

УДК 539.3

ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ И ПОТЕРЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ ГИБКОЙ ЖЕСТКО ЗАЦЕМЛЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРАМИ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

В. Г. КАРНАУХОВ*, А. Ю. ШЕВЧЕНКО*, Т. В. КАРНАУХОВА**

* Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

** Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев

Одержано 02.04.2011

Методом Бубнова–Галеркина решена задача о вынужденных изгибных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве жестко заземленной гибкой круглой пассивной вязкоупругой пластины с распределенными пьезоэлектрическими сенсорами. Исследовано влияние геометрической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность работы пьезоэлектрического сенсора.

Методом Бубнова–Гальоркина розв’язано задачу про вимушені згинальні резонансні коливання і дисипативний розігрів жорстко заземленої гнучкої круглої пасивної в’язкоупругої пластини з розподіленими п’єзоелектричними сенсорами. Досліджено вплив геометричної нелінійності і температури дисипативного розігріву на ефективність роботи п’єзоелектричного сенсора.

By the Bubnov–Galerkin method the problem of the forced bending resonance vibrations and dissipative heating of a flexible circular viscoelastic plate with the distributed sensors is solved. The edge of the plate is rigidly clamped. The influence of the geometrical nonlinearity and dissipative heating on an effectiveness of a work of the sensor is studied.

ВВЕДЕНИЕ

Как конструктивные элементы тонкие круглые пластины из пассивных (без пьезоэффекта) и активных вязкоупругих материалов широко используются в различных областях современной техники [1–4]. При действии на них гармонических во времени нагрузок с частотой, близкой к резонансной, возникает опасность их разрушения из-за усталости, высокого уровня напряжений, температуры диссипативного разогрева и т. п. В связи с этим возникает задача демпфирования вынужденных резонансных колебаний круглых пластин. Для этого широко используются пассивные методы демпфирования, когда в структуру элемента включаются компоненты с высокими гистерезисными потерями. По вопросам пассивного демпфирования колебаний тонкостенных элементов опубликовано большое количество работ как отечественных, так и зарубежных ученых-механиков, обзор которых можно найти в монографиях [5–8]. В последние годы для указанной цели начали эффективно применять активные методы, базирующиеся на включении пьезоэлектрических компонент в структуру пассивного тонкостенного элемента из металлического, полимерно-

го или композитного материала [9–13]. Одни из них выполняют функции сенсора, которые дают информацию о механическом состоянии тела, а другие – функции так называемых актуаторов.

Существуют два основных метода активного демпфирования вынужденных резонансных колебаний тонкостенных элементов. Первый из них основан на использовании только актуаторов, к которым подводится разность потенциалов для компенсации действия механической нагрузки, так что при совместном действии механической и электрической нагрузки амплитуда колебаний на той или иной моде становится равной нулю. При использовании этого метода необходимо знать действующую на пластину нагрузку и механические граничные условия. Второй метод основан на совместном использовании сенсоров и актуаторов. При этом к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная первой производной от разности потенциалов сенсора или току. Тогда изменяются диссипативные характеристики тела, в результате чего можно достичь уменьшения амплитуды колебаний элемента за счет увеличения коэффициента демпфирования. Применение этого метода не требует знания механической нагрузки. Эффективность такого типа актив-

