщенные координаты, которые характеризуют возмущение потенциала скорости.

В работах [6, 12] показано, что использование вариационного принципа Бейтмена – Люка в криволинейной системе координат позволяет получить модальную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\beta_i(t)$ и $R_j(t)$:

$$\frac{dA_n}{dt} - \sum_k A_{nk} R_k = 0, \quad (13a)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

$$\sum_n \dot{R}_n \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2} \sum_{nk} \frac{\partial A_{nk}}{\partial \beta_i} R_n R_k + (\dot{v}_{01} - g_1) \frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} + (\dot{v}_{02} - g_2) \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i} +$$

$$+(\dot{v}_{03} - g_3) \frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots$$

Здесь

$$A_n = \rho \int_D \int_0^{f^*} \phi_n J^* dx^1 dx_2 dx_3; \quad (14)$$

$$A_{nk} = \rho \int_D \int_0^{f^*} (\nabla^* \phi_n^*, \nabla^* \phi_k^*) J^* dx^1 dx_2 dx_3;$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0^*} f_i^2 J_{x_1=f^*}^* dx_2 dx_3;$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0^*} y(x_1, x_2, x_3) f_i J_{x_1=f^*}^* dx_2 dx_3; \quad (15)$$

$$\frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0^*} z(x_1, x_2, x_3) f_i J_{x_1=f^*}^* dx_2 dx_3;$$

$J^* = x_1^2 x_2$ – Якобиан перехода от системы $Oxyz$ к системе $Ox_1x_2x_3$.

2.4. Конечномерная система нелинейных асимптотических модальных уравнений

Рассмотрим общие модальные уравнения (13)–(15) при условии, что выполняется асимптотика Моисеева – Нариманова [13] относительно обобщенных координат β_i и R_i . Это позволяет упростить исходную систему и перейти к конечномерным нелинейным модальным уравнениям, которые удерживают лишь те формы, которые дают наибольший вклад в движение жидкости [20].

Рассмотрим колебания бака вблизи первой собственной частоты, и с амплитудой, достаточно малой по отношению к его характерному размеру. Имеются две собственные формы, которые характеризуются первой собственной частотой и отличаются лишь азимутальным поворотом на $\pi/2$. В соответствии с работами Моисеева и Нариманова, в дальнейшем предполагаем, что безразмерные амплитуды указанных собственных форм имеют

порядок $O(\epsilon)$, а безразмерная амплитуда возмущений бака имеет порядок $O(\epsilon^3)$, где $\epsilon \ll 1$. Элементарный анализ, основанный на тригонометрических зависимостях по координате x_3 , показывает, что в представлении (5) осесимметричные собственные формы и собственные формы, соответствующие $m=2$, характеризуются вторым порядком малости $O(\epsilon^2)$. При этом наиболее энергетически важны первые из каждой такой серии мод второго порядка малости. К формам третьего порядка относятся моды с $m=3$. Предположим, что наиболее энергетически важными среди них будут две моды с $n=1$.

В результате этих рассуждений получим семь наиболее важных собственных форм первого, второго и третьего порядка. Они соответствуют обобщенным координатам $\beta_i(t)$ и $R_j(t)$, удерживаемым в следующем переписанном модальном решении (11) и (12):

$$f^*(x_2, x_3, t) = \sum_{i=0}^3 \left(p_i(t) \cos(ix_3) + r_i(t) \sin(ix_3) \right) f_i(x_2) + \beta_0(t) + x_{10}, \quad (16)$$

$$\Phi^*(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{j=0}^3 \left(P_j(t) \cos(jx_3) + R_j(t) \sin(jx_3) \right) \psi_{j1}(x_2, x_3).$$

Здесь для удобства введены следующие обозначения:

$$\beta_0 = p_0, \quad \beta_1 = r_1, \quad \beta_2 = p_1,$$

$$\beta_3 = r_2, \quad \beta_4 = p_2,$$

$$\beta_5 = r_3, \quad \beta_6 = p_3,$$

$$Z_1 = P_0, \quad Z_2 = R_1, \quad Z_3 = P_1,$$

$$Z_4 = R_2, \quad Z_5 = P_2,$$

$$Z_6 = R_3, \quad Z_7 = P_3.$$

После подстановки уравнений (16) в общую модальную систему (13) и проведения асимптотической процедуры с удержанием только членов порядка $O(\epsilon^3)$ получаем следующую семимодовую модальную систему, описывающую нелинейные колебания в срезанных конических баках:

$$L_0 = \ddot{p}_0 + \sigma_0^2 p_0 + \mathbf{d}_8(\dot{p}_1^2 + \dot{r}_1^2) + \mathbf{d}_{10}(\ddot{p}_1 p_1 + \ddot{r}_1 r_1) + \mathbf{g}_0(p_1^2 + r_1^2)\sigma_0^2 = 0, \quad (17a)$$

$$L_1 = \ddot{r}_1 + \sigma_1^2 r_1 + \mathbf{d}_5(\ddot{r}_1 p_0 + \dot{r}_1 \dot{p}_0) + \mathbf{d}_1 r_1(\ddot{p}_1 p_1 + \ddot{r}_1 r_1 + \dot{p}_1^2 + \dot{r}_1^2) + \mathbf{d}_2(p_1(\ddot{r}_1 p_1 - \ddot{p}_1 r_1) + 2\dot{p}_1(\dot{r}_1 p_1 - \dot{p}_1 r_1)) + \mathbf{d}_3(\ddot{p}_1 r_2 - \ddot{r}_1 p_2 + \dot{p}_1 \dot{r}_2 - \dot{p}_2 \dot{r}_1) + \mathbf{d}_4(\ddot{r}_2 p_1 - \ddot{p}_2 r_1) + \mathbf{d}_6 \ddot{p}_0 r_1 + \sigma_1^2(\mathbf{g}_1 p_0 r_1 + \mathbf{g}_2(p_1 r_2 - p_2 r_1)) + \mathbf{g}_3(p_1^2 + r_1^2)r_1 + \Lambda \dot{v}_{03} = 0, \quad (17b)$$

$$L_2 = \ddot{p}_1 + \sigma_1^2 p_1 + \mathbf{d}_5(\ddot{p}_1 p_0 + \dot{p}_1 \dot{p}_0) + \mathbf{d}_1 p_1(\ddot{p}_1 p_1 + \ddot{r}_1 r_1 + \dot{p}_1^2 + \dot{r}_1^2) + \mathbf{d}_2(r_1(\ddot{p}_1 r_1 - \ddot{r}_1 p_1) + 2\dot{r}_1(\dot{p}_1 r_1 - \dot{r}_1 p_1)) + \mathbf{d}_3(\ddot{p}_1 p_2 + \ddot{r}_1 r_2 + \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \dot{r}_1 \dot{r}_2) + \mathbf{d}_4(\ddot{p}_2 p_1 + \ddot{r}_2 r_1) + \mathbf{d}_6 \ddot{p}_0 p_1 + \sigma_1^2(\mathbf{g}_1 p_0 p_1 + \mathbf{g}_2(p_1 p_2 + r_1 r_2)) + \mathbf{g}_3(p_1^2 + r_1^2)p_1 = 0, \quad (17c)$$

$$L_3 = \ddot{r}_2 + \sigma_2^2 r_2 + 2\sigma_2^2 \mathbf{g}_4 p_1 r_1 + 2\mathbf{d}_7 \dot{p}_1 \dot{r}_1 + \mathbf{d}_9(\ddot{p}_1 r_1 + \ddot{r}_1 p_1) = 0, \quad (17d)$$

$$L_4 = \ddot{p}_2 + \sigma_2^2 p_2 + \sigma_2^2 \mathbf{g}_4(p_1^2 - r_1^2) + \mathbf{d}_7(\dot{p}_1^2 - \dot{r}_1^2) + \mathbf{d}_9(\dot{p}_1 p_1 - \dot{r}_1 r_1) = 0, \quad (17e)$$

$$L_5 = \ddot{r}_3 + \sigma_3^2 r_3 + \mathbf{d}_{15}(\dot{p}_1 \dot{r}_2 + \dot{p}_2 \dot{r}_1) + \sigma_3^2(\mathbf{g}_5(p_1 r_2 + p_2 r_1) + \mathbf{g}_6 r_1(3p_1^2 - r_1^2)) + \mathbf{d}_{11}(\ddot{r}_1(p_1^2 - r_1^2) + 2\ddot{p}_1 p_1 r_1) + \mathbf{d}_{12}(r_1(\dot{p}_1^2 - \dot{r}_1^2) + 2\dot{p}_1 \dot{r}_1 p_1) + \mathbf{d}_{13}(\ddot{p}_1 r_2 + \ddot{r}_1 p_2) + \mathbf{d}_{14}(\ddot{p}_2 r_1 + \ddot{r}_2 p_1) = 0, \quad (17f)$$

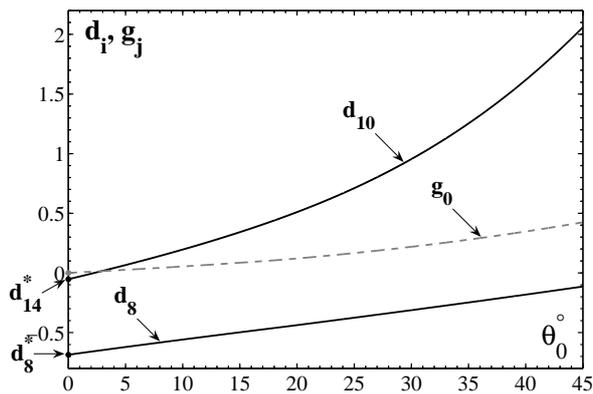


Рис. 4. Зависимость коэффициентов d_i, g_j уравнения L_0 от угла θ_0 ($m=0, i=8, 10, j=0$)

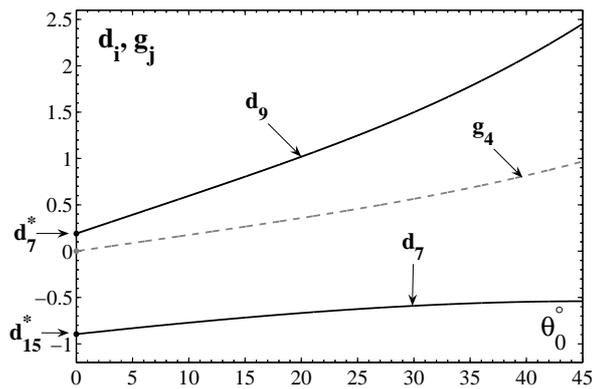


Рис. 6. Зависимость коэффициентов d_i, g_j уравнений L_3, L_4 от угла θ_0 ($m=2, i=7, 9, j=2$)

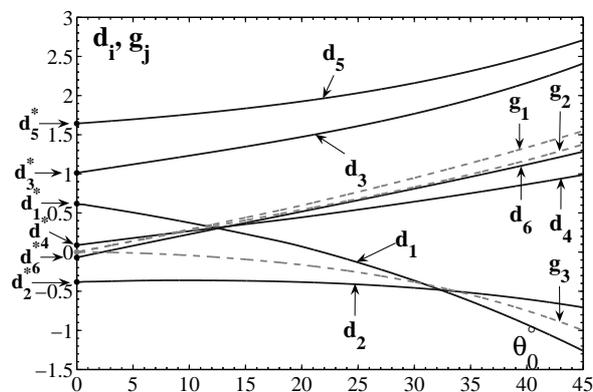


Рис. 5. Зависимость коэффициентов d_i, g_j уравнений L_1, L_2 от угла θ_0 ($m=1, i=1, \dots, 6, j=1, 2, 3$)

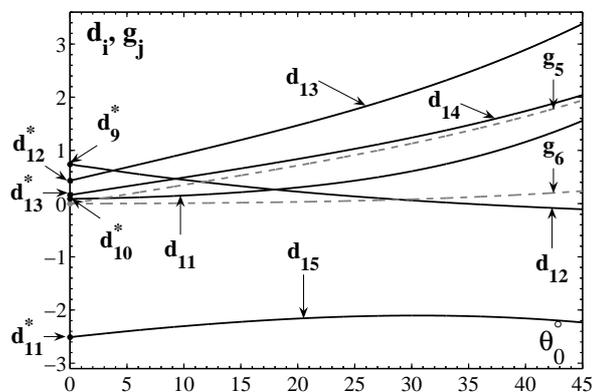


Рис. 7. Зависимость коэффициентов d_i, g_j уравнений L_5, L_6 от угла θ_0 ($m=3, i=11, \dots, 15, j=5, 6$)

$$\begin{aligned}
 L_6 = & \ddot{p}_3 + \sigma_3^2 p_3 + d_{15}(\dot{p}_1 \dot{p}_2 - \dot{r}_1 \dot{r}_2) + \\
 & + \sigma_3^2 (g_5(p_1 p_2 - r_1 r_2) + g_6 p_1 (p_1^2 - 3r_1^2)) + \\
 & + d_{11}(\ddot{p}_1 (p_1^2 - r_1^2) - 2\dot{r}_1 p_1 r_1) + \\
 & + d_{12}(p_1 (\dot{p}_1^2 - \dot{r}_1^2) - 2\dot{p}_1 \dot{r}_1 r_1) + \\
 & + d_{13}(\ddot{p}_1 p_2 - \ddot{r}_1 r_2) + d_{14}(\ddot{p}_2 p_1 - \ddot{r}_2 r_1) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{17g}$$

Детали вывода даны в приложении. Коэффициенты модальной системы (17) задаются выражениями (46).

Громоздкая процедура вывода асимптотической модальной требует особой тщательности в выкладках и сравнения полученных результатов с имеющимися в литературе данными для предельных случаев. В их качестве можно рассматривать вертикальный круговой цилиндр ($\theta_0 \rightarrow 0$) или не-

усеченный конус ($r_1 \rightarrow 0$). Для последнего уравнения (17a) – (17e) переходят в пятимодовую модальную систему, выведенную в работе [17]. Расчеты также показывают, что соответствующие гидродинамические коэффициенты принимают значения, затабулированные в [17].

На рис. 4–7 даны зависимости нормированных величин коэффициентов d_i и g_j от угла θ_0 . Предельные значения на вертикальной оси соответствуют нулевому углу конусности $\theta_0 = 0$. Они должны совпадать с величинами нормированных гидродинамических коэффициентов для кругового цилиндра, полученными в численно-аналитическом виде в [10] с использованием точных решений базисной спектральной краевой задачи в терминах функций Бесселя (они обозначены на рисунках как d_i^* и отложены на вертикальной оси). Из графиков видно, что вычисленные предельные значения коэффициентов для кониче-

ских баков действительно совпадают с результатами Луковского [10].

Заметим, что в уравнениях (17) имеются коэффициенты g_j , которые выражают так называемую геометрическую нелинейность, связанную с неперпендикулярностью стенок и отсутствующие в уравнениях для кругового цилиндрического бака. Графики показывают, что значения g_j стремятся к нулю, когда стремится к нулю угол полураствора конуса.

2.5. Безразмерные гидродинамические коэффициенты

Выбрав в качестве характерного линейного размера радиус свободной поверхности r_0 , все гидродинамические коэффициенты модальных уравнений можно записать в размерном виде, используя формулы

$$\begin{aligned} \kappa_{m1}^* &= r_0 \kappa_{m1}, \quad (\sigma_{m1}^*)^2 = r_0 \sigma_{m1}^2, \quad m = 0, \dots, 3, \\ d_i^* &= \begin{cases} r_0 d_i, & \text{при } i = 1, 2, 9, 10, \\ r_0^2 d_i, & \text{при } i = 3, \dots, 8, 11, \dots, 15, \end{cases} \\ g_i^* &= \begin{cases} r_0 g_i, & \text{при } i = 0, 1, 2, 4, 5, \\ r_0^2 g_i, & \text{при } i = 3, 6. \end{cases} \end{aligned}$$

В табл. 1–3 приведены значения безразмерных гидродинамических коэффициентов μ_m , σ_m , d_i и g_j ($m=0, 1, 2, 3$, $i=1, \dots, 15$, $j=0, \dots, 6$) при $q_1=q_2=12$ для трех заданных углов полураствора конических полостей.

3. УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ

3.1. Периодические решения

Рассмотрим вынужденные установившиеся резонансные колебания жидкости при заданном внешнем гармоническом возмущении бака:

$$v_{03} = -H\sigma \cos(\sigma t).$$

Анализ установившихся вынужденных колебаний жидкости связан с отысканием периодических решений системы (17). Представим обобщенные координаты $r_1(t)$ и $p_1(t)$ в виде отрезков ряда Фурье с неопределенными коэффициентами [3, 6]:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_{2k-1} \cos k\sigma t + A_{2k} \sin k\sigma t), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (B_{2k-1} \cos k\sigma t + B_{2k} \sin k\sigma t), \end{aligned}$$

где, в соответствии с выбранной асимптотикой, доминантный вклад дает основная гармоника:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= A_1 \cos \sigma t + A_2 \sin \sigma t + o(\epsilon), \\ p_1(t) &= B_1 \cos \sigma t + B_2 \sin \sigma t + o(\epsilon). \end{aligned} \tag{19}$$

Коэффициенты разложений обобщенных координат $p_0(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$, $r_3(t)$ и $p_3(t)$ – функции доминантных амплитуд A_1 , A_2 , B_1 и B_2 представлений обобщенных координат $r_1(t)$ и $p_1(t)$. В силу линейности первого и четырех последних уравнений системы (17) относительно $p_0(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$, $r_3(t)$, $p_3(t)$ для них можно найти явные выражения:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= -(A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2)o_0^{(0)} - \\ &= -\frac{1}{2}(A_1^2 - A_2^2 + B_1^2 - B_2^2)o_0^{(2)} \cos 2\sigma t - \\ &= -(A_1 A_2 + B_1 B_2)o_0^{(2)} \sin 2\sigma t + O(\epsilon^2); \end{aligned} \tag{20a}$$

$$\begin{aligned} r_2(t) &= -2(A_1 B_1 + A_2 B_2)o_2^{(0)} - \\ &= -(A_1 B_1 - A_2 B_2)o_2^{(2)} \cos 2\sigma t - \\ &= -(A_1 B_2 + A_2 B_1)o_2^{(2)} \sin 2\sigma t + O(\epsilon^2); \end{aligned} \tag{20b}$$

$$\begin{aligned} p_2(t) &= (A_1^2 + A_2^2 - B_1^2 - B_2^2)o_2^{(0)} + \\ &= \frac{1}{2}(A_1^2 - A_2^2 - B_1^2 + B_2^2)o_2^{(2)} \cos 2\sigma t + \\ &= (A_1 A_2 - B_1 B_2)o_2^{(2)} \sin 2\sigma t + O(\epsilon^2); \end{aligned} \tag{20c}$$

Табл. 1. Безразмерные гидродинамические коэффициенты μ_m и σ_m ($m=0, 1, 2, 3$)

r_1	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
$\theta_0 = 30^\circ$								
0.0	0.56525	0.65966	0.28056	0.16043	5.76305	3.57717	4.71185	5.58554
0.1	0.56525	0.65966	0.28056	0.16043	5.76305	3.57717	4.71185	5.58554
0.2	0.56525	0.65967	0.28056	0.16043	5.76305	3.57714	4.71185	5.58554
0.3	0.56525	0.65991	0.28056	0.16043	5.76305	3.57670	4.71185	5.58554
0.4	0.56525	0.66167	0.28057	0.16043	5.76304	3.57345	4.71178	5.58554
0.5	0.56536	0.66984	0.28076	0.16043	5.76283	3.55848	4.71089	5.58549
0.6	0.56683	0.69843	0.28232	0.16054	5.75984	3.50735	4.70333	5.58451
0.7	0.58005	0.78418	0.29180	0.16189	5.73240	3.36515	4.65787	5.57244
0.8	0.66814	1.03346	0.33860	0.17369	5.54927	3.02679	4.44604	5.46716
0.9	1.19939	1.93605	0.57636	0.26449	4.64392	2.30658	3.65433	4.77885
$\theta_0 = 45^\circ$								
0.0	0.48943	0.78540	0.31606	0.17496	5.35814	3.13209	4.16389	4.95715
0.1	0.48943	0.78542	0.31606	0.17496	5.35814	3.13207	4.16389	4.95715
0.2	0.48943	0.78597	0.31606	0.17496	5.35814	3.13139	4.16388	4.95715
0.3	0.48945	0.78971	0.31610	0.17496	5.35811	3.12678	4.16374	4.95715
0.4	0.48978	0.80375	0.31652	0.17497	5.35752	3.10968	4.16233	4.95704
0.5	0.49251	0.84281	0.31899	0.17517	5.35256	3.06344	4.15401	4.95578
0.6	0.50768	0.93635	0.32942	0.17666	5.32476	2.96015	4.11909	4.94620
0.7	0.57394	1.14905	0.36590	0.18487	5.20605	2.75751	4.00211	4.89322
0.8	0.83575	1.65940	0.48613	0.22360	4.79903	2.39560	3.67129	4.65960
0.9	1.95726	3.30702	0.95600	0.42007	3.70339	1.77365	2.86028	3.81735
$\theta_0 = 60^\circ$								
0.0	0.49908	1.08441	0.41896	0.22673	4.65246	2.57838	3.45161	4.12207
0.1	0.49908	1.08468	0.41896	0.22673	4.65246	2.57820	3.45160	4.12207
0.2	0.49910	1.08836	0.41899	0.22673	4.65243	2.57566	3.45155	4.12206
0.3	0.49941	1.10408	0.41938	0.22674	4.65200	2.56491	3.45078	4.12202
0.4	0.50176	1.14718	0.42169	0.22689	4.64866	2.53609	3.44623	4.12142
0.5	0.51316	1.24431	0.43079	0.22798	4.63237	2.47452	3.42836	4.11722
0.6	0.55643	1.44596	0.45947	0.23327	4.57210	2.35959	3.37345	4.09660
0.7	0.70643	1.86190	0.54127	0.25447	4.38561	2.16424	3.22978	4.01597
0.8	1.22954	2.79704	0.77645	0.33492	3.90505	1.85268	2.89929	3.74783
0.9	3.29627	5.70191	1.61942	0.69100	2.90450	1.35765	2.21177	2.98506

$$\begin{aligned}
 r_3(t) = & (A_1(A_1^2 + A_2^2 - 3B_1^2 - B_2^2) - \\
 & - 2A_2B_1B_2)o_3^{(1)} \cos \sigma t + \\
 & + (A_2(A_1^2 + A_2^2 - B_1^2 - 3B_2^2) - \\
 & - 2A_1B_1B_2)o_3^{(1)} \sin \sigma t + \\
 & + (A_1(A_1^2 - 3A_2^2 - 3B_1^2 + 3B_2^2) + \\
 & + 6A_2B_1B_2)o_3^{(3)} \cos 3\sigma t + \\
 & + (A_2(3A_1^2 - A_2^2 - 3B_1^2 + 3B_2^2) - \\
 & - 6A_1B_1B_2)o_3^{(3)} \sin 3\sigma t + O(\epsilon^3);
 \end{aligned}
 \tag{20d}$$

$$\begin{aligned}
 p_3(t) = & (B_1(3A_1^2 + A_2^2 - B_1^2 - B_2^2) + \\
 & + 2A_1A_2B_2)o_3^{(1)} \cos \sigma t + \\
 & + (B_2(A_1^2 + 3A_2^2 - B_1^2 - B_2^2) + \\
 & + 2A_1A_2B_1)o_3^{(1)} \sin \sigma t + \\
 & + (B_1(3A_1^2 - 3A_2^2 - B_1^2 + 3B_2^2) - \\
 & - 6A_1A_2B_2)o_3^{(3)} \cos 3\sigma t + \\
 & + (B_2(3A_1^2 - 3A_2^2 - 3B_1^2 + B_2^2) + \\
 & + 6A_1A_2B_1)o_3^{(3)} \sin 3\sigma t + O(\epsilon^3).
 \end{aligned}
 \tag{20e}$$

Табл. 2. Безразмерные гидродинамические коэффициенты d_i ($i = 1, \dots, 15$)

r_i	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}
$\theta_0 = 30^\circ$															
0.0	-0.31755	-0.45374	1.76564	0.63550	2.15626	0.81179	-0.58151	-0.31082	1.49420	0.94738	0.59258	0.04699	2.09172	1.23615	-2.09096
0.1	-0.31755	-0.45374	1.76564	0.63550	2.15626	0.81179	-0.58151	-0.31082	1.49420	0.94738	0.59258	0.04699	2.09172	1.23615	-2.09096
0.2	-0.31754	-0.45374	1.76563	0.63548	2.15626	0.81177	-0.58155	-0.31085	1.49420	0.94738	0.59259	0.04704	2.09172	1.23615	-2.09101
0.3	-0.31733	-0.45359	1.76556	0.63524	2.15628	0.81142	-0.58224	-0.31139	1.49418	0.94731	0.59280	0.04805	2.09170	1.23614	-2.09192
0.4	-0.31575	-0.45251	1.76505	0.63347	2.15641	0.80879	-0.58734	-0.31538	1.49391	0.94675	0.59435	0.05562	2.09159	1.23611	-2.09876
0.5	-0.30811	-0.44726	1.76289	0.62529	2.15726	0.79678	-0.61114	-0.33393	1.49183	0.94403	0.60186	0.09239	2.09099	1.23569	-2.13167
0.6	-0.27806	-0.42657	1.75731	0.59733	2.16329	0.75689	-0.69595	-0.40016	1.47772	0.93262	0.63131	0.23791	2.08732	1.23136	-2.25619
0.7	-0.16037	-0.34523	1.75300	0.51923	2.20527	0.65310	-0.96010	-0.60774	1.39535	0.88293	0.74553	0.81412	2.05671	1.19595	-2.68359
0.8	0.39082	0.04081	1.79687	0.31993	2.45250	0.42426	-1.76572	-1.24051	0.97647	0.65623	1.33190	3.68530	1.79517	0.93805	-4.19356
0.9	4.61221	3.03007	2.13607	-0.31200	3.74133	-0.21207	-4.63566	-3.36192	-1.04805	-0.34231	7.69228	29.0456	-0.28513	-0.82751	-10.6016
$\theta_0 = 45^\circ$															
0.0	-1.26078	-0.70638	2.40922	0.98722	2.70932	1.28368	-0.54021	-0.11391	2.45324	2.05995	1.55725	-0.10632	3.37971	2.04057	-2.23355
0.1	-1.26079	-0.70638	2.40921	0.98720	2.70931	1.28365	-0.54026	-0.11395	2.45325	2.05995	1.55727	-0.10625	3.37972	2.04057	-2.23362
0.2	-1.26092	-0.70615	2.40905	0.98664	2.70913	1.28278	-0.54183	-0.11528	2.45356	2.06000	1.55781	-0.10391	3.38011	2.04060	-2.23567
0.3	-1.26175	-0.70453	2.40803	0.98284	2.70797	1.27691	-0.55256	-0.12436	2.45544	2.06026	1.56154	-0.08757	3.38278	2.04074	-2.24995
0.4	-1.26376	-0.69789	2.40482	0.96887	2.70455	1.25551	-0.59303	-0.15879	2.46028	2.06035	1.57598	-0.02259	3.39265	2.04093	-2.30608
0.5	-1.26117	-0.67499	2.39944	0.93186	2.70207	1.20042	-0.70771	-0.25774	2.46209	2.05421	1.61918	0.18536	3.41743	2.03846	-2.47581
0.6	-1.21147	-0.59601	2.40107	0.85154	2.73038	1.08908	-0.99201	-0.50925	2.42045	2.00866	1.74066	0.83990	3.45531	2.01390	-2.93469
0.7	-0.90355	-0.29957	2.44982	0.69375	2.91407	0.89962	-1.66804	-1.11597	2.17863	1.80106	2.13782	3.17667	3.41958	1.86501	-4.15750
0.8	0.74910	1.00747	2.66483	0.36171	3.64449	0.56386	-3.31352	-2.49856	1.23471	1.11954	4.13517	13.8202	2.77626	1.12771	-7.61590
0.9	13.4906	10.2771	3.46553	-0.67481	6.30983	-0.46461	-8.32834	-6.11560	-2.33431	-0.78501	24.7245	95.5576	-1.21793	-2.23436	-19.3469
$\theta_0 = 60^\circ$															
0.0	-3.72048	-1.49321	3.66397	1.61035	3.84923	2.02449	-0.57367	0.21702	4.16819	4.39885	4.44509	-0.29165	5.71520	3.46734	-2.79849
0.1	-3.72104	-1.49317	3.66388	1.61008	3.84902	2.02407	-0.57440	0.21638	4.16847	4.39898	4.44545	-0.29035	5.71553	3.46737	-2.79943
0.2	-3.72901	-1.49258	3.66270	1.60618	3.84621	2.01810	-0.58489	0.20716	4.17223	4.40077	4.45069	-0.27158	5.72019	3.46769	-2.81306
0.3	-3.76109	-1.48918	3.65835	1.58995	3.83548	1.99337	-0.62980	0.16719	4.18581	4.40692	4.47325	-0.18749	5.74002	3.46899	-2.87390
0.4	-3.83539	-1.47350	3.65031	1.54777	3.81490	1.93052	-0.75461	0.05273	4.21062	4.41375	4.53670	0.07251	5.79243	3.47096	-3.05384
0.5	-3.93956	-1.40793	3.64657	1.46188	3.80583	1.80960	-1.04391	-0.22627	4.22256	4.38788	4.68879	0.1501	5.89445	3.46383	-3.50368
0.6	-3.92603	-1.15448	3.68032	1.30908	3.90323	1.61883	-1.67133	-0.86477	4.11968	4.20647	5.06183	3.07967	6.02487	3.39298	-4.56945
0.7	-3.12845	-0.19326	3.84219	1.04415	4.38994	1.34767	-3.01657	-2.23318	3.59177	3.55199	6.23790	11.02506	5.96043	3.02762	-7.14313
0.8	1.71610	3.89469	4.33984	0.50209	5.98019	0.86045	-6.00810	-4.84466	1.80870	1.95742	12.4192	45.7406	4.64296	1.51931	-13.7605
0.9	39.8372	32.0718	5.88083	-1.24155	11.0849	-0.84727	-14.7245	-11.0530	-4.37143	-1.46562	75.9701	298.8584	-2.53756	-4.38058	-34.4568

Табл. 3. Безразмерные гидродинамические коэффициенты g_j ($j=0, 1, \dots, 6$)

r_1	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
$\theta_0 = 30^\circ$							
0.0	0.21045	0.93612	0.82877	-0.37319	0.56156	1.12590	0.07939
0.1	0.21045	0.93612	0.82877	-0.37319	0.56156	1.12590	0.07939
0.2	0.21045	0.93611	0.82877	-0.37319	0.56157	1.12590	0.07939
0.3	0.21045	0.93598	0.82875	-0.37324	0.56161	1.12594	0.07940
0.4	0.21040	0.93499	0.82856	-0.37365	0.56195	1.12622	0.07946
0.5	0.21019	0.93055	0.82777	-0.37549	0.56344	1.12758	0.07972
0.6	0.20938	0.91653	0.82581	-0.38164	0.56803	1.13259	0.08058
0.7	0.20646	0.88630	0.82431	-0.39756	0.57812	1.14735	0.08280
0.8	0.19705	0.85642	0.83581	-0.42905	0.59116	1.17817	0.08664
0.9	0.17778	0.89285	0.88571	-0.47153	0.59266	1.19767	0.08840
$\theta_0 = 45^\circ$							
0.0	0.42446	1.54818	1.37670	-1.00000	0.96784	1.94148	0.23640
0.1	0.42446	1.54817	1.37669	-1.00001	0.96785	1.94148	0.23640
0.2	0.42442	1.54762	1.37657	-1.00037	0.96802	1.94161	0.23645
0.3	0.42417	1.54394	1.37579	-1.00282	0.96916	1.94255	0.23677
0.4	0.42317	1.53079	1.37320	-1.01182	0.97316	1.94625	0.23795
0.5	0.42004	1.49870	1.36798	-1.03560	0.98285	1.95707	0.24107
0.6	0.41129	1.44312	1.36306	-1.08594	1.00046	1.98259	0.24759
0.7	0.38972	1.38768	1.37272	-1.17396	1.02327	2.03020	0.25821
0.8	0.34853	1.40889	1.42753	-1.29822	1.03740	2.08633	0.26877
0.9	0.30214	1.55926	1.54407	-1.43058	1.02691	2.08182	0.26632
$\theta_0 = 60^\circ$							
0.0	0.84732	2.53935	2.31937	-2.75254	1.67502	3.36109	0.70893
0.1	0.84728	2.53899	2.31928	-2.75293	1.67512	3.36116	0.70898
0.2	0.84678	2.53395	2.31807	-2.75851	1.67656	3.36229	0.70965
0.3	0.84457	2.51334	2.31338	-2.78196	1.68238	3.36739	0.71250
0.4	0.83793	2.46279	2.30314	-2.84375	1.69657	3.38218	0.72002
0.5	0.82120	2.37371	2.28936	-2.97120	1.72249	3.41600	0.73548
0.6	0.78379	2.26486	2.28567	-3.19322	1.75957	3.48008	0.76171
0.7	0.71113	2.21586	2.32648	-3.52433	1.79670	3.57677	0.79660
0.8	0.60375	2.35822	2.45901	-3.93796	1.80857	3.66101	0.82165
0.9	0.50862	2.69151	2.68346	-4.34660	1.77999	3.61929	0.80277

Здесь величины σ_m^k определяются по формулам (49), см. приложение.