ного демпфирования существенно зависит от качества работы сенсоров, на которое, в свою очередь, влияет много факторов: их геометрические и электромеханические характеристики, геометрические и механические характеристики пассивного элемента, механические и электрические граничные условия, температура. В [14, 15] исследованы осесимметричные колебания шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины с сенсорами и актуаторами. Показано, что при таких механических граничных условиях работа сенсора и актуатора будет наиболее эффективной при полном покрытии пластины пьезоэлектрическими слоями. Очевидно, что при полном покрытии круглой пластины с жестким заземлением торца становится невозможным управлять ее колебаниями, поскольку в механических граничных условиях и в уравнении движения отсутствуют слагаемые, порождающие электрическое нагружение. Для возбуждения колебаний электрической нагрузкой в этом случае необходимо наносить пьезоэлектрические слои в виде пятен, а при полном покрытии пластины пьезослоями необходимо формировать эти пятна с помощью разрезных электродов. Особенно заметное влияние на эффективность работы пьезоэлементов оказывают тепловые эффекты [14–21]. При гармонических, в частности, резонансных колебаниях в результате таких специфических особенностей многих активных и пассивных материалов, как значительные гистерезисные потери и низкая теплопроводность, зависимость их электромеханических свойств от температуры, механические и электрические колебания сопровождаются, как правило, значительным повышением температуры из-за превращения электромеханической энергии в тепловую, т. е. наблюдается явление диссипативного разогрева. Это явление может негативно повлиять на эффективность работы тонкостенных элементов по нескольким причинам. Во-первых, зависимость электромеханических характеристик материала от температуры может существенно повлиять на эффективность работы сенсоров и, как следствие этого, на эффективность активного демпфирования колебаний тонкостенных элементов. Во-вторых, при достижении температурой диссипативного разогрева точки Кюри активный материал теряет пьезоэффект и становится пассивным, т. е. имеет место специфический тип теплового разрушения, когда тело не разделяется на части, но сенсор теряет свое функциональное назначение. В-третьих, при нарушении баланса между поступлением тепла в тело из-за диссипативного разогрева и потерями тепла в результате теплообмена с внешней

средой как в активных, так и в пассивных элементах может иметь место так называемый тепловой пробой, когда наблюдается катастрофическое повышение температуры и стационарное тепловое состояние вообще отсутствует. В пассивных диэлектриках это явление достаточно хорошо изучено и является классическим разделом физики диэлектриков [22]. В-четвертых, как указывалось выше, при жестком заземлении торца пластины работа сенсора будет наиболее эффективной при нанесении сенсора на пластину в виде круглого пятна определенного радиуса a_1 , меньшего радиуса пластины a . Пусть, например, температура диссипативного разогрева или температура нагрева за счет теплообмена с внешней средой достигает точки Кюри на пятне некоторого радиуса, меньшего a_1 . Тогда показания сенсора будут существенно ниже оптимальных, рассчитанных без учета влияния температуры. При этом эффективность работы сенсора снизится и вследствие этого снизится и эффективность активного демпфирования колебаний пластины. Отметим, что сенсоры находят широкое применение не только для активного демпфирования колебаний, но и для других целей [23].

При резонансных колебаниях, высоких уровнях механической нагрузки, а также при малых толщинах пластины амплитуда колебаний может стать сравнимой с ее толщиной и возникает необходимость в учете влияния геометрической нелинейности, диссипативных свойств материалов и температуры диссипативного разогрева на показатели сенсора. Обзор исследований по активному демпфированию осесимметричных колебаний круглых гибких пластин с помощью актуаторов представлен в статье [24]. В этой работе принимается предположение о равенстве нулю нормальной составляющей вектора индукции, что при наличии электродов на поверхностях пластины не отвечает действительности. Кроме того, в ней при рассмотрении жесткого заземления торца рассматривается полное покрытие пьезослоя электродами, что не позволяет управлять колебаниями пластины. В этой работе не учитываются диссипативные свойства материалов и температура диссипативного разогрева. Обзор исследований по колебаниям круглых пластин с нанесенными на них сенсорами представлен в [25]. В литературе отсутствуют работы по исследованию влияния геометрической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность работы сенсоров.

В данной статье рассматривается задача о вынужденных изгибных колебаниях жестко заземленной круглой пассивной вязкоупругой пластины, на

поверхности которой нанесены одинаковые пьезослои, отличающиеся лишь направлением поляризации и выполняющие функции сенсора. Пластина нагружена равномерным поверхностным давлением, изменяющимся во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной. Задача решается в одномодовом приближении методом Бубнова – Галеркина в сочетании с методом гармонического баланса. Получено решение уравнения энергии для температуры диссипативного разогрева. Используя его, определено критическое значение параметра механического нагружения, после превышения которого температура диссипативного разогрева достигает точки Кюри и сенсоры перестают выполнять свое функциональное назначение. Исследовано влияние геометрической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность работы пьезоэлектрического сенсора.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сплошную круглую пластину радиуса a и толщины h_0 из пассивного вязкоупругого материала. На ее внешних поверхностях размещены трансверсально-изотропные пьезоэлектрические слои толщины h_1 , отличающиеся друг от друга лишь направлением поляризации. Нанесенные на пьезослой бесконечно тонкие электроды считаем коротко замкнутыми. На пластину действует изменяющееся по гармоническому закону давление $p = p_0 \cos \omega t$.

Как и в [26–30], для описания электромеханического состояния пластины используются гипотезы Кирхгофа – Лява и дополнительные гипотезы относительно электрических полевых величин: тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического поля и индукции считаются малыми, по сравнению с их нормальными составляющими. Тогда из уравнения электростатики $\partial D_z / \partial z = 0$ следует, что нормальная составляющая вектора индукции для каждого пьезослоя не зависит от толщинной координаты.

Интегрируя упрощенные согласно этим гипотезам уравнения состояния для пассивного и пьезоактивных слоев, получим уравнения состояния для усилий и моментов [29]:

$$\begin{aligned} N_r &= D_N * (\varepsilon_r + \nu_N \varepsilon_\theta), \\ N_\theta &= D_N * (\varepsilon_\theta + \nu_N \varepsilon_r), \\ M_r &= D_M * (\kappa_r + \nu_M \kappa_\theta), \\ M_\theta &= D_M * (\kappa_\theta + \nu_M \kappa_r). \end{aligned} \quad (1)$$

Они отличаются от представленных в статье [28] отсутствием в уравнениях состояния для моментов дополнительного члена M_0 . В соотношениях (1) принято $\nu_N = \text{const}$, $\nu_M = \text{const}$ и введено обозначение [27–30]

$$\begin{aligned} D * f &= D^0 \left[1 - \int_{-\infty}^t D_1(t - \tau) f(\tau) d\tau \right] = \\ &= D^0 \bar{D} * f. \end{aligned} \quad (2)$$

При учете геометрической нелинейности [1, 31], когда

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, & \kappa_r &= -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}, & \kappa_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, \end{aligned} \quad (3)$$

нелинейные уравнения движения и совместности деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(rN_r) \frac{\partial w}{\partial r} \right] - \\ - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + p(r, t) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = 0. \quad (5)$$

По аналогии с [14, 15, 24], введя функции усилий

$$N_r = \frac{\Phi}{r}, \quad N_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

и безразмерные величины

$$\hat{w} = \frac{w}{h}, \quad r = a\rho, \quad D_{11}^0 = \frac{D_M^0}{E_0 h^3},$$

$$\hat{\Phi} = \frac{a}{E_0 h^3} \Phi, \quad \tau = \sqrt{\frac{E_0 h^3}{\rho a^4}} t,$$

$$A_{11}^0 = \frac{E_0 h}{D_N^0 (1 - \nu_N^2)}, \quad q = \frac{a^4}{E_0 h^4} p,$$

получаем следующую систему интегродифференциальных уравнений для \hat{w} , $\hat{\Phi}$:

$$D_{11}^0 \bar{D}_M * \Delta \Delta \hat{w} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\hat{\Phi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \rho} \right) - q + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (6)$$

$$A_{11}^0 \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \rho} \right) - \frac{\hat{\Phi}}{\rho} \right] = \frac{1}{2} \bar{D}_N * \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \rho} \right)^2. \quad (7)$$

Как видим, они отличаются от соответствующих соотношений для пластины с актуаторами отсутствием члена ΔM_0 в уравнении (6) и совпадают с уравнениями движения пассивной пластины с модифицированными жесткостными характеристиками [14, 15, 26].

Механические граничные условия жесткого заземления для свободных ($N_r=0$ при $r=a$) и заземленных ($u=0$ при $r=a$) в планарном направлении торцов пластины соответственно запишутся в виде [14, 15]

$$\begin{aligned} w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho}=0 \quad \text{при} \quad \rho=1; \\ \Phi=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \nu_N \frac{1}{\rho} \Phi=0 \quad \text{при} \quad \rho=1. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем знак угловой скобки над буквами опускаем.