После подстановки выражений (19), а также найденных для $p_0(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$, $r_3(t)$ и $p_3(t)$ решений (20) в уравнение Бубнова – Галеркина

$$\int_0^{2\pi/\sigma} L_1 \cos \sigma t dt = 0, \quad \int_0^{2\pi/\sigma} L_1 \sin \sigma t dt = 0, \quad (21)$$

$$\int_0^{2\pi/\sigma} L_2 \cos \sigma t dt = 0, \quad \int_0^{2\pi/\sigma} L_2 \sin \sigma t dt = 0,$$

получим систему четырех алгебраических уравнений, из которой определяются доминантные амплитуды A_i , B_i ($i = 1, 2$) в представлении (19):

$$\begin{aligned} & (m_1(A_1^2 + A_2^2 + B_1^2) + m_2 B_2^2)A_1 + \\ & + m_3 A_2 B_1 B_2 + (\bar{\sigma}_1^2 - 1)A_1 = H\Lambda, \\ & (m_1(A_1^2 + A_2^2 + B_2^2) + m_2 B_1^2)A_2 + \\ & + m_3 A_1 B_1 B_2 + (\bar{\sigma}_1^2 - 1)A_2 = 0, \\ & (m_1(A_1^2 + B_1^2 + B_2^2) + m_2 A_2^2)B_1 + \\ & + m_3 A_1 A_2 B_2 + (\bar{\sigma}_1^2 - 1)B_1 = 0, \\ & (m_1(A_2^2 + B_1^2 + B_2^2) + m_2 A_1^2)B_2 + \\ & + m_3 A_1 A_2 B_1 + (\bar{\sigma}_1^2 - 1)B_2 = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -\frac{\mathbf{d}_1}{2} + \mathbf{d}_3 \left(o_2^{(0)} - \frac{o_2^{(2)}}{4} \right) + \\
 &+ \mathbf{d}_4 o_2^{(2)} + \mathbf{d}_5 \left(o_0^{(0)} - \frac{o_0^{(2)}}{4} \right) + \mathbf{d}_6 o_0^{(2)} + \\
 &+ \left[\frac{3\mathbf{g}_3}{4} - \mathbf{g}_1 \left(o_0^{(0)} + \frac{o_0^{(2)}}{4} \right) - \mathbf{g}_2 \left(o_2^{(0)} + \frac{o_2^{(2)}}{4} \right) \right] \bar{\sigma}_1^2; \\
 m_2 &= \frac{\mathbf{d}_1}{2} - 2\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_3 \left(o_2^{(0)} + \frac{3o_2^{(2)}}{4} \right) + \\
 &+ 3\mathbf{d}_4 o_2^{(2)} + \mathbf{d}_5 \left(o_0^{(0)} + \frac{o_0^{(2)}}{4} \right) - \mathbf{d}_6 o_0^{(2)} + \\
 &+ \left[\frac{\mathbf{g}_3}{4} - \mathbf{g}_1 \left(o_0^{(0)} - \frac{o_0^{(2)}}{4} \right) + \mathbf{g}_2 \left(o_2^{(0)} - \frac{3o_2^{(2)}}{4} \right) \right] \bar{\sigma}_1^2; \\
 m_3 &= m_1 - m_2; \quad m_4 = m_1 + m_2; \quad \bar{\sigma}_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{\sigma}.
 \end{aligned}$$

Анализ системы (22) при условии ненулевого действия внешних возмущающих сил ($H \neq 0$) показывает, что $A_2 = B_1 = 0$, т.е. имеются лишь две ненулевые доминантные амплитуды, которые определяются из системы двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 m_1 A_1^3 + m_2 A_1 B_2^2 + (\bar{\sigma}_1^2 - 1) A_1 &= H\Lambda, \\
 m_1 B_2^3 + m_2 A_1^2 B_2 + (\bar{\sigma}_1^2 - 1) B_2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{23}$$

аналогичной системе уравнений, полученной в работе [17]. Ее решения зависят от коэффициентов m_i , которые являются функциями $\bar{\mathbf{r}}_1$, $\bar{\sigma}_1(\bar{\mathbf{r}}_1)$ и θ_0 . С физической точки зрения эти решения определяют два типа установившихся режимов. При условии $B_2 = 0$ они соответствуют плоским установившимся резонансным режимам колебаний жидкости, а при $B_2 \neq 0$ – так называемой круговой волне. Это разделение полностью аналогично хорошо известной классификации для круговых вертикальных цилиндрических и неусеченных конических баков [17].

Плоские установившиеся движения ($A_1 \neq 0$, $A_2 = B_1 = B_2 = 0$) определяются приближенным ре-

шением модальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
 p_1 &= r_2 = p_3 = 0, \\
 p_0 &= -A_1^2 o_0^{(0)} - \frac{1}{2} A_1^2 o_0^{(2)} \cos 2\sigma t + o(\epsilon^2), \\
 p_2 &= A_1^2 o_2^{(0)} + \frac{1}{2} A_1^2 o_2^{(2)} \cos 2\sigma t + o(\epsilon^2), \\
 r_1 &= A_1 \cos \sigma t + o(\epsilon), \\
 r_3 &= A_1^3 o_3^{(1)} \cos \sigma t + A_1^3 o_3^{(3)} \cos 3\sigma t + o(\epsilon^3),
 \end{aligned} \tag{24}$$

где A_1 – решение кубического уравнения

$$m_1 A_1^3 + (\bar{\sigma}_1^2 - 1) A_1 - H\Lambda = 0. \tag{25}$$

Установившаяся круговая волна ($A_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $B_1 = A_2 = 0$) приближается решением

$$\begin{aligned}
 r_1(t) &= A_1 \cos \sigma t + o(\epsilon), \\
 p_1(t) &= B_2 \sin \sigma t + o(\epsilon), \\
 p_0(t) &= -(A_1^2 + B_2^2) o_0^{(0)} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} (A_1^2 - B_2^2) o_0^{(2)} \cos 2\sigma t + o(\epsilon^2), \\
 r_2(t) &= -A_1 B_2 o_2^{(2)} \sin 2\sigma t + o(\epsilon^2), \\
 p_2(t) &= (A_1^2 - B_2^2) o_2^{(0)} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} (A_1^2 + B_2^2) o_2^{(2)} \cos 2\sigma t + o(\epsilon^2), \\
 r_3(t) &= A_1 (A_1^2 - B_2^2) o_3^{(1)} \cos \sigma t + \\
 &\quad + A_1 (A_1^2 + 3B_2^2) o_3^{(3)} \cos 3\sigma t + o(\epsilon^3), \\
 p_3(t) &= B_2 (A_1^2 - B_2^2) o_3^{(1)} \sin \sigma t + \\
 &\quad + B_2 (3A_1^2 + B_2^2) o_3^{(3)} \sin 3\sigma t + o(\epsilon^3),
 \end{aligned} \tag{26}$$

где A_1 и B_2 находятся из системы кубических уравнений

$$\begin{aligned}
 m_6 A_1^3 + m_5 (\bar{\sigma}_1^2 - 1) A_1 - H\Lambda &= 0; \\
 B_2^2 &= \frac{m_1 A_1^2 - (\bar{\sigma}_1^2 - 1)}{m_2} > 0;
 \end{aligned} \tag{27}$$

$m_5 = m_3/m_1$; $m_6 = m_4 m_5$. Последнее неравенство в системе (27) существенно, поскольку амплитуда не может быть мнимым числом.

3.2. Неустойчивость установившихся режимов

Определим области неустойчивости приближенных решений (24) и (26) с помощью первого метода Ляпунова. Для этого вместе с приближенными установившимися периодическими решениями (отмеченными значком тильды) рассмотрим близкие к ним решения с малыми возмущениями α , β , η , γ , δ , μ и ν :

$$p_0(t) = \tilde{p}_0(t) + \eta(t),$$

$$p_1(t) = \tilde{p}_1(t) + \beta(t), \quad r_1(t) = \tilde{r}_1(t) + \alpha(t), \quad (28)$$

$$p_2(t) = \tilde{p}_2(t) + \delta(t), \quad r_2(t) = \tilde{r}_2(t) + \gamma(t),$$

$$p_3(t) = \tilde{p}_3(t) + \nu(t), \quad r_3(t) = \tilde{r}_3(t) + \mu(t),$$

и выведем линейные дифференциальные уравнения в вариациях относительно α , β , η , γ , δ , μ , ν :

$$\mathcal{L}_0 = \ddot{\eta} + \sigma_0^2 \eta + \mathbf{d}_{10}(\ddot{r}_1 \alpha + \ddot{p}_1 \beta + \ddot{\alpha} r_1 + \ddot{\beta} p_1) + 2\mathbf{d}_8(\dot{\alpha} \dot{r}_1 + \dot{\beta} \dot{p}_1) + 2\sigma_0^2 \mathbf{g}_0(\alpha r_1 + \beta p_1); \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \ddot{\alpha} + \sigma_1^2 \alpha + \mathbf{d}_1 \left(\alpha (\dot{p}_1^2 + \dot{r}_1^2 + \ddot{p}_1 p_1 + \right. \\ & + 2\ddot{r}_1 r_1) + r_1 (\ddot{\beta} p_1 + \ddot{\alpha} r_1 + \ddot{p}_1 \beta + 2\dot{\beta} \dot{p}_1 + \\ & + 2\dot{\alpha} \dot{r}_1) \Big) + \mathbf{d}_2 \left(p_1 (\ddot{\alpha} p_1 - \ddot{\beta} r_1 + 2\dot{\alpha} \dot{p}_1) + \right. \\ & + \beta (2\dot{p}_1 \dot{r}_1 + 2p_1 \ddot{r}_1 - r_1 \ddot{p}_1) - \alpha (\ddot{p}_1 p_1 + 2\dot{p}_1^2) + \\ & + 2\dot{\beta} (\dot{r}_1 p_1 - 2\dot{p}_1 r_1) \Big) + \mathbf{d}_3 (\ddot{\beta} r_2 - \ddot{\alpha} p_2 + \dot{\beta} \dot{r}_2 - \\ & - \dot{\alpha} \dot{p}_2 + \dot{\gamma} \dot{p}_1 - \dot{\delta} \dot{r}_1 + \gamma \ddot{p}_1 - \delta \ddot{r}_1) + \mathbf{d}_4 (\beta \ddot{r}_2 - \\ & - \alpha \ddot{p}_2 + \dot{\gamma} p_1 - \dot{\delta} r_1) + \mathbf{d}_5 (\ddot{\alpha} p_0 + \dot{\alpha} \dot{p}_0 + \dot{\eta} \dot{r}_1 + \\ & + \dot{\eta} \dot{r}_1) + \mathbf{d}_6 (\alpha \ddot{p}_0 + \dot{\eta} r_1) + \sigma_1^2 \left(\mathbf{g}_1 (\alpha p_0 + \right. \\ & + \eta r_1) + \mathbf{g}_2 (\beta r_2 - \alpha p_2 + \gamma p_1 - \delta r_1) + \\ & \left. + \mathbf{g}_3 (2\beta p_1 r_1 + \alpha (p_1^2 + 3r_1^2)) \right); \end{aligned} \quad (29b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \ddot{\beta} + \sigma_1^2 \beta + \mathbf{d}_1 \left(\beta (\dot{p}_1^2 + \dot{r}_1^2 + 2\dot{p}_1 p_1 + \right. \\ & + \ddot{r}_1 r_1) + p_1 (\ddot{\beta} p_1 + 2\dot{\beta} \dot{p}_1 + \ddot{\alpha} r_1 + 2\dot{\alpha} \dot{r}_1 + \\ & + \alpha \ddot{r}_1) \Big) + \mathbf{d}_2 \left(r_1 (\ddot{\beta} r_1 + 2\dot{\beta} \dot{r}_1 - \ddot{\alpha} p_1) + \right. \\ & + \alpha (2\dot{p}_1 r_1 + 2\dot{p}_1 \dot{r}_1 - \ddot{r}_1 p_1) - \beta (\ddot{r}_1 r_1 + 2\dot{r}_1^2) + \\ & + 2\dot{\alpha} (\dot{p}_1 r_1 - 2\dot{r}_1 p_1) \Big) + \mathbf{d}_3 (\ddot{\beta} p_2 + \dot{\beta} \dot{p}_2 + \ddot{\alpha} r_2 + \\ & + \dot{\alpha} \dot{r}_2 + \dot{\delta} \dot{p}_1 + \delta \ddot{p}_1 + \dot{\gamma} \dot{r}_1 + \gamma \ddot{r}_1) + \mathbf{d}_4 (\ddot{\delta} p_1 + \\ & + \dot{\gamma} r_1 + \alpha \ddot{r}_2 + \beta \ddot{p}_2) + \mathbf{d}_5 (\ddot{\beta} p_0 + \dot{\beta} \dot{p}_0 + \dot{\eta} \dot{p}_1 + \\ & + \dot{\eta} \dot{p}_1) + \mathbf{d}_6 (\beta \ddot{p}_0 + \dot{\eta} p_1) + \sigma_1^2 \left(\mathbf{g}_1 (\beta p_0 + \right. \\ & + \eta p_1) + \mathbf{g}_2 (\alpha r_2 + \beta p_2 + \gamma r_1 + \delta p_1) + \\ & \left. + \mathbf{g}_3 (2\alpha p_1 r_1 + \beta (3p_1^2 + r_1^2)) \right); \end{aligned} \quad (29c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & \ddot{\gamma} + \sigma_2^2 \gamma + \mathbf{d}_9 \left(\dot{p}_1 \alpha + \dot{r}_1 \beta + \ddot{\alpha} p_1 + \ddot{\beta} r_1 \right) + \\ & + 2\mathbf{d}_7 \left(\dot{\alpha} \dot{p}_1 + \dot{\beta} \dot{r}_1 \right) + 2\sigma_2^2 \mathbf{g}_4 (\alpha p_1 + \beta r_1); \end{aligned} \quad (29d)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & \ddot{\delta} + \sigma_2^2 \delta + \mathbf{d}_9 \left(\dot{r}_1 \alpha - \dot{\beta} p_1 - \ddot{\alpha} r_1 - \ddot{p}_1 \beta \right) + \\ & + 2\mathbf{d}_7 \left(\dot{\beta} \dot{p}_1 - \dot{\alpha} \dot{r}_1 \right) + 2\sigma_2^2 \mathbf{g}_4 (\beta p_1 - \alpha r_1); \end{aligned} \quad (29e)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & \ddot{\mu} + \sigma_3^2 \mu + \mathbf{d}_{11} \left(\ddot{\alpha} (p_1^2 - r_1^2) + 2\dot{\beta} p_1 r_1 + \right. \\ & + 2\alpha (\dot{p}_1 p_1 - \dot{r}_1 r_1) + 2\beta (\dot{p}_1 r_1 + \dot{r}_1 p_1) \Big) + \\ & + \mathbf{d}_{12} \left(2\dot{\alpha} (p_1 \dot{p}_1 - r_1 \dot{r}_1) + \alpha (\dot{p}_1^2 - \dot{r}_1^2) + \right. \\ & + 2\dot{\beta} (p_1 \dot{r}_1 + r_1 \dot{p}_1) + 2\dot{\beta} \dot{p}_1 \dot{r}_1 \Big) + \mathbf{d}_{13} (\ddot{\alpha} p_2 + \\ & + \ddot{\beta} r_2 + \dot{\delta} \dot{r}_1 + \gamma \ddot{p}_1) + \mathbf{d}_{14} (\alpha \ddot{p}_2 + \beta \ddot{r}_2 + \dot{\gamma} p_1 + \\ & + \dot{\delta} r_1) + \mathbf{d}_{15} (\dot{\alpha} \dot{p}_2 + \dot{\beta} \dot{r}_2 + \dot{\gamma} \dot{p}_1 + \dot{\delta} \dot{r}_1) + \\ & + \sigma_3^2 \left(\mathbf{g}_5 (\alpha p_2 + \beta r_2 + \delta r_1 + \gamma p_1) + \right. \\ & \left. + 3\mathbf{g}_6 (\alpha (p_1^2 - r_1^2) + 2\beta p_1 r_1) \right); \end{aligned} \quad (29f)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 = & \ddot{\nu} + \sigma_3^2 \nu + \mathbf{d}_{11} \left(\ddot{\beta} (p_1^2 - r_1^2) - 2\dot{\alpha} p_1 r_1 + \right. \\ & + 2\beta (p_1 \dot{p}_1 - r_1 \dot{r}_1) - 2\alpha (r_1 \dot{p}_1 + p_1 \dot{r}_1) \Big) + \\ & + \mathbf{d}_{12} \left(2\dot{\beta} (p_1 \dot{p}_1 - r_1 \dot{r}_1) - 2\dot{\alpha} (r_1 \dot{p}_1 + p_1 \dot{r}_1) + \right. \\ & + \beta (\dot{p}_1^2 - \dot{r}_1^2) - 2\alpha \dot{p}_1 \dot{r}_1 \Big) + \mathbf{d}_{13} (\ddot{\beta} p_2 - \\ & - \ddot{\alpha} r_2 + \dot{\delta} \dot{p}_1 - \gamma \ddot{r}_1) + \mathbf{d}_{14} (\beta \ddot{p}_2 - \alpha \ddot{r}_2 + \dot{\delta} p_1 - \\ & - \dot{\gamma} r_1) + \mathbf{d}_{15} (\dot{\beta} \dot{p}_2 - \dot{\alpha} \dot{r}_2 + \dot{\delta} \dot{p}_1 - \dot{\gamma} \dot{r}_1) + \\ & + \sigma_3^2 \left(\mathbf{g}_5 (\beta p_2 - \alpha r_2 + \delta p_1 - \gamma r_1) + \right. \\ & \left. + 3\mathbf{g}_6 (\beta (p_1^2 - r_1^2) - 2\alpha p_1 r_1) \right). \end{aligned} \quad (29g)$$