К приведенным уравнениям необходимо присоединить стандартные начальные условия.

Для вывода соотношений, характеризующих показания сенсоров, необходимо использовать упрощенное согласно гипотезам Кирхгофа – Лява и дополнительным гипотезам относительно электрических полевых величин определяющее уравнение для индукции [15, 20, 26, 29]:

$$\frac{D_3}{\gamma_{33}} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{33}} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + z(\kappa_1 + \kappa_2)]. \quad (9)$$

Для круглой пластины рассматриваемой структуры в случае коротко замкнутых электродов снимаемый с сенсора заряд вычисляется путем интегрирования соотношения (9) по толщине пластины. Это приводит к следующему выражению для заряда:

$$Q = 2\pi(h_0 + h_1) \int_0^{\rho_1} \gamma_{31} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (10)$$

Здесь использованы обозначения [26, 29, 30]. Если характеристики сенсора не зависят от температуры, то равенство (10) принимает вид:

$$Q = 2\pi(h_0 + h_1)\gamma_{31} \int_0^{\rho_1} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (11)$$

Оно дает информацию об амплитуде вынужденных резонансных колебаний круглой вязкоупругой пластины и является основой для оценки влияния различных факторов на эффективность работы сенсоров.

2. ВЫВОД ОБЫКНОВЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В дальнейшем ограничимся исследованием вынужденных гармонических колебаний круглой пластины по наиболее энергоемкой первой моде. Как и в [14, 15, 27], решение задачи будем искать методом Бубнова – Галеркина [32], выбирая аппроксимацию моды колебаний в виде

$$w_1(\rho) = (1 - \rho^2)^2. \quad (12)$$

Тогда в одномодовом приближении

$$w = \eta(\tau)(1 - \rho^2)^2. \quad (13)$$

Выполняя соответствующие выкладки, порядок которых изложен в [14, 15], приходим к обыкновенному интегро-дифференциальному уравнению относительно $\eta(\tau)$:

$$m\ddot{\eta} + \mu_1 \bar{D}_M * \eta - \mu_2 \eta D_N * \eta^2 = P. \quad (14)$$

Здесь

$$\beta_2 = 1/3; \quad \beta_4 = 1/6; \quad \beta_6 = 1/10;$$

$$\beta_8 = 1/15; \quad \beta_{10} = 1/21;$$

$$\mu_1 = 32D_{11}^0/3; \quad \mu_2 = \sum_{k=1}^5 \beta_{2k} \gamma_{2k};$$

$$\gamma_2 = -4d_1; \quad \gamma_4 = 4/A_{11}^0; \quad \gamma_6 = -4/A_{11}^0;$$

$$\gamma_8 = 10/(3A_{11}^0); \quad \gamma_{10} = 2/(3A_{11}^0);$$

$$m = 1/10; \quad P = q/6.$$

Решив обыкновенное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (14) с помощью соотношений (10), (11), можно исследовать влияние геометрической нелинейности на показания сенсора при вынужденных резонансных колебаниях вязкоупругой гибкой круглой пластины при действии на нее механической нагрузки.

3. РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Как и в [14, 15, 27], для решения обыкновенного нелинейного интегро-дифференциального уравнения применим метод гармонического баланса [33], полагая

$$\begin{aligned} \eta &= \eta' \cos \omega t - \eta'' \sin \omega t, \\ q &= q' \cos \omega t - q'' \sin \omega t, \end{aligned} \quad (15)$$