Уравнения в вариациях (29) упрощаются в случае плоских колебаний (24), становясь линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Тогда их общее решение может быть получено в рамках теории Флоке. Анализируя его, можно выделить неустойчивые установившиеся режимы, для которых α , β , η , γ , δ , μ и ν неограниченно возрастают при $t \rightarrow \infty$, а также (если возможно) асимптотически устойчивые установившиеся решения, для которых α , β , η , γ , δ , μ и ν экспоненциально стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, система (29) может иметь ограниченные решения, не стремящиеся к нулю на бесконечности. Фундаментальное решение уравнений в вариациях с периодическими коэффициен-

тами имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= e^{\lambda t} \psi_1(t), & \beta(t) &= e^{\lambda t} \psi_2(t), \\ \gamma(t) &= e^{\lambda t} \psi_3(t), & \delta(t) &= e^{\lambda t} \psi_4(t), \\ \eta(t) &= e^{\lambda t} \psi_5(t), & \mu(t) &= e^{\lambda t} \psi_6(t), \\ \nu(t) &= e^{\lambda t} \psi_7(t),\end{aligned}\quad (30)$$

где λ – характеристический показатель системы; ψ_i – $2\pi/\sigma$ -периодические функции. Как следует из выражений (30), неустойчивость установившихся решений (24) и (26) зависит от значений характеристического показателя λ . Если все характеристические показатели имеют ненулевые отрицательные действительные части, то установившиеся периодические решения асимптотически устойчивы. Если же среди характеристических показателей появляется хотя бы один с положительной действительной частью, то периодическое решение становится неустойчивым.

Чтобы получить уравнение для определения характеристических показателей, периодические функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ представляем в виде рядов Фурье и удерживаем только первые гармоники:

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= a_1 \cos \sigma t + a_2 \sin \sigma t, \\ \psi_2(t) &= b_1 \cos \sigma t + b_2 \sin \sigma t,\end{aligned}\quad (31)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – некоторые постоянные коэффициенты.

Подставим выражения (31) и (30) в систему уравнений в вариациях (29). При этом из первого и четырех последних уравнений системы возмущения $\beta(t), \gamma(t), \delta(t), \mu(t)$ и $\nu(t)$ можно явно выразить через a_1, a_2, b_1 и b_2 . Используя метод Бубнова – Галеркина, для определения последних получим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{11}a_1 + \mathbb{C}_{12}a_2 + \mathbb{C}_{13}b_1 + \mathbb{C}_{14}b_2 &= 0, \\ \mathbb{C}_{21}a_1 + \mathbb{C}_{22}a_2 + \mathbb{C}_{23}b_1 + \mathbb{C}_{24}b_2 &= 0, \\ \mathbb{C}_{31}a_1 + \mathbb{C}_{32}a_2 + \mathbb{C}_{33}b_1 + \mathbb{C}_{34}b_2 &= 0, \\ \mathbb{C}_{41}a_1 + \mathbb{C}_{42}a_2 + \mathbb{C}_{43}b_1 + \mathbb{C}_{44}b_2 &= 0.\end{aligned}\quad (32)$$

Здесь $\bar{\lambda} = \lambda/\sigma$. Коэффициенты \mathbb{C}_{ij} ($i, j = 1, \dots, 4$) линейной алгебраической системы (32) выражаются через коэффициенты d_i ($i = 1, \dots, 15$) и g_j ($j = 0, \dots, 6$) системы нелинейных дифференциальных уравнений (17), $\bar{\lambda}$ и амплитуды A_1, B_2 обобщенных

координат $p_1(t), r_1(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{11} &= A_1^2 C_7 + B_2^2 C_8 + C_{14}; \\ \mathbb{C}_{12} &= A_1^2 C_1 + B_2^2 C_2 + C_{13}; \\ \mathbb{C}_{13} &= A_1 B_2 C_5; \quad \mathbb{C}_{14} = A_1 B_2 C_9; \\ \mathbb{C}_{21} &= A_1^2 C_3 + B_2^2 C_4 - C_{13}; \\ \mathbb{C}_{22} &= A_1^2 C_{10} + B_2^2 C_{11} + C_{14}; \\ \mathbb{C}_{23} &= A_1 B_2 C_{12}; \quad \mathbb{C}_{24} = A_1 B_2 C_6; \\ \mathbb{C}_{31} &= -A_1 B_2 C_6; \quad \mathbb{C}_{32} = A_1 B_2 C_{12}; \\ \mathbb{C}_{33} &= A_1^2 C_{11} + B_2^2 C_{10} + C_{14}; \\ \mathbb{C}_{34} &= -A_1^2 C_4 - B_2^2 C_3 + C_{13}; \\ \mathbb{C}_{41} &= A_1 B_2 C_9; \quad \mathbb{C}_{42} = -A_1 B_2 C_5; \\ \mathbb{C}_{43} &= -A_1^2 C_2 - B_2^2 C_1 - C_{13}; \\ \mathbb{C}_{44} &= A_1^2 C_8 + B_2^2 C_7 + C_{14}.\end{aligned}\quad (33)$$

Полный вид коэффициентов C_j ($j = 1, \dots, 14$) приведен в приложении (см. формулы (50)).

Так как система линейных алгебраических уравнений (32) относительно постоянных a_i, b_i ($i = 1, 2$) должна иметь отличное от нуля решение, приравняем ее определитель к нулю:

$$\mathbf{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} & \mathbb{C}_{14} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} & \mathbb{C}_{24} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} & \mathbb{C}_{34} \\ \mathbb{C}_{41} & \mathbb{C}_{42} & \mathbb{C}_{43} & \mathbb{C}_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

Полученное после раскрытия выражения (34) характеристическое уравнение – полином высокой степени относительно $\bar{\lambda}$. Поэтому с учетом выражений для C_j его получение в явном виде – достаточно трудоемкая процедура. В связи с этим исследование значений характеристических показателей $\bar{\lambda}$ удобнее свести к численному нахождению всех корней характеристического определителя (34). Напомним, что неустойчивым движениям соответствует наличие показателей с $\mathbf{Re} \bar{\lambda} > 0$.

3.3. Амплитудно-частотные характеристики

Амплитудно-частотные характеристики нелинейных установившихся колебаний жидкости с точностью до членов более высокого порядка малости можно характеризовать зависимостями между доминантными амплитудами и частотой возбуждения. На рис. 8 и 9 изображены такие зависимости, построенные для достаточно типич-

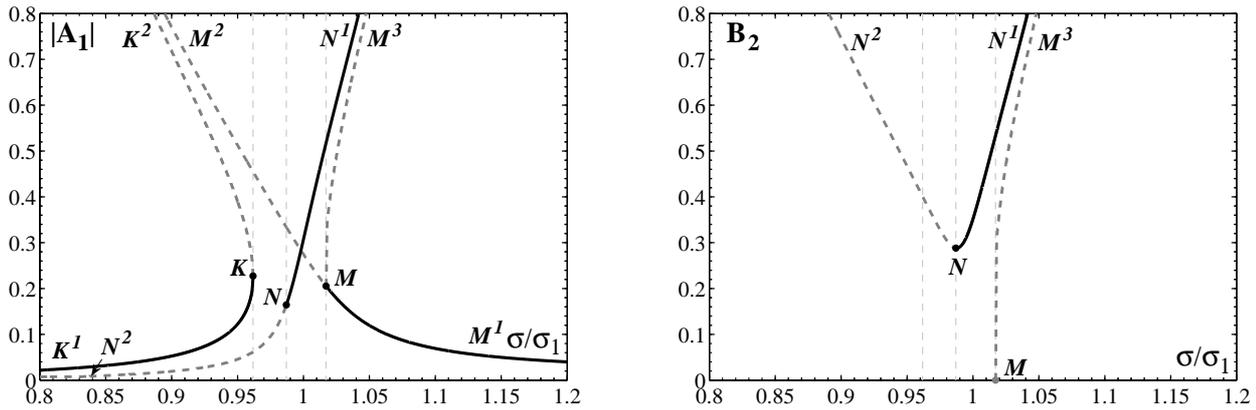


Рис. 8. Амплитудно-частотные кривые плоской и круговой волн для бака с геометрией $\theta_0 = 30^\circ$, $r_0 = 1$ и $r_1 = 0.5$ при внешнем возмущении $H = 0.01$ для продольных A_1 и поперечных B_2 амплитуд

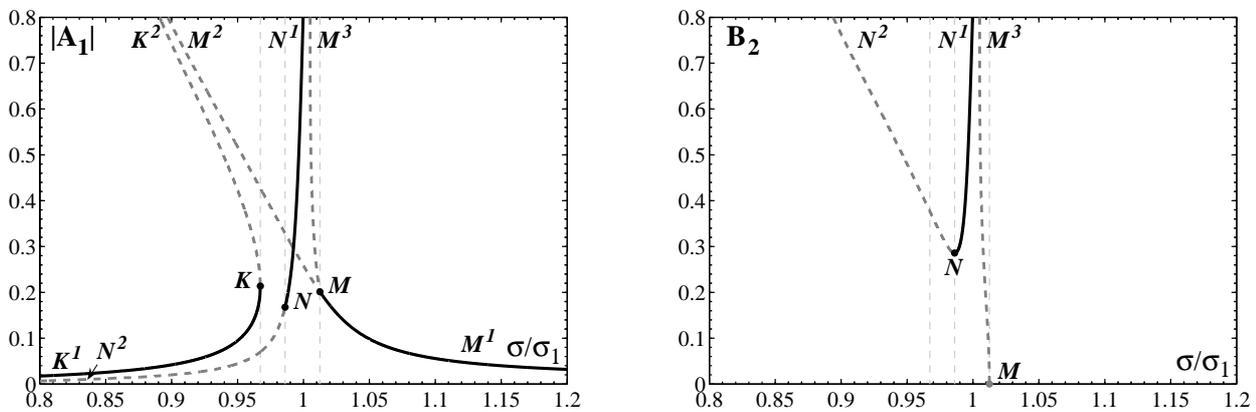


Рис. 9. Амплитудно-частотные кривые круговой волны для бака с геометрией $\theta_0 = 45^\circ$, $r_0 = 1$ и $r_1 = 0.4$ при внешнем возмущении $H = 0.01$ для продольных A_1 и поперечных B_2 амплитуд

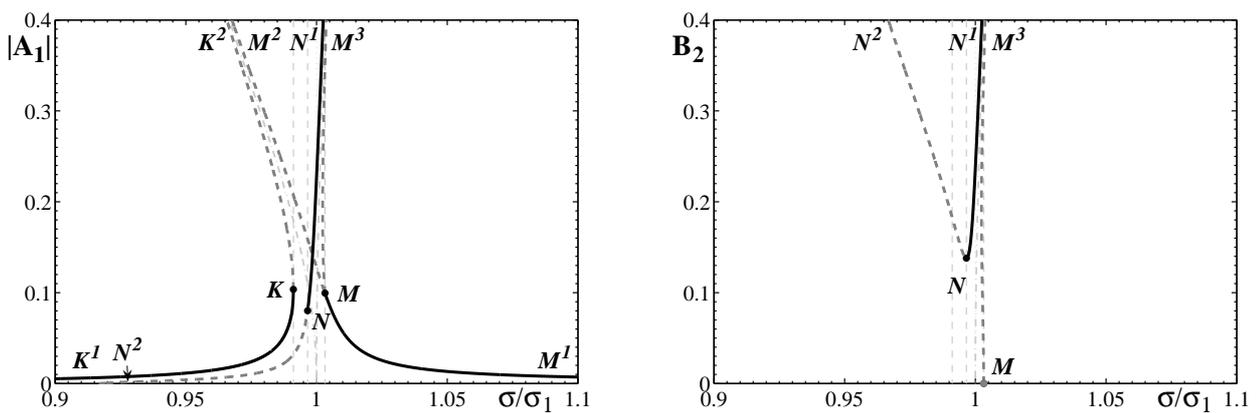


Рис. 10. Амплитудно-частотные кривые плоской и круговой волн для бака с геометрией $\theta_0 = 30^\circ$, $r_0 = 1$ и $r_1 = 0.7427$ при внешнем возмущении $H = 0.00125$ для продольных A_1 и поперечных B_2 амплитуд

чных с практической точки зрения геометрических пропорций. Сплошными кривыми изображены устойчивые установившиеся колебания, а штриховыми – неустойчивые. Из графиков видно, что амплитудно-частотные характеристики остаются подобными тем, которые известны из работ Луковского для кругового вертикального цилиндра с конечной глубиной заполнения. Так, плоский установившийся режим (ветви K^1K^2 и M^1M^2) неустойчив в окрестности основного резонанса $\sigma/\sigma_1 \approx 1$ между точками K и M . При этом K – точка возврата, а M – точка бифуркации Пуанкаре, из которой возникает ветвь MM^3 , соответствующая неустойчивой резонансной круговой волне. Вторая ветвь N^2N^1 , соответствующая круговой волне, разделяется точкой бифуркации Хопфа N на устойчивую NN^1 и неустойчивую NN^2 части.

Учитывая расположение указанных ветвей для плоской и круговой волн, можно выделить диапазоны устойчивости и неустойчивости. Они также аналогичны случаю вертикального кругового бака. Так, устойчивые плоские волны ожидаются для частот, лежащих левее точки K . Правее точки M могут реализоваться как плоская, так и круговая волны (см. рис. 8). На отрезке между N и M существуют лишь устойчивые круговые волны, а в диапазоне между K и N отсутствуют любые устойчивые установившиеся режимы и поэтому могут возникать иррегулярные движения. Как и для цилиндра кругового сечения, ветви, соответствующие плоской волне, характеризуются так называемой мягкой нелинейностью, а для круговой волны существуют критические значения геометрических параметров, когда характер амплитудно-частотных характеристик меняется от мягкого к жесткому. Для кругового цилиндра такое критическое значение соответствует безразмерной глубине 0.5059. Однако для усеченных конических баков ситуация сложнее, поскольку здесь вводятся в рассмотрение два входных параметра – угол полураствора и безразмерная глубина r_1 , которые могут влиять на характер амплитудно-частотных характеристик. Рис. 9 демонстрирует расположение амплитудно-частотных характеристик круговой волны для критической комбинации этих двух параметров. Видно, что амплитуда круговой волны в поперечном направлении становится теоретически бесконечной примерно в середине диапазона NM . Это говорит о том, что построенная теория может быть в этом случае применима лишь частично, поскольку она предусматривает малость B_2 . В случае подобных критических входных параметров необхо-

димо строить так называемые адаптивные асимптотические модальные теории, которые позволяют найти и учесть в модальном разложении несколько высших мод, имеющих доминантный характер.

В следующем параграфе будут сравниваться теоретические и экспериментальные (взяты из работы [16]) величины установившихся амплитуд продольных сил. Расчетные амплитудно-частотные характеристики для этого случая приведены на рис. 10. Из графиков видно, что амплитудно-частотные характеристики для круговой волны достаточно близки к случаю критических комбинаций входных геометрических параметров, а следовательно, мы не можем требовать от нашей теории количественного соответствия для экспериментальных замеров силового отклика, порождаемого круговой волной.

4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ

Для подсчета результирующей гидродинамической силы воспользуемся формулой Луковского [6], в соответствии с которой при поступательном движении бака компоненты гидродинамической силы определяются так:

$$P_x = -mg - \ddot{l}_1, \quad P_y = -\ddot{l}_2, \quad P_z = -m\ddot{u} - \ddot{l}_3. \quad (35)$$

Здесь m – масса жидкости; $l_i(t)/m$ – координаты центра массы жидкости.

Использование нелинейной модальной системы позволяет явно найти выражения для вектора \vec{l} , вычисленные по формулам (43), которые с точностью до третьего порядка малости представлены соотношениями (44). Для установившихся режимов движения вторая производная для горизонтальных компонент имеет вид

$$\ddot{l}_2 = -(\lambda_{211}B_2 + \lambda_{2131}B_2^3 + \lambda_{2132}B_2A_1^2) \times \\ \times \sigma^2 \sin \sigma t - \lambda_{233}B_2(A_1^2 - B_2^2)\sigma^2 \sin 3\sigma t, \quad (36)$$

$$\ddot{l}_3 = -(\lambda_{311}A_1 + \lambda_{3131}A_1^3 + \lambda_{3132}A_1B_2^2) \times \\ \times \sigma^2 \cos \sigma t - \lambda_{333}A_1(A_1^2 - B_2^2)\sigma^2 \cos 3\sigma t,$$

где коэффициенты λ_{ijk} определены формулами (45). Таким образом, имеем следующие выражения для нахождения амплитуды силы:

$$P_y = (\lambda_{211}B_2 + \lambda_{2131}B_2^3 + \lambda_{2132}B_2A_1^2) \times \\ \times \sigma^2 \sin \sigma t + \lambda_{233}B_2(A_1^2 - B_2^2)\sigma^2 \sin 3\sigma t, \quad (37)$$

$$P_z = (mH + \lambda_{311}A_1 + \lambda_{3131}A_1^3 + \lambda_{3132}A_1B_2^2) \times \\ \times \sigma^2 \cos \sigma t + \lambda_{333}A_1(A_1^2 - B_2^2)\sigma^2 \cos 3\sigma t.$$

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Формула (37) дает возможность оценить силой отклик жидкости в случае, когда имеется внешнее гармоническое возбуждение и вклад, вносимый в горизонтальную проекцию суммарной гидродинамической силы инерционными силами:

$$|P_z^{if}| = \pi \rho \sigma^2 \frac{H}{3} (r_0^3 - r_1^3) \operatorname{ctg} \theta_0, \quad (38)$$

а также волновыми движениями на свободной поверхности жидкости:

$$|P_z^{vm}| = \max[\sigma^2(\lambda_{311}A_1 + \lambda_{3131}A_1^3) \cos \sigma t + \sigma^2 \lambda_{333}A_1^3 \cos 3\sigma t]. \quad (39)$$

Теоретические и экспериментальные оценки силового отклика жидкости можно сравнить, пользуясь результатами экспериментальных исследований Кастиатти и др. [16]. Описанная в этой работе экспериментальная установка состоит из жесткого конического бака с датчиками нагрузок, прикрепленного к платформе. Бак характеризуется следующими геометрическими параметрами: $\theta_0 = \pi/6$ и $r_1 = 0.1$ м. Он частично заполнен жидкостью, глубина которой варьировалась. Установка размещалась на вибростенде, движущемся гармонически в горизонтальной плоскости. Рассматриваемый силовой отклик системы тело – жидкость представляет собой сумму сил инерции жесткого бака и платформы, а также стационарных гидродинамических сил, связанных с колебаниями жидкости. Экспериментальные результаты представлены в безразмерной форме $|P_z|/(mH\sigma^2)$, характеризующей передаточную функцию для амплитуды силы P_z . Используем третью формулу (35). Заметим, что фигурирующая здесь масса m равна сумме масс жидкости m_l и бака с платформой m_c . Учтя дополнительно представление обобщенных координат $p_0(t)$, $r_1(t)$ и $p_2(t)$ (24), для стационарной гидродинамической силы получим выражение

$$P_z = -(m_c + m_l)\ddot{u} - \dot{i}_3. \quad (40)$$

Тогда безразмерная сила (37) приобретет вид

$$\left| \frac{P_z}{m_l H \sigma^2} \right| = \max \left[\left(1 + \frac{m_c}{m_l} + \frac{\lambda_{311} A_1}{m_l H} + \frac{\lambda_{3131} A_1^3}{m_l H} \right) \cos \sigma t - \frac{\lambda_{333} A_1^3}{m_l H} \cos 3\sigma t \right], \quad (41)$$

где $m_l = \rho V_l$ – масса жидкости; V_l – объем жидкости; m_c – общая масса платформы и жесткого бака

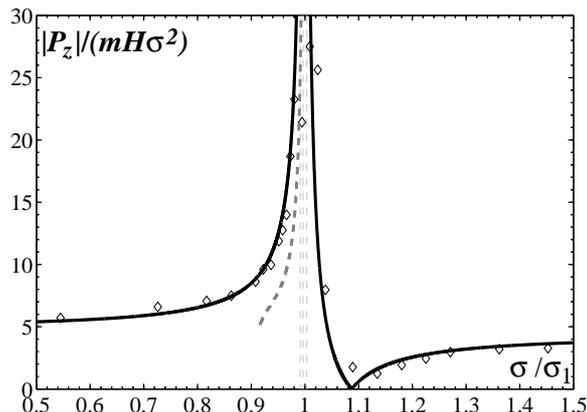


Рис. 11. Силовой отклик колебаний жидкости. Точки, соответствующие K , M и N с рис. 10, находятся за пределами диапазона: сплошная – устойчивые плоские ветви, штриховая – неустойчивые круговые ветви

(при испытаниях Кастиатти и др. [16] она составила $m_c = 10.5$ кг).

На рис. 11 представлен график безразмерного силового отклика, полученный с помощью формулы (41), и приведены экспериментальные данные [16] для глубины $h = 6$ см (радиус дна $r_1 = 10$ см, радиус невозмущенной свободной поверхности $r_0 = 13.46$ см) и при внешнем возмущении $H = 1.25$ мм для плоских колебаний. Напомним, что амплитудно-частотные характеристики для данного случая приведены на рис. 10.

ВЫВОДЫ И ДИСКУССИЯ

На основе развития метода неконформных отображений Луковского [6] для полостей конической формы построена семимодовая модальная система, описывающая резонансные нелинейные колебания жидкости в V-образных усеченных конических баках. Она базируется на асимптотике третьего порядка Нариманова – Моисеева, предполагающей, что бак совершает близкие к гармоническим колебания с частотой, близкой к первой собственной частоте колебаний жидкости. При этом учитываются две обобщенные координаты, соответствующие возмущениям двух первых доминантных мод, три основные обобщенные координаты второго порядка, а также две обобщенные координаты третьего порядка. Пять первых уравнений этой модальной системы совпадают по форме с пятимодовой системой [17], построенной для случая неусеченного конуса.

Особенность исследуемой геометрии бака состоит в том, что она в одном из предельных случа-

ев (нулевой угол раствора) стремится к круговому цилиндру. Показано, что при этом гидродинамические коэффициенты построенной модальной системы стремятся к известным затабулированным значениям, полученным для систем, описывающих колебания жидкости в вертикальном круговом цилиндрическом сосуде [10].

Особо следует отметить, что при построении нелинейной модальной системы использовались приближенно-аналитические собственные формы колебаний жидкости, точно удовлетворяющие уравнению Лапласа и условиям непротекания на боковых стенках для любого допустимого положения свободной границы. Это позволяет гарантировать точное (до членов третьего порядка малости) удовлетворение условия сохранения объема и энергии для любых решений задачи, связанных с решениями выводимой модальной системы. Укажем, что ее модальные уравнения описывают строго консервативные динамические процессы.

Основное внимание уделялось анализу установившихся движений жидкости при строгом гармоническом резонансном возбуждении бака. Как и в случае цилиндрической геометрии, построенные нелинейные модальные уравнения позволяют выделить плоские и круговые волновые установившиеся резонансные движения свободной поверхности и определить диапазоны их неустойчивости.

Амплитудно-частотные характеристики также остаются подобными ранее построенным для установившихся резонансных режимов движения жидкости в вертикальном цилиндрическом баке. Однако наличие наклонной стенки оказывает существенное количественное влияние на распределение диапазонов неустойчивости установившихся режимов в усеченных конических баках. Кроме того, в отличие от цилиндра, для которого характер амплитудно-частотных характеристик зависел лишь от глубины заполнения бака, в исследуемом случае расположение ветвей амплитудно-частотных характеристик может меняться от угла наклона боковых стенок. В частности, имеются критические соотношения угла наклона и глубины заполнения, при которых в рамках рассматриваемых теоретических предположений круговая волна может достигать в окрестности основного резонанса бесконечной амплитуды.

Такие критические комбинации геометрических параметров требуют специального целенаправленного изучения. Мы не исключаем, что для более качественного описания соответствующих установившихся и переходных процессов потребуются уточнение модальных уравнений путем уч-

та большего количества собственных мод и коррекции гипотез об их асимптотическом вкладе.

Проведено сравнение полученных данных о силовом резонансном отклике жидкости с известными из литературы экспериментальными результатами. Теоретические значения оказались достаточно близки к экспериментальным.

1. Докучаев Л. В. К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях // Прикл. мат. мех.– 1964.– 28, вып. 1.– С. 151–154.
2. Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И. Докучаев Л. В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях.– К.: Наук. думка, 1969.– 250 с.
3. Луковский И. А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы.– К.: Наук. думка, 1975.– 136 с.
4. Луковский И. А. Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью // Колебания упругих конструкций с жидкостью.– М.: Волна.– 1976.– С. 260–264.
5. Луковский И. А. Определение сил взаимодействия между телом и жидкостью, в нелинейной задаче движения тела с полостью, содержащей жидкость // Нелинейные краевые задачи.– К.: Ин-т мат. АН УССР.– 1980.– С. 181–190.
6. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику тел с полостями, частично заполненными жидкостью.– К.: Наук. думка, 1990.– 296 с.
7. Луковский И. О. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливання рідини в конічних баках // Доп. НАН України.– 2002.– № 5.– С. 53–58.
8. Луковский И. А. Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью.– К.: Наук. думка, 2010.– 407 с.
9. Луковский И. А., Билык А.Н. Вынужденные нелинейные колебания жидкости в подвижных осесимметричных конических полостях // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем.– К.: Ин-т мат. АН УССР.– 1985.– С. 12–26.
10. Луковский И. А., Солодун О. В. Дослідження вимушених нелінійних коливань рідини в кругових циліндричних ємностях на основі семимодової моделі третього порядку // Праці Ін-ту мат. НАН України.– 2003.– 47.– С. 18–36.
11. Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н. Собственные частоты колебаний жидкости в усеченных конических баках // Акуст. вісн.– 2006.– 9, № 3.– С. 18–34.
12. Луковский И. А., Тимоха А. Н. Модальное моделирование нелинейных плесканий жидкости в баках с невертикальными стенками. Методика неконформных отображений // Прикл. гидромех.– 2000.– 2(74), № 4.– С. 32–47.
13. Моисеев Н. Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости // Прикл. мат. мех.– 1958.– 22.– С. 612–621.
14. Петров А. А. Вариационная формулировка задачи о движении жидкости в сосуде конечных размеров // Прикл. мат. мех.– 28, № 4.– 1964.– С. 754–758.

15. Bauer H. F. Sloshing in conical tanks // Acta Mechanica.– 1982.– **43**, № 3-4.– P. 185–200.
 16. Casciati F., De Stefano A., Matta E. Simulating a conical tuned liquid damper // Sim. Model. Pract. Theory.– 2003.– **11**.– P. 353–370.
 17. Gavriluk I., Lukovsky I., Timokha A. Linear and nonlinear sloshing in a circular conical tank // J. Fluid Dyn. Res.– 2005.– **35**.– P. 399–429.
 18. Gavriluk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun A., Timokha A. N. Natural sloshing frequency in rigid truncated conical tank // J. Eng. Comp.– 2008.– **25**, № 6.– P. 518–540.
 19. Faltinsen O. M., Timokha A. N. Sloshing.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.– 608 p.
 20. Lukovsky I., Timokha A. Combining Narimanov–Moiseev and Lukovsky–Miles schemes for nonlinear liquid sloshing // J. Numer. Applied Math.– 2011.– **2(105)**.– P. 69–82.
 21. Miles J. W. Nonlinear surface waves in closed basins // J. Fluid Mech.– 1976.– **75**.– P. 419–448.
 22. Whitham G. B. Variational method and applications to water waves // Proc. Roy. Soc. Lond.– 1967.– **A299**, № 1456.– P. 6–25.