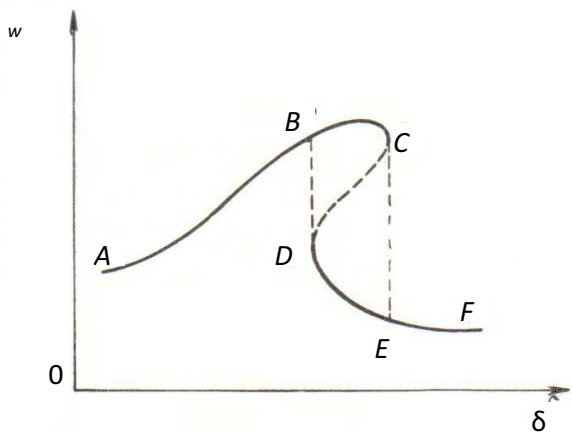


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика

где частота механической и электрической нагрузки близка к резонансной частоте, определяемой из соотношения

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_1 \bar{D}'}{m}} = \sqrt{\frac{320}{3} D_{11}^0 \bar{D}'}. \quad (16)$$

Проделив соответствующие выкладки, получим кубическое алгебраическое уравнение относительно квадрата амплитуды $x = |\eta|^2$:

$$(a_{12}^2 + a_{21}^2)x^3 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})x^2 + (a_{11}^2 + a_{21}^2)x - [P]^2 = 0. \quad (17)$$

Здесь введены обозначения, использованные в работах [14, 15]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -m\omega^2 + \mu_1 \bar{D}'_M; \\ a_{12} &= \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1 - \bar{D}_{M\infty}) + \frac{1}{4}(1 - \bar{D}_{MC}) \right]; \\ a_{21} &= \mu_1 \bar{D}''_M; \\ a_{22} &= \frac{\mu_2}{4} \bar{D}_{MS}. \end{aligned}$$

Уравнение (17) можно упростить, считая влияния геометрической нелинейности и вязкости величинами одного порядка малости. При этом в нем следует положить $D_{M\infty} = D_{MS} = D_{MC} = 0$, а уравнение (14) записать в виде

$$m\ddot{\eta} + \mu_1 \bar{D}_M * \eta - \mu_2 \eta D_N \eta^2 = P. \quad (18)$$

С использованием формулы (10) получим следующее выражение для снимаемого с сенсора заряда:

$$Q = -8\pi\gamma_{31}h_1(h_0 + h_1)(\rho_1^2 - \rho_1^4)\eta(\tau).$$

Если считать пьезоматериал упругим, то модуль заряда будет

$$|Q| = Q = 8\pi\gamma_{31}(h_0 + h_1)(\rho_1^2 - \rho_1^4)|\eta|, \quad (19)$$

а фаза –

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta''}{\eta'}. \quad (20)$$

С использованием метода гармонического баланса, согласно концепции комплексных характеристик [21], можно приближенно представить оператор “*” в виде $D_M * \eta = D_1 \eta + D_2 \eta$, где $D_1 = D'$, $D_2 = D''/\omega$, а $D_M = D' + iD''$. Тогда уравнение (18) примет форму

$$\ddot{\eta} + 2\tilde{\mu}_1 \dot{\eta} + \omega_0^2 \eta + K_1 \eta^3 = q_1, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mu}_1 &= \frac{\mu_1 D''}{m\omega}; & \omega_0^2 &= \frac{\mu_1 D'}{m}; \\ K_1 &= \frac{\mu_2 D'}{m}; & q_1 &= \frac{P}{m}. \end{aligned}$$

Пусть $\omega = \omega_0 + \delta$, где $\delta/\omega_0 \ll 1$. Амплитуда колебаний находится из уравнения для $X = |\eta|^2$ [1]:

$$X \left[\left(\delta - \frac{3K_1}{8\omega_0} X \right)^2 + \tilde{\mu}_1^2 \right] = \frac{q_1^2}{4\omega_0^2}. \quad (22)$$

Решение кубического уравнения (22) дает амплитудно-частотную характеристику (рис. 1), типичную для жестких нелинейных систем. Максимальная амплитуда, найденная из этой характеристики, отвечает точке С.

При $q_1 > q^*$ уравнение (22) имеет три действительных корня [1]. Здесь

$$(q^*)^2 = \frac{64\omega_0^3 \tilde{\mu}_1^3}{3K_1}. \quad (23)$$

Границы области, содержащей эти корни, определяются из соотношения [1]

$$\delta^2 + \tilde{\mu}_1^2 - \frac{3K_1 \delta X^2}{2\omega_0} + \frac{27K_1^2 X^4}{64\omega_0^2} = 0. \quad (24)$$

Решив уравнения (23) и (24), найдем точки С и D на рис. 1. Максимальная безразмерная амплитуда будет $\tilde{\mu}|\eta|_{\max} = q_1/(2\tilde{\mu}_1\omega_0)$. Размерная же амплитуда составит

$$|w|_{\max} = \frac{p_0 a^4}{64D''_M}. \quad (25)$$

Как видно, геометрическая нелинейность не влияет на значение $|w|_{\max}$.

4. РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРЫ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА

Как и в [14, 15, 27], для расчета температуры диссипативного разогрева принимаем указанную выше гипотезу о малости влияния геометрической нелинейности и вязкости на колебания системы. При этом установившаяся (максимальная) температура T диссипативного разогрева находится из решения уравнения энергии

$$\frac{\tilde{\lambda}h}{a^2} \Delta\theta - \alpha\theta + Ax(d_0 + d_2\rho^2 + d_4\rho^4) = 0. \quad (26)$$

Здесь $x = |w|^2$; $\theta = T - T_C$; T_C – некоторая постоянная температура; $\tilde{\lambda}$ – приведенный коэффициент теплопроводности трехслойной пластины; α – коэффициент, характеризующий теплообмен с внешней средой [4];

$$A = 4\omega D''; \quad d_0 = 4(1 + \nu_M);$$

$$d_2 = -16(1 + \nu_M); \quad d_4 = (20 + 12\nu_M).$$

Пусть на торце пластины $\rho = 1$ задана постоянная температура $T = T_C$. Решение задачи теплопроводности получим в предположении

$$\theta = \theta_0(1 - \rho^2). \quad (27)$$

Применив к уравнению (26) процедуру Бубнова – Галеркина, получим решение

$$\theta_0 = Bx \frac{d_0/4 + d_2/4 + d_4/12}{1 + \beta/6}, \quad (28)$$

где

$$\beta = \frac{a^2\alpha}{\tilde{\lambda}h}; \quad B = \frac{a^2A}{\tilde{\lambda}h}.$$

Здесь приняты обозначения из [14, 15].

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализ решения нелинейного алгебраического уравнения (17) показывает, что, как и для случая прямоугольной пластины [27], при механическом нагружении амплитудно-частотная характеристика будет неоднозначной и жесткой ($\mu_2 < 0$). В работе [14] показано, что геометрическая нелинейность не влияет на эффективность работы актуатора при активном демпфировании вынужденных резонансных колебаний пластины. В противоположность этому, соотношения (19), (20) показывают, что геометрическая нелинейность существенно влияет на эффективность работы сенсора, поскольку модуль заряда пропорционален амплитуде колебаний пластины, определяемой из нелинейного алгебраического уравнения (17). Поэтому величина заряда также будет неоднозначной

функцией частоты с типичными для нелинейных колебаний перескоками с одной устойчивой ветви на другую. Из соотношения (19) следует, что наивысшая эффективность работы сенсора (при которой снимаемый с сенсора заряд максимален) будет наблюдаться при $\rho_1 = 1/\sqrt{2}$.

Температура диссипативного разогрева оказывает существенное влияние на работу сенсора. Из формулы (19) следует, что если температура превышает точку Кюри T_K в некоторой области, то работа сенсора ухудшается, поскольку при этом следует положить $\gamma_{31}(T_K) = 0$ – пьезоактивный материал здесь становится пассивным. Будем считать, что температура нигде не должна достигать точки Кюри. Из этого условия можно найти критическое значение механической нагрузки $P_{кр}$, при которой актуатор достигает точки Кюри в центре пластины, где температура максимальна. При этом из выражения (28) имеем $x_{кр} = A_2\theta_K$, где

$$A_2 = \frac{1 + \beta/6}{B(d_0/4 + d_2/2 + d_4/12)}.$$

Тогда определяемое из соотношения (17) критическое значение механической нагрузки будет

$$P_{кр}^2 = (a_{12}^2 + a_{21}^2)A_2^3\theta_K^3 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})A_2^2\theta_K^2 + (a_{11}^2 + a_{21}^2)A_2\theta_K. \quad (29)$$