где коэффициенты k_i имеют вид

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{2e_{00}}{h_t x_{20}^2}; & k_2 &= -\frac{e_{11}}{x_{20}^2 h_t}; \\ k_3 &= -\frac{e_{011}}{h_t^2 x_{20}^2}; & k_4 &= -\frac{e_{112}}{2h_t^2 x_{20}^2}; \\ k_5 &= -\frac{e_{22}}{h_t x_{20}^2}; & k_6 &= -\frac{e_{33}}{h_t x_{20}^2}; \\ k_7 &= -\frac{e_{123}}{h_t^2 x_{20}^2}; & k_8 &= \frac{\pi}{4}(h_t^4 - h_b^4)x_{20}^2; \\ k_9 &= \frac{\pi}{2}h_t^2 e_{11}; & k_{10} &= \pi h_t^2 e_{00}; \\ k_{11} &= \frac{\pi}{2}h_t^2 e_{22}; & k_{12} &= \frac{\pi}{2}h_t^2 e_{33}; \\ k_{13} &= 2\pi h_t e_{011}; & k_{14} &= \pi h_t e_{112}; \\ k_{15} &= 2\pi h_t e_{123}; & k_{17} &= \frac{\pi}{4}e_{1113}; \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Собственные моды имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \psi_0, \\ \varphi_2 &= \sin x_3 \psi_1, & \varphi_3 &= \cos x_3 \psi_1, \\ \varphi_4 &= \sin 2x_3 \psi_2, & \varphi_5 &= \cos 2x_3 \psi_2, \\ \varphi_6 &= \sin 3x_3 \psi_2, & \varphi_7 &= \cos 3x_3 \psi_2. \end{aligned}$$

В теории третьего порядка малости свободная поверхность принимает представление

$$\begin{aligned} f(x_2, x_3) &= \beta_0 + f_0(x_2)p_0 + \\ &+ f_1(x_2)p_1 \cos x_3 + f_1(x_2)r_1 \sin x_3 + \\ &+ f_2(x_2)p_2 \cos 2x_3 + f_2(x_2)r_2 \sin 2x_3 + \\ &+ f_3(x_2)p_3 \cos 3x_3 + f_3(x_2)r_3 \sin 3x_3. \end{aligned}$$

Зависящая от времени константа $\beta_0(t)$, входящая в уравнение свободной поверхности относительно $p_0(t), r_1(t), p_1(t), r_2(t)$ и $p_2(t)$, определяется с точностью до $O(\epsilon^6)$ с тем, чтобы на финальном этапе получить полную последовательность третьего порядка малости:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= k_1 p_0^2 + k_2 (p_1^2 + r_1^2) + k_3 p_0 (r_1^2 + p_1^2) + \\ &+ k_4 (2p_1 r_1 r_2 - p_2 (r_1^2 + p_1^2)) + \\ &+ k_5 (p_2^2 + r_2^2) + k_6 (p_3^2 + r_3^2) + \\ &+ k_7 (p_1 r_2 r_3 + p_1 p_2 p_3 - r_1 r_2 p_3 + r_1 p_2 r_3), \end{aligned}$$

в которых через e_j обозначены следующие квадратуры:

$$\begin{aligned} e_{00} &= \int_0^{x_{20}} x_2 (f_0(x_2))^2 dx_2; \\ e_{11} &= \int_0^{x_{20}} x_2 (f_1(x_2))^2 dx_2; \\ e_{22} &= \int_0^{x_{20}} x_2 (f_2(x_2))^2 dx_2; \\ e_{33} &= \int_0^{x_{20}} x_2 (f_3(x_2))^2 dx_2; \\ e_{011} &= \int_0^{x_{20}} x_2 f_0(x_2) (f_1(x_2))^2 dx_2; \\ e_{112} &= \int_0^{x_{20}} x_2 (f_1(x_2))^2 f_2(x_2) dx_2; \\ e_{123} &= \int_0^{x_{20}} x_2 f_1(x_2) f_2(x_2) f_3(x_2) dx_2, \end{aligned} \tag{42}$$

находящиеся из условия сохранения объема

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{x_{20}} x_2 \left(x_{10}^2 f + x_{10} f^2 + \frac{1}{3} f^3 \right) dx_2 dx_3 = 0.$$

Координаты вектора \vec{l} (15)

$$\begin{aligned} l_1 &= \rho \int_0^{2\pi x_{20}f+h_t} \int_0^0 \int_{h_b} x_1^3 x_2 dx_1 dx_2 dx_3, \\ l_2 &= \rho \int_0^{2\pi x_{20}f+h_t} \int_0^0 \int_{h_b} x_1^3 x_2^2 \cos x_3 dx_1 dx_2 dx_3, \\ l_3 &= \rho \int_0^{2\pi x_{20}f+h_t} \int_0^0 \int_{h_b} x_1^3 x_2^2 \sin x_3 dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (43)$$

с точностью до третьего порядка малости приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} l_1 &= \lambda_{10} + \lambda_{11}(p_1^2 + r_1^2), \\ l_2 &= \lambda_{21}p_1 + \lambda_{22}p_1(p_1^2 + r_1^2) + \\ &\quad + \lambda_{23}p_0p_1 + \lambda_{24}(p_1p_2 + r_1r_2), \\ l_3 &= \lambda_{31}r_1 + \lambda_{32}r_1(p_1^2 + r_1^2) + \\ &\quad + \lambda_{33}p_0r_1 + \lambda_{34}(p_1r_2 - p_2r_1), \end{aligned}$$

где $\lambda_{10} = k_8$; $\lambda_{11} = k_9$; $\lambda_{21} = \lambda_{31} = \lambda_{i1}$; $\lambda_{22} = \lambda_{32} = \lambda_{i2}$; $\lambda_{23} = \lambda_{33} = \lambda_{i3}$; $\lambda_{24} = \lambda_{34} = \lambda_{i4}$. Последние коэффициенты определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \lambda_{i1} &= \pi \rho h_t^3 s_{0100}^2; \\ \lambda_{i2} &= \frac{3\pi \rho h_t}{4x_{20}^2} (x_{20}^2 s_{0300}^2 - 4s_{0200}^2 s_{0100}^2); \\ \lambda_{i3} &= 3\pi \rho h_t^2 s_{1100}^2; \quad \lambda_{i4} = \frac{3}{2} \pi \rho h_t^2 s_{0110}^2, \end{aligned} \quad (44)$$

причем $s_{0200}^1 = e_{11}$, а квадратуры s_{ijkl}^2 ($i, j, k, l = 0, 1, 2, 3$) имеют вид

$$\begin{aligned} s_{0100}^2 &= \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_1(x_2) dx_2; \\ s_{1100}^2 &= \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_0(x_2) f_1(x_2) dx_2; \\ s_{0300}^2 &= \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_1(x_2)^3 dx_2; \\ s_{0110}^2 &= \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_1(x_2) f_2(x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Коэффициенты λ_{ijk} из выражения (36) опреде-

ляются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{211} &= \lambda_{311} = \lambda_{i1}, \\ \lambda_{2131} &= \lambda_{3131} = \frac{1}{4} (3\lambda_{i2} - (4o_0^{(0)} + o_0^{(2)})\lambda_{i3} - \\ &\quad - (4o_2^{(0)} + o_2^{(2)})\lambda_{i4}), \\ \lambda_{2132} &= \lambda_{3132} = \frac{1}{4} (\lambda_{i2} - (4o_0^{(0)} - o_0^{(2)})\lambda_{i3} + \\ &\quad + (4o_2^{(0)} - 3o_2^{(2)})\lambda_{i4}), \\ \lambda_{233} &= \lambda_{333} = \frac{9}{4} (\lambda_{i2} - o_0^{(2)}\lambda_{i3} - o_2^{(2)}\lambda_{i4}). \end{aligned} \quad (45)$$

Расширенное представление вертикальной координаты вектора l_1 (43), фигурирующей в (13b), имеет вид

$$\begin{aligned} l_1 &= k_8 + k_9(p_1^2 + r_1^2) + k_{10}p_0^2 + k_{11}(p_2^2 + r_2^2) + \\ &\quad + k_{12}(p_3^2 + r_3^2) + k_{14}(2p_1r_1r_2 + p_2(p_1^2 - r_1^2)) + \\ &\quad + k_{13}p_0(r_1^2 + p_1^2) + k_{16}(2p_1^2r_1^2 + p_1^4 + r_1^4) + \\ &\quad + k_{15}(r_1(p_2r_3 - p_3r_2) + p_1(r_2r_3 + p_2p_3)) + \\ &\quad + k_{17}(p_1p_3(p_1^2 - 3r_1^2) + r_1r_3(3p_1^2 - r_1^2)). \end{aligned}$$

Выражения для безразмерных гидродинамических коэффициентов μ_m , σ_m , d_{ij} и g_j ($m=0, 1, 2, 3$, $i=1, \dots, 15$, $j=0, \dots, 6$) уравнения (17) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{mn}^2 &= g\kappa_{mn}; \quad \sigma_0^2 = \frac{2gk_{10}}{\mu_0}; \quad \sigma_1^2 = \frac{2gk_9}{\mu_1}; \\ \sigma_2^2 &= \frac{2gk_{11}}{\mu_2}; \quad \sigma_3^2 = \frac{2gk_{12}}{\mu_3}; \\ d_1 &= \frac{d_1}{\mu_1}; \quad d_2 = \frac{d_2}{\mu_1}; \quad d_3 = \frac{d_3}{\mu_1}; \\ d_4 &= \frac{d_4}{\mu_1}; \quad d_5 = \frac{d_5}{\mu_1}; \quad d_6 = \frac{d_6}{\mu_1}; \\ d_7 &= \frac{d_7}{\mu_2}; \quad d_8 = \frac{d_8}{\mu_0}; \quad d_9 = \frac{d_9}{\mu_2}; \\ d_{10} &= \frac{d_{10}}{\mu_0}; \quad d_{11} = \frac{d_{11}}{\mu_3}; \quad d_{12} = \frac{d_{12}}{\mu_3}; \\ d_{13} &= \frac{d_{13}}{\mu_3}; \quad d_{14} = \frac{d_{14}}{\mu_3}; \quad d_{15} = \frac{d_{15}}{\mu_3}; \\ g_0 &= \frac{k_{13}}{\kappa_{01}\mu_0}; \quad g_1 = \frac{2k_{13}}{\kappa_{11}\mu_1}; \quad g_2 = \frac{2k_{14}}{\kappa_{11}\mu_1}; \\ g_3 &= \frac{4k_{16}}{\kappa_{11}\mu_1}; \quad g_4 = \frac{k_{14}}{\kappa_{21}\mu_2}; \quad g_5 = \frac{k_{15}}{\kappa_{31}\mu_3}; \\ g_6 &= \frac{k_{17}}{\kappa_{31}\mu_3}; \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\mu_1}. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь μ_i и d_k ($k = 1, \dots, 15$) определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= b_2c_1; & \mu_1 &= b_8c_3; & \mu_2 &= b_{14}c_{11}; \\ \mu_3 &= b_{20}c_{13}; & d_2 &= b_9c_3 + b_8c_{10} + 2b_{15}c_{12}; \\ d_1 &= 2b_3c_2 + 3b_9c_3 + b_8c_9 + 2b_{15}c_{12}; \\ d_2 &= b_9c_3 + b_8c_{10} + 2b_{15}c_{12}; \\ d_3 &= b_{10}c_3 + b_8c_7; & d_4 &= b_8c_6 + 2b_{15}c_{11}; \\ d_5 &= b_{11}c_3 + b_8c_5; & d_6 &= 2b_3c_1 + b_8c_4; \\ d_7 &= b_{14}c_{12} - (b_{39}c_3^2)/2; & d_8 &= b_2c_2 + (b_{38}c_3^2)/2; \\ d_9 &= b_{10}c_3 + b_{14}c_{12}; & d_{10} &= b_2c_2 + b_{11}c_3; \\ d_{11} &= b_{13}c_3 + b_{18}c_{12} + b_{20}c_{16}; \\ d_{12} &= b_{18}c_{12} - (b_{42}c_3^2)/2 - b_{45}c_3c_{12} + 2b_{20}c_{16}; \\ d_{13} &= b_{12}c_3 + b_{20}c_{15}; \\ d_{14} &= b_{18}c_{11} + b_{20}c_{14}; \\ d_{15} &= -b_{45}c_3c_{11} + b_{20}c_{14} + b_{20}c_{15}. \end{aligned}$$

Асимптотическое разложение (14) дает следующие представления:

$$\begin{aligned} A_1 &= b_1 + b_2p_0 + b_3(p_1^2 + r_1^2) + b_4p_0^2 + \\ &+ b_5(r_2^2 + p_2^2) + b_6p_0(p_1^2 + r_1^2) + \\ &+ b_7(p_1^2p_2 + 2p_1r_1r_2 - p_2r_1^2); \\ A_2 &= b_8r_1 + b_9r_1(p_1^2 + r_1^2) + b_{11}p_0r_1 + \\ &+ b_{10}(p_1r_2 - r_1p_2) + b_{12}(p_2r_3 - r_2p_3) + \\ &+ b_{13}(r_3(p_1^2 - r_1^2) - 2p_1r_1p_3); \\ A_3 &= b_8p_1 + b_9p_1(p_1^2 + r_1^2) + b_{11}p_0p_1 + \\ &+ b_{10}(p_1p_2 + r_1r_2) + b_{12}(p_2p_3 + r_2r_3) + \\ &+ b_{13}(p_3(p_1^2 - r_1^2) + 2p_1r_1r_3); \\ A_4 &= b_{14}r_2 + 2b_{15}p_1r_1 + b_{16}p_0r_2 + \\ &+ 2b_{19}p_0p_1r_1 + b_{17}r_2(p_1^2 + r_1^2) + \\ &+ b_{18}(p_1r_3 - p_3r_1); \\ A_5 &= b_{14}p_2 + b_{15}(p_1^2 - r_1^2) + b_{16}p_0p_2 + \\ &+ b_{17}p_2(p_1^2 + r_1^2) + b_{18}(p_1p_3 + r_1r_3) + \\ &+ b_{19}p_0(p_1^2 - r_1^2); \\ A_6 &= b_{20}r_3 + b_{21}r_1(3p_1^2 - r_1^2) + b_{24}p_0r_3 + \\ &+ b_{22}(r_1p_2 + p_1r_2) + b_{23}r_3(p_1^2 + r_1^2); \\ A_7 &= b_{20}p_3 + b_{21}p_1(p_1^2 - 3r_1^2) + b_{24}p_0p_3 + \\ &+ b_{22}(p_1p_2 - r_1r_2) + b_{23}p_3(p_1^2 + r_1^2); \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= b_{25} + b_{26}p_0 + b_{27}(p_1^2 + r_1^2); \\ A_{12} &= b_{28}r_1 + b_{29}p_0r_1 + b_{30}(p_1r_2 - r_1p_2) + \\ &+ b_{31}r_1(p_1^2 + r_1^2); \\ A_{13} &= b_{28}p_1 + b_{29}p_0p_1 + b_{30}(p_1p_2 + r_1r_2) + \\ &+ b_{31}p_1(p_1^2 + r_1^2); \\ A_{14} &= b_{32}r_2 + 2b_{33}p_1r_1 + b_{34}(p_1r_3 - r_1p_3); \\ A_{15} &= b_{32}p_2 + b_{33}(p_1^2 - r_1^2) + b_{34}(p_1p_3 + r_1r_3); \\ A_{16} &= b_{35}r_3 + b_{36}(p_1r_2 + r_1p_2); \\ A_{17} &= b_{35}p_3 + b_{36}(p_1p_2 - r_1r_2); \\ A_{22} &= b_{37} + b_{38}p_0 + b_{39}p_2 + b_{40}p_1^2 + b_{41}r_1^2 + \\ &+ b_{42}(p_1p_3 + r_1r_3); \\ A_{23} &= -b_{39}r_2 + b_{43}p_1r_1 + b_{42}(r_1p_3 - p_1r_3); \\ A_{24} &= b_{44}p_1 + b_{45}p_3 + b_{46}p_0p_1 + b_{47}p_1p_2 + \\ &+ b_{48}r_1r_2 + b_{49}p_1(p_1^2 + r_1^2); \\ A_{25} &= -b_{44}r_1 - b_{45}r_3 - b_{46}p_0r_1 - b_{47}p_1r_2 + \\ &+ b_{48}r_1p_2 - b_{49}r_1(p_1^2 + r_1^2); \\ A_{26} &= b_{50}p_2 + b_{51}(p_1^2 - r_1^2) + b_{52}p_1p_3 + \\ &+ b_{53}r_1r_3; \\ A_{27} &= -b_{50}r_2 - 2b_{51}p_1r_1 - b_{52}p_1r_3 + b_{53}r_1p_3; \\ A_{33} &= b_{37} + b_{38}p_0 - b_{39}p_2 + b_{40}r_1^2 + b_{41}p_1^2 - \\ &- b_{42}(p_1p_3 + r_1r_3); \\ A_{34} &= b_{44}r_1 - b_{45}r_3 + b_{46}p_0r_1 - b_{47}r_1p_2 + \\ &+ b_{48}p_1r_2 + b_{49}r_1(p_1^2 + r_1^2); \\ A_{35} &= b_{44}p_1 - b_{45}p_3 + b_{46}p_0p_1 + b_{47}r_1r_2 + \\ &+ b_{48}p_1p_2 + b_{49}p_1(p_1^2 + r_1^2); \\ A_{36} &= b_{50}r_2 + 2b_{51}p_1r_1 - b_{52}r_1p_3 + b_{53}p_1r_3; \\ A_{37} &= b_{50}p_2 + b_{51}(p_1^2 - r_1^2) + b_{52}r_1r_3 + b_{53}p_1p_3; \\ A_{44} &= b_{54} + b_{55}p_0 + b_{56}(p_1^2 + r_1^2) + \\ &+ b_{57}(p_1p_3 - r_1r_3); \\ A_{45} &= -b_{57}(r_1p_3 + p_1r_3); \\ A_{46} &= b_{58}p_1 + b_{59}p_0p_1 + b_{60}(p_1p_2 + r_1r_2) + \\ &+ b_{61}p_1(p_1^2 + r_1^2); \\ A_{47} &= -b_{58}r_1 - b_{59}p_0r_1 + b_{60}(r_1p_2 - p_1r_2) + \\ &+ b_{61}r_1(r_1^2 - p_1^2); \\ A_{55} &= b_{54} + b_{55}p_0 + b_{56}(p_1^2 + r_1^2) + \\ &+ b_{57}(r_1r_3 - p_1p_3); \end{aligned} \quad (48a)$$

$$\begin{aligned}
 A_{56} &= b_{58}r_1 + b_{59}p_0r_1 + b_{60}(p_1r_2 - r_1p_2) + \\
 &\quad + b_{61}r_1(p_1^2 + r_1^2); \\
 A_{57} &= b_{58}p_1 + b_{59}p_0p_1 + b_{60}(p_1p_2 + r_1r_2) + \\
 &\quad + b_{61}p_1(p_1^2 + r_1^2); \quad (48b) \\
 A_{66} &= b_{62} + b_{63}p_0 + b_{64}(p_1^2 + r_1^2); \\
 A_{77} &= b_{62} + b_{63}p_0 + b_{64}(p_1^2 + r_1^2); \\
 A_{67} &= 0.
 \end{aligned}$$