Уточним значение критической нагрузки, полагая, что температура диссипативного разогрева достигается в точке $\rho = \rho_1$. При этом во всей активной области $0 \leq \rho \leq \rho_1$ температура диссипативного разогрева превышает точку Кюри. Тогда в формуле (29) следует заменить величину θ_K на

$$\hat{\theta}_K = \frac{\theta_K}{1 - \rho_1^2}.$$

Для актуатора оптимального размера, $\rho_1^2 = 1/2$, имеем $\hat{\theta}_K = 2\theta_K$. Тогда температура на контуре сенсора равна точке Кюри, а в остальных его точках превышает ее. При этом сенсор полностью теряет свою функциональную способность. Минимальная критическая нагрузка в резонансной области определяется максимальной амплитудой (25), которая, как указывалось выше, не зависит от геометрической нелинейности. Подставляя выражение (25) в соотношение (28), в котором положено $\theta_0 = \theta_K$, получаем минимальное значение критической нагрузки в резонансной области:

$$(P_{кр})_{\min} = \frac{64}{a^5} \sqrt{\frac{D''\theta_K h \tilde{\lambda}}{\omega_0(d_0 + d_2 + d_4/3)}} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \text{Bi} \right].$$

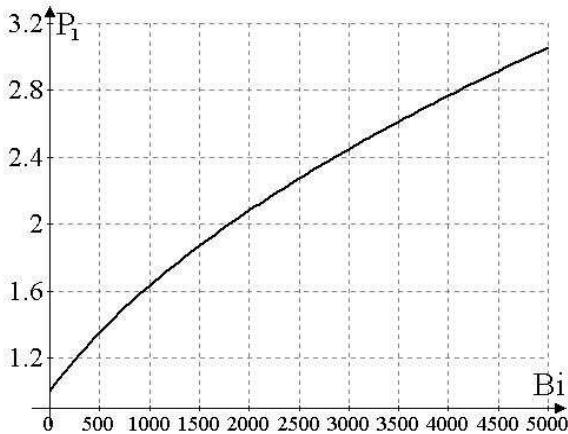


Рис. 2. Зависимость критического значения параметра нагружения от числа Би при $\bar{\lambda} = \text{const}$

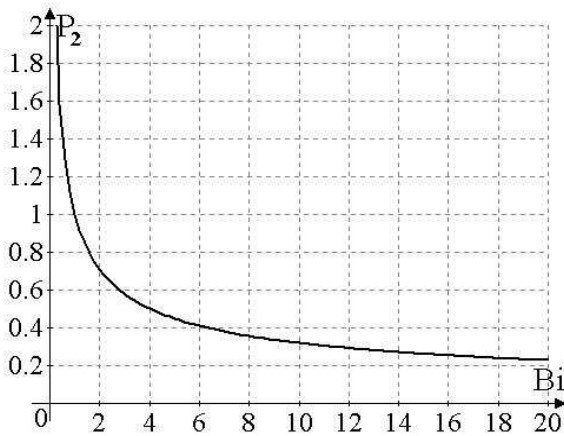


Рис. 3. Зависимость критического значения параметра нагружения от числа Би при $\alpha = \text{const}$

Здесь $Bi = \alpha h / \lambda$ – число Био. Пусть оно изменяется за счет коэффициента теплообмена α , когда коэффициент теплопроводности фиксирован ($\bar{\lambda} = \text{const}$). Введем параметр нагружения:

$$P_1 = \frac{(p_{\text{кр}})_{\text{min}} a^5}{64} \sqrt{\frac{\omega_0 (d_0 + d_2 + d_4/3)}{\theta_K D''}} \frac{a^2}{\lambda h}.$$

Тогда

$$P_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{h}\right)^2 Bi}.$$

Зависимость P_1 от числа Би представлена на рис. 2. Очевидно, что $P_1 \rightarrow 1$ при $Bi \rightarrow 0$ и $P_1 \rightarrow \infty$ при $Bi \rightarrow \infty$.