Решая (13а) как систему линейных уравнений относительно Z_{j+1} , с учетом (47) и (48), с точностью до $O(\epsilon^3)$ получаем:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= c_1p'_0 + c_2p_1p'_1 + c_2r_1r'_1; \\
 Z_2 &= c_3r'_1 + c_4r_1p'_0 + c_5p_0r'_1 + c_6p_1r'_2 - \\
 &\quad - c_6r_1p'_2 + c_7r_2p'_1 - c_7p_2r'_1 + c_8p_1r_1p'_1 + \\
 &\quad + c_9r_1^2r'_1 + c_{10}p_1^2r'_1; \\
 Z_3 &= c_3p'_1 + c_4p_1p'_0 + c_5p_0p'_1 + c_6p_1p'_2 + \\
 &\quad + c_6r_1r'_2 + c_7p_2p'_1 + c_7r_2r'_1 + c_8p_1r_1r'_1 + \\
 &\quad + c_9p_1^2p'_1 + c_{10}r_1^2p'_1; \\
 Z_4 &= c_{11}r'_2 + c_{12}r_1p'_1 + c_{12}p_1r'_1; \\
 Z_5 &= c_{11}p'_2 + c_{12}p_1p'_1 - c_{12}r_1r'_1; \\
 Z_6 &= c_{13}r'_3 + c_{14}p_1r'_2 + c_{14}r_1p'_2 + c_{15}p_2r'_1 + \\
 &\quad + c_{15}r_2p'_1 + c_{16}p_1^2r'_1 + 2c_{16}p_1r_1p'_1 - c_{16}r_1^2r'_1; \\
 Z_7 &= c_{13}p'_3 + c_{14}p_1p'_2 - c_{14}r_1r'_2 + c_{15}p_2p'_1 - \\
 &\quad - c_{15}r_2r'_1 + c_{16}p_1^2p'_1 - 2c_{16}p_1r_1r'_1 - c_{16}r_1^2p'_1,
 \end{aligned}$$

где c_j определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{b_2}{b_{25}}; & c_2 &= \frac{1}{b_{25}} \left(2b_3 - \frac{b_8b_{28}}{b_{37}} \right); \\
 c_3 &= \frac{b_8}{b_{37}}; & c_4 &= \frac{1}{b_{37}} \left(b_{11} - \frac{b_2b_{28}}{b_{25}} \right); \\
 c_5 &= \frac{1}{b_{37}} \left(b_{11} - \frac{b_8b_{38}}{b_{37}} \right); \\
 c_6 &= \frac{1}{b_{37}} \left(b_{10} - \frac{b_{14}b_{44}}{b_{54}} \right); \\
 c_7 &= \frac{1}{b_{37}} \left(b_{10} - \frac{b_8b_{39}}{b_{37}} \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_8 &= \frac{1}{b_{37}} \left(2 \left(b_9 - \frac{b_3b_{28}}{b_{25}} \right) - \frac{b_8}{b_{37}} \left(b_{43} - \frac{b_{28}^2}{b_{25}} \right) \right); \\
 c_9 &= \frac{1}{b_{37}} \left(3b_9 - \frac{2b_{28}}{b_{25}} \left(b_3 - \frac{b_8b_{28}}{b_{37}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b_8}{b_{37}} \left(b_{41} + \frac{b_{28}^2}{b_{25}} \right) - \frac{b_{44}}{b_{54}} \left(2b_{15} - \frac{b_8b_{44}}{b_{37}} \right) \right); \\
 c_{10} &= \frac{1}{b_{37}} \left(b_9 - \frac{2b_{15}b_{44}}{b_{54}} - \frac{b_8}{b_{37}} \left(b_{40} - \frac{b_{44}^2}{b_{54}} \right) \right); \\
 c_{11} &= \frac{b_{14}}{b_{54}}; & c_{12} &= \frac{1}{b_{54}} \left(2b_{15} - \frac{b_8b_{44}}{b_{37}} \right); \\
 c_{13} &= \frac{b_{20}}{b_{62}}; & c_{14} &= \frac{1}{b_{62}} \left(b_{22} - \frac{b_{14}b_{58}}{b_{54}} \right); \\
 c_{15} &= \frac{1}{b_{62}} \left(b_{22} - \frac{b_8b_{50}}{b_{37}} \right); \\
 c_{16} &= \frac{1}{b_{62}} \left(3b_{21} - \frac{b_8}{b_{37}} \left(b_{51} + \frac{b_{44}b_{58}}{b_{54}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2b_{58}}{b_{54}} \left(b_{15} - \frac{b_8b_{44}}{b_{37}} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Коэффициенты b_i ($i = 1, \dots, 64$) выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 2g_{00}; & b_3 &= g_{0211} + 2k_2g_{01}; \\
 b_2 &= 2g_{010}; & b_4 &= 2g_{0200} + 2k_1g_{01}; \\
 b_5 &= g_{0222} + 2k_5g_{01}; & b_8 &= g_{111}; \\
 b_6 &= 3g_{03011} + 4k_2g_{020} + 2k_3g_{01}; \\
 b_7 &= 3g_{03112}/2 + 2k_4g_{01}; & b_{10} &= g_{1212}; \\
 b_9 &= 3g_{13111}/4 + 2k_2g_{121}; & b_{11} &= 2g_{1201}; \\
 b_{12} &= g_{1223}; & b_{13} &= 3g_{13113}/4; & b_{14} &= g_{212}; \\
 b_{15} &= g_{2211}/2; & b_{16} &= 2g_{2202}; & b_{18} &= g_{2213}; \\
 b_{17} &= 3g_{23112}/2 + 2k_2g_{222}; & b_{19} &= 3g_{23011}/2; \\
 b_{20} &= g_{313}; & b_{21} &= g_{33111}/4; & b_{22} &= g_{3212}; \\
 b_{23} &= 3g_{33113}/2 + 2k_2g_{323}; & b_{24} &= 2g_{3203}; \\
 b_{25} &= 2q_{000}; & b_{26} &= 2q_{0010}; & b_{28} &= q_{0111}; \\
 b_{27} &= q_{00211} + 2k_2q_{001}; & b_{29} &= 2q_{01201}; \\
 b_{30} &= q_{01212}; & b_{31} &= 2k_2q_{0121}; & b_{32} &= q_{0212}; \\
 b_{33} &= q_{02211}/2; & b_{34} &= q_{02213}; & b_{35} &= q_{0313}; \\
 b_{36} &= q_{03212}; & b_{37} &= q_{110}; & b_{38} &= q_{1110}; \\
 b_{39} &= q_{1112}/2; & b_{40} &= k_2q_{111} + q_{112111}/4; \\
 b_{41} &= k_2q_{111} + q_{112112}/4; & b_{42} &= q_{11213}/2; \\
 b_{43} &= q_{11211}/2; & b_{44} &= q_{1211}; & b_{45} &= q_{1213};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{46} &= q_{12201}; & b_{47} &= 2 q_{122121}; & b_{48} &= q_{122122}; \\
 b_{49} &= k_2 q_{1221}; & b_{50} &= q_{1312}/2; & b_{51} &= q_{13211}/4; \\
 b_{52} &= 3 q_{132131}; & b_{53} &= q_{132132}; & b_{54} &= q_{220}; \\
 b_{55} &= q_{2210}; & b_{56} &= k_2 q_{221} + q_{22211}; \\
 b_{57} &= q_{22213}; & b_{58} &= q_{2311}; & b_{59} &= q_{23201}; \\
 b_{60} &= q_{23212}; & b_{61} &= k_2 q_{2321}; & b_{62} &= q_{330}; \\
 b_{63} &= q_{3310}; & b_{64} &= k_2 q_{331} + q_{33211}.
 \end{aligned}$$

Квадратуры g_i и q_j принимают вид

$$\begin{aligned}
 g_{01} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_1^0(x_2) dx_2; \\
 g_{010} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_1^0(x_2) f_0(x_2) dx_2; \\
 g_{0211} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_2^0(x_2) (f_1(x_2))^2 dx_2; \\
 g_{111} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_1^1(x_2) f_1(x_2) dx_2; \\
 g_{121} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_2^1(x_2) f_1(x_2) dx_2; \\
 g_{1201} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_2^1(x_2) f_0(x_2) f_1(x_2) dx_2; \\
 g_{1212} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_2^1(x_2) f_1(x_2) f_2(x_2) dx_2; \\
 g_{1223} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_2^1(x_2) f_2(x_2) f_3(x_2) dx_2; \\
 g_{13111} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_3^1(x_2) (f_1(x_2))^3 dx_2; \\
 g_{13113} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_3^1(x_2) (f_1(x_2))^2 f_3(x_2) dx_2; \\
 g_{212} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_1^2(x_2) f_2(x_2) dx_2; \\
 g_{2211} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_2^2(x_2) (f_1(x_2))^2 dx_2; \\
 g_{2213} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_2^2(x_2) f_1(x_2) f_3(x_2) dx_2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{313} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_1^3(x_2) f_3(x_2) dx_2; \\
 g_{3212} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_2^3(x_2) f_1(x_2) f_2(x_2) dx_2; \\
 g_{33111} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 B_3^3(x_2) (f_1(x_2))^3 dx_2; \\
 q_{000} &= \pi \int_0^{x_{20}} F_0^{00}(x_2) dx_2; \\
 q_{0111} &= \pi \int_0^{x_{20}} F_1^{01}(x_2) f_1(x_2) dx_2; \\
 q_{110} &= \pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_0^{11}(x_2) dx_2 + \\
 &\quad + \pi \int_0^{x_{20}} F_0^{11}(x_2) dx_2; \\
 q_{1110} &= \pi \int_0^{x_{20}} F_1^{11}(x_2) f_0(x_2) dx_2 + \\
 &\quad + \pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_1^{11}(x_2) f_0(x_2) dx_2; \\
 q_{1112} &= \pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_1^{11}(x_2) f_2(x_2) dx_2 - \\
 &\quad - \pi \int_0^{x_{20}} F_1^{11}(x_2) f_2(x_2) dx_2; \\
 q_{111} &= \pi \int_0^{x_{20}} F_1^{11}(x_2) dx_2 + \\
 &\quad + \pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_1^{11}(x_2) dx_2; \\
 q_{11213} &= \pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_2^{11}(x_2) f_1(x_2) f_3(x_2) dx_2 - \\
 &\quad - \pi \int_0^{x_{20}} F_2^{11}(x_2) f_1(x_2) f_3(x_2) dx_2; \\
 q_{112111} &= 3\pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_2^{11}(x_2) (f_1(x_2))^2 dx_2 + \\
 &\quad + \pi \int_0^{x_{20}} F_2^{11}(x_2) (f_1(x_2))^2 dx_2;
 \end{aligned}$$

$$q_{112112} = \pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_2^{11}(x_2) (f_1(x_2))^2 dx_2 + 3\pi \int_0^{x_{20}} F_2^{11}(x_2) (f_1(x_2))^2 dx_2;$$

$$q_{1211} = \pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_1^{12}(x_2) f_1(x_2) dx_2 + \frac{\pi}{2} \int_0^{x_{20}} F_1^{12}(x_2) f_1(x_2) dx_2;$$

$$q_{1213} = \pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_1^{12}(x_2) f_3(x_2) dx_2 - \frac{\pi}{2} \int_0^{x_{20}} F_1^{12}(x_2) f_3(x_2) dx_2;$$

$$q_{1312} = 3\pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_1^{13}(x_2) f_2(x_2) dx_2 + \pi \int_0^{x_{20}} F_1^{13}(x_2) f_2(x_2) dx_2;$$

$$q_{13211} = 3\pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_2^{13}(x_2) (f_1(x_2))^2 dx_2 + \pi \int_0^{x_{20}} F_2^{13}(x_2) (f_1(x_2))^2 dx_2;$$

$$q_{220} = 4\pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_0^{22}(x_2) dx_2 + \pi \int_0^{x_{20}} F_0^{22}(x_2) dx_2;$$

$$q_{2311} = 3\pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_1^{23}(x_2) f_1(x_2) dx_2 + \frac{\pi}{2} \int_0^{x_{20}} F_1^{23}(x_2) f_1(x_2) dx_2;$$

$$q_{330} = 9\pi \int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B_0^{33}(x_2) dx_2 + \pi \int_0^{x_{20}} F_0^{33}(x_2) dx_2.$$

Подынтегральные функции $F_k^{ij}(x_2)$, $B_k^{ij}(x_2)$ и $B_k^i(x_2)$, входящие в эти коэффициенты, зависят от $b_k^{(m)}(x_2)$ и $\bar{b}_k^{(m)}(x_2)$.

Функции $F_k^{ij}(x_2)$ задаются соотношениями

$$F_i^{nk}(x_2) = x_2 D_i^{nk} - x_2^2 (E_i^{nk} - E_i^{kn}) + x_2 (1 + x_2^2) C_i^{nk}.$$

Функции B_l^{nk} , C_l^{nk} , D_l^{nk} , E_l^{nk} и E_l^{kn} определяются так:

$$X_{l,l,k}^{nk}(x, y) = k_l \left(\sum_{i=l_k}^{q_1} \sum_{j=l_k}^{q_1} s_l^{11} xy + \sum_{i=l_k}^{q_1} \sum_{j=l_k}^{q_2} s_l^{12} x\bar{y} + \sum_{i=l_k}^{q_2} \sum_{j=l_k}^{q_1} s_l^{21} \bar{x}y + \sum_{i=l_k}^{q_2} \sum_{j=l_k}^{q_2} s_l^{22} \bar{x}\bar{y} \right),$$

$$k_l = \begin{cases} 1, & l = 0, 1, \\ 1/2, & l = 2, \end{cases} \quad l_k = 0, 1,$$

где

$$s_0^{11} = \frac{h_t^{1+\nu_{ni}+\nu_{kj}} - h_b^{1+\nu_{ni}+\nu_{kj}}}{1 + \nu_{ni} + \nu_{kj}};$$

$$s_0^{12} = \frac{h_t^{\nu_{ni}-\nu_{kj}} - h_b^{\nu_{ni}-\nu_{kj}}}{\nu_{ni} - \nu_{kj}};$$

$$s_0^{21} = \frac{h_t^{\nu_{kj}-\nu_{ni}} - h_b^{\nu_{kj}-\nu_{ni}}}{\nu_{kj} - \nu_{ni}};$$

$$s_0^{22} = \frac{h_t^{-1-\nu_{ni}-\nu_{kj}} - h_b^{-1-\nu_{ni}-\nu_{kj}}}{-1 - \nu_{ni} - \nu_{kj}};$$

$$s_1^{11} = h_t^{\nu_{ni}+\nu_{kj}}; \quad s_1^{12} = h_t^{-1+\nu_{ni}-\nu_{kj}};$$

$$s_1^{21} = h_t^{-1-\nu_{ni}+\nu_{kj}}; \quad s_1^{22} = h_t^{-2-\nu_{ni}-\nu_{kj}};$$

$$s_2^{11} = h_t^{-1+\nu_{ni}+\nu_{kj}} (\nu_{ni} + \nu_{kj});$$

$$s_2^{12} = h_t^{-2+\nu_{ni}-\nu_{kj}} (\nu_{ni} - \nu_{kj} - 1);$$

$$s_2^{21} = h_t^{-2-\nu_{ni}+\nu_{kj}} (\nu_{kj} - \nu_{ni} - 1);$$

$$s_2^{22} = h_t^{-3-\nu_{ni}-\nu_{kj}} (\nu_{ni} + \nu_{kj} + 2),$$

причем

$$B_l^{nk} = X_{l,0}^{nk}(b_i^n, b_j^k), \quad C_l^{nk} = X_{l,1}^{nk}(c_i^n, c_j^k),$$

$$D_l^{nk} = X_{l,1}^{nk}(d_i^n, d_j^k), \quad E_l^{nk} = X_{l,1}^{nk}(d_i^n, c_j^k),$$

$$E_l^{kn} = X_{l,1}^{nk}(c_i^n, d_j^k).$$

Функции B_i^m определяются с помощью следующего выражения:

$$B_i^m(x_2) = \sum_{k=0}^{q_1} s_i^1 b_k^m + \sum_{n=0}^{q_2} s_i^2 \bar{b}_n^m, \quad i = 0, \dots, 3.$$

Здесь

$$s_0^1 = \frac{h_t^{\nu_{km}+3} - h_b^{\nu_{km}+3}}{\nu_{km} + 3}; \quad s_1^1 = h_t^{\nu_{km}+2};$$

$$s_0^2 = \frac{h_t^{2-\nu_{nm}} - h_b^{2-\nu_{nm}}}{2 - \nu_{nm}}; \quad s_1^2 = h_t^{1-\nu_{nm}};$$

$$s_2^1 = h_t^{\nu_{km}+1}(\nu_{km} + 2)/2; \quad s_2^2 = \frac{1 - \nu_{nm}}{2h_t^{\nu_{nm}}};$$

$$s_3^1 = h_t^{\nu_{km}}(\nu_{km} + 1)(\nu_{km} + 2)/6;$$

$$s_3^2 = h_t^{-\nu_{nm}-1}(\nu_{nm} - 1)\nu_{nm}/6.$$

Для примера выпишем полное выражения для функции E_1^{nk} :

$$E_1^{nk} = \sum_{j=1}^{q_1} \sum_{i=1}^{q_1} h_t^{\nu_{ni}+\nu_{kj}} d_i^n c_j^k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} h_t^{-1+\nu_{ni}-\nu_{kj}} d_i^n \bar{c}_j^k +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q_1} \sum_{i=1}^{q_2} h_t^{-1-\nu_{ni}+\nu_{kj}} \bar{d}_i^n c_j^k +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q_2} \sum_{i=1}^{q_2} h_t^{-2-\nu_{ni}-\nu_{kj}} \bar{d}_i^n \bar{c}_j^k.$$

Здесь

$$d_i^n = \nu_{ni} b_i^n; \quad d_j^k = \nu_{kj} b_j^k;$$

$$\bar{d}_i^n = (-1 - \nu_{ni}) \bar{b}_i^n; \quad \bar{d}_j^k = (-1 - \nu_{kj}) \bar{b}_j^k;$$

$$c_i^n = \frac{\partial b_i^n}{\partial x_2}; \quad \bar{c}_i^n = \frac{\partial \bar{b}_i^n}{\partial x_2};$$

$$c_j^k = \frac{\partial b_j^k}{\partial x_2}; \quad \bar{c}_j^k = \frac{\partial \bar{b}_j^k}{\partial x_2}.$$

Коэффициенты

$$b_k^{(m)}(x_2) = a_{1k}^{(m)} v_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2),$$

$$\bar{b}_k^{(m)}(x_2) = \bar{a}_{1k}^{(m)} \bar{v}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2),$$

$$m = 0, 1, 2, 3,$$

входят в разложения для поверхностных собственных форм

$$f_m(x_2) = a_{10}^{(m)} + \sum_{k=1}^{q_1} b_k^{(m)}(x_2) + \bar{a}_{10}^{(m)} + \sum_{k=1}^{q_1} \bar{b}_k^{(m)}(x_2),$$

$$m = 0, 1, 2, 3,$$

причем

$$a_{10}^{(0)} \neq 0, \quad \bar{a}_{10}^{(0)} \neq 0, \quad v_{\nu_{00}}^{(0)} = \bar{v}_{\nu_{00}}^{(0)} = 1,$$

$$a_{10}^{(i)} = \bar{a}_{10}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

и в разложения для собственных мод

$$\psi_{mn}(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{q_1} x_1^{\nu_{mk}} b_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{q_2} x_1^{-1-\nu_{mk}} \bar{b}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2).$$

Отметим, что собственные векторы

$$a_{nk}^{(m)} = \hat{a}_{nk}^{(m)} / N_{mn}, \quad \bar{a}_{nk}^{(m)} = \hat{\bar{a}}_{nk}^{(m)} / N_{mn},$$

включают нормировку решения

$$N_{mn} = \psi_{mn}(x_{10}, x_{20}) = 1.$$

Определение использованных выше функций $v_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$ и $\bar{v}_{\nu_{mk}}^{(m)}(x_2)$ было дано в работе [18].

Неизвестные o_m^k , входящие в периодические решения (20), принимают вид

$$o_0^{(0)} = \frac{d_8 - d_{10} + g_0 \bar{\sigma}_0^2}{2\bar{\sigma}_0^2},$$

$$o_0^{(2)} = \frac{d_8 + d_{10} - g_0 \bar{\sigma}_0^2}{4 - \bar{\sigma}_0^2},$$

$$o_2^{(0)} = \frac{d_7 - d_9 + g_4 \bar{\sigma}_2^2}{2\bar{\sigma}_2^2},$$

$$o_2^{(2)} = \frac{d_7 + d_9 - g_4 \bar{\sigma}_2^2}{4 - \bar{\sigma}_2^2},$$

$$o_3^{(1)} = \frac{1}{4(1 - \bar{\sigma}_3^2)} \left(3d_{11} - d_{12} - 4d_{13} o_2^{(0)} - \right.$$

$$\left. - (d_{13} + 4d_{14} - 2d_{15}) o_2^{(2)} - \right.$$

$$\left. - (3g_6 - g_5(4o_2^{(0)} + o_2^{(2)}) \bar{\sigma}_3^2) \right),$$

$$o_3^{(3)} = \frac{1}{4(9 - \bar{\sigma}_3^2)} \left(d_{11} + d_{12} - \right.$$

$$\left. - (d_{13} + 4d_{14} + 2d_{15}) o_2^{(2)} - \right.$$

$$\left. - (g_6 - g_5 o_2^{(2)}) \bar{\sigma}_3^2 \right),$$

$$\bar{\sigma}_m^2 = \frac{\sigma_m^2}{\sigma^2}, \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

Коефіцієнти C_i в вираженнях (33) определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \gamma_0^{(1)} \delta_1^{(1)} - \frac{1}{2} \gamma_0^{(3)} \delta_1^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \delta_2^{(1)} - \frac{1}{2} \gamma_2^{(3)} \delta_2^{(2)} + \bar{\lambda} \left(\mathbf{d}_1 - 2\delta_0^{(3+)} + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{56} \gamma_0^{(4)} + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(4)} \right); \\
 C_2 &= \bar{\lambda} \left(\mathbf{d}_2 - 2\delta_0^{(3-)} - \mathbf{d}_3 \gamma_2^{(2)} + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(4)} \right) - \frac{1}{2} \gamma_2^{(3)} \delta_2^{(2)}; \\
 C_3 &= \frac{1}{2} \gamma_0^{(3)} \delta_1^{(2)} + \frac{1}{2} \gamma_2^{(3)} \delta_2^{(2)} + \bar{\lambda} \left(-\mathbf{d}_1 + 2\delta_0^{(3+)} + \mathbf{d}_5 \gamma_0^{(2)} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{56} \gamma_0^{(4)} - \mathbf{d}_3 \gamma_2^{(2)} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(4)} \right); \\
 C_4 &= -\gamma_2^{(1)} \delta_2^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma_2^{(3)} \delta_2^{(2)} + \bar{\lambda} \left(-\mathbf{d}_2 + 2\delta_0^{(3-)} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(4)} \right); \\
 C_5 &= -\gamma_0^{(1)} \delta_1^{(1)} - \frac{1}{2} \gamma_0^{(3)} \delta_1^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \delta_2^{(1)} + \gamma_2^{(3)} \delta_2^{(2)} + \bar{\lambda} \left(\mathbf{d}_1 - 3\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_3 \gamma_2^{(2)} + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{56} \gamma_0^{(4)} - \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(4)} \right); \\
 C_6 &= -\frac{1}{2} \gamma_0^{(3)} \delta_1^{(2)} + \gamma_2^{(1)} \delta_2^{(1)} + \gamma_2^{(3)} \delta_2^{(2)} + \bar{\lambda} \left(\mathbf{d}_1 - 3\mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_5 \gamma_0^{(2)} + \mathbf{d}_3 \gamma_2^{(2)} + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{56} \gamma_0^{(4)} - \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(4)} \right); \\
 C_7 &= \frac{3}{4} (\bar{\lambda}^2 - 2) \mathbf{d}_1 - (\bar{\lambda}^2 - 1) \mathbf{d}_5 o_0^{(0)} - (\bar{\lambda}^2 - 1) \mathbf{d}_3 o_2^{(0)} - \frac{1}{4} o_0^{(2)} \delta_1^{(0)} - \gamma_0^{(2)} \delta_1^{(1)} - \frac{1}{2} \gamma_0^{(4)} \delta_1^{(2)} - \\
 &\quad - \frac{1}{4} o_2^{(2)} \delta_2^{(0)} + \gamma_2^{(2)} \delta_2^{(1)} - \frac{1}{2} \gamma_2^{(4)} \delta_2^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \left(\mathbf{d}_{56} \gamma_0^{(3)} + \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(3)} \right) + \frac{1}{4} \bar{\sigma}_1^2 \left(9\mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_1 \delta_0^{(0+)} - \mathbf{g}_2 \delta_0^{(2+)} \right); \\
 C_8 &= \frac{d_1}{2} + \frac{1}{4} (\bar{\lambda}^2 - 8) \mathbf{d}_2 + \frac{1}{4} o_0^{(2)} \delta_1^{(0)} + (\bar{\lambda}^2 - 1) \mathbf{d}_5 o_0^{(0)} + (\bar{\lambda}^2 - 1) \mathbf{d}_3 o_2^{(0)} - \frac{1}{4} o_2^{(2)} \delta_2^{(0)} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \gamma_2^{(4)} \delta_2^{(2)} - \bar{\lambda} \left(\mathbf{d}_3 \gamma_2^{(1)} + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(3)} \right) \frac{1}{4} \bar{\sigma}_1^2 \left(\mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_1 \delta_0^{(0-)} + \mathbf{g}_2 \delta_0^{(2-)} \right); \\
 C_9 &= \frac{1}{4} (\bar{\lambda}^2 + 4) \mathbf{d}_1 - \frac{1}{4} (\bar{\lambda}^2 + 16) \mathbf{d}_2 - \gamma_0^{(2)} \delta_1^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma_0^{(4)} \delta_1^{(2)} - \frac{1}{4} o_2^{(2)} \delta_2^{(0)} - \gamma_2^{(2)} \delta_2^{(1)} - \\
 &\quad - \gamma_2^{(4)} \delta_2^{(2)} + \bar{\lambda} \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}_{56} \gamma_0^{(3)} + \mathbf{d}_3 \gamma_2^{(1)} - \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(3)} \right) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2 \left(\mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_2 o_2^{(2)} \right); \\
 C_{10} &= \frac{1}{4} (\bar{\lambda}^2 - 2) \mathbf{d}_1 - (\bar{\lambda}^2 - 1) \mathbf{d}_5 o_0^{(0)} - (\bar{\lambda}^2 - 1) \mathbf{d}_3 o_2^{(0)} + \frac{1}{4} o_0^{(2)} \delta_1^{(0)} - \frac{1}{2} \gamma_0^{(4)} \delta_1^{(2)} + \frac{1}{4} o_2^{(2)} \delta_2^{(0)} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \gamma_2^{(4)} \delta_2^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \left(2\mathbf{d}_5 \gamma_0^{(1)} + \mathbf{d}_{56} \gamma_0^{(3)} - 2\mathbf{d}_3 \gamma_2^{(1)} + \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(3)} \right) + \frac{1}{4} \bar{\sigma}_1^2 \left(3\mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_1 \delta_0^{(0-)} - \mathbf{g}_2 \delta_0^{(2-)} \right); \\
 C_{11} &= -\frac{d_1}{2} + \frac{3}{4} \bar{\lambda}^2 \mathbf{d}_2 - (\bar{\lambda}^2 - 1) \mathbf{d}_5 o_0^{(0)} + (\bar{\lambda}^2 - 1) \mathbf{d}_3 o_2^{(0)} - \frac{1}{4} o_0^{(2)} \delta_1^{(0)} + \\
 &\quad + \frac{1}{4} o_2^{(2)} \delta_2^{(0)} - \gamma_2^{(2)} \delta_2^{(1)} - \frac{1}{2} \gamma_2^{(4)} \delta_2^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(3)} + \frac{1}{4} \bar{\sigma}_1^2 \left(3\mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_1 \delta_0^{(0+)} + \mathbf{g}_2 \delta_0^{(2+)} \right); \\
 C_{12} &= \frac{1}{4} (\bar{\lambda}^2 - 4) \mathbf{d}_1 - \frac{1}{4} (\bar{\lambda}^2 - 8) \mathbf{d}_2 - \frac{1}{2} \gamma_0^{(4)} \delta_1^{(2)} - \frac{1}{4} o_2^{(2)} \delta_2^{(0)} - \gamma_2^{(2)} \delta_2^{(1)} + \gamma_2^{(4)} \delta_2^{(2)} + \\
 &\quad + \bar{\lambda} \left(\mathbf{d}_5 \gamma_0^{(1)} - \frac{1}{2} \mathbf{d}_{56} \gamma_0^{(3)} + \mathbf{d}_3 \gamma_2^{(1)} + \mathbf{d}_{34} \gamma_2^{(3)} \right) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2 \left(\mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_2 o_2^{(2)} \right); \\
 C_{13} &= 2\bar{\lambda}; \quad C_{14} = \bar{\lambda}^2 + \bar{\sigma}_1^2 - 1.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_{34} &= \mathbf{d}_3 - 4\mathbf{d}_4 & \mathbf{d}_{56} &= \mathbf{d}_5 - 4\mathbf{d}_6; & \delta_0^{(0+)} &= 4o_0^{(0)} + o_0^{(2)}; & \delta_0^{(0-)} &= 4o_0^{(0)} - o_0^{(2)}; \\
 \delta_0^{(2+)} &= 4o_2^{(0)} + o_2^{(2)}; & \delta_0^{(2-)} &= 4o_2^{(0)} - o_2^{(2)}; & \delta_0^{(3+)} &= \mathbf{d}_5 o_0^{(0)} + \mathbf{d}_3 o_2^{(0)}; & \delta_0^{(3-)} &= \mathbf{d}_5 o_0^{(0)} - \mathbf{d}_3 o_2^{(0)}; \\
 \delta_1^{(0)} &= \bar{\lambda}^2 \mathbf{d}_5 + \mathbf{d}_{56}; & \delta_2^{(0)} &= \bar{\lambda}^2 \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_{34}; & \delta_1^{(1)} &= \bar{\lambda}^2 \mathbf{d}_6 + \mathbf{g}_1 \bar{\sigma}_1^2 - \mathbf{d}_5; & \delta_2^{(1)} &= \bar{\lambda}^2 \mathbf{d}_4 + \mathbf{g}_2 \bar{\sigma}_1^2 - \mathbf{d}_3; \\
 & & \delta_1^{(2)} &= \bar{\lambda}^2 \mathbf{d}_6 + \mathbf{g}_1 \bar{\sigma}_1^2 + \mathbf{d}_{56}; & \delta_2^{(2)} &= \bar{\lambda}^2 \mathbf{d}_4 + \mathbf{g}_2 \bar{\sigma}_1^2 + \mathbf{d}_{34}.
 \end{aligned}$$