Пусть теперь Би изменяется за счет изменения коэффициента теплопроводности $\bar{\lambda}$ при фиксиро-

ванном коэффициенте теплообмена α . Введем параметр нагружения:

$$P_2 = \frac{(p_{\text{кр}})_{\text{min}} a^5}{64h} \sqrt{\frac{\omega_0 (d_0 + d_2 + d_4/3)}{\alpha \theta_K D''}}.$$

Тогда

$$P_2 = \sqrt{\frac{1}{Bi} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{h}\right)^2 Bi \right]}.$$

Зависимость параметра нагружения P_2 от Би представлена на рис. 3. В этом случае $P_2 \rightarrow \infty$ при $Bi \rightarrow 0$ и $P_2 \rightarrow a/(h\sqrt{6})$ при $Bi \rightarrow \infty$.

Как видим, имеет место качественное различие поведения минимального критического параметра нагружения от числа Био при его изменении за счет изменения коэффициента теплообмена или коэффициента теплопроводности. Поскольку температура пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, то, подобно амплитудно-частотной характеристике, температурно-частотная характеристика системы будет неоднозначной и жесткой.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной статье методом Бубнова – Галеркина получено аналитическое решение задачи о вынужденных резонансных колебаниях гибкой круглой вязкоупругой пластины с пьезоэлектрическим сенсором. Торце пластины считается жестко заземленным. На поверхности пластины нанесены в виде пятен трансверсально-изотропные пьезоэлектрические слои с противоположной поляризацией, выполняющие функции сенсора. Для расчета амплитудно- и температурно-частотных характеристик получено кубическое уравнение. Показано, что эти характеристики будут жесткими с типичными для нелинейных систем неоднозначностями и перескоками. Температура диссипативного разогрева оказывает существенное влияние на эффективность работы сенсора. В частности, при достижении температурой точки Кюри пьезоматериала имеет место специфический тип теплового разрушения, когда пластина не разделяется на части, но пьезоэлектрический сенсор перестает выполнять свое функциональное назначения из-за потери материалом пьезоэффекта. Найдено выражение для критической механической нагрузки, при которой имеет место этот тип теплового разрушения. Рассчитан размер сенсора, при котором работа сенсора будет наиболее эффективной (его показания будут максимальными). Геометрическая нелинейность вносит качественные измене-

ния в работу сенсора – его показания имеют типичные для нелинейной системы неоднозначности с двумя устойчивыми и одной неустойчивой ветвью и перескоками при определенных частотах с одной устойчивой ветви на другую. Исследована зависимость минимального значения критического параметра механического нагружения от числа Био.

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин.– М.: Наука, 1967.– 266 с.
2. Григолюк Э. И. Прочность, колебания и устойчивость круговых пластин. Часть I.– М.: НИИ мех. МГУ, 1997.– 134 с.
3. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины.– М.: Физматгиз, 1959.– 290 с.
4. Коваленко А. Д. Основы термоупругости.– К.: Наук. думка, 1970.– 308 с.
5. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел.– К.: Наук. думка, 1985.– 264 с.
6. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний.– М.: Мир, 1988.– 448 с.
7. Jones D. I. Handbook of viscoelastic vibration damping.– New York: John Wiley and Sons, 2001.– 412 p.
8. Li Z., Crocker M. J. A review on vibration damping in sandwich composite structures // Int. J. Acust. Vib.– 2005.– **10**, № 4.– P. 159–169.
9. Gabbert U., Tzou H. S. Smart structures and structronic systems.– Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 2001.– 384 p.
10. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems // Applications of functional materials.– Appl. Mech. Rev.– 1998.– P. **51**, № 8.505–521
11. Tzou H. S., Bergman L. A. Dynamics and control of distributed systems.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.– 400 p.
12. Gopinathan S., Varadan V. V., Varadan V. K. A review and critique of theories for piezoelectric laminates // Smart Mater. Struct.– 2000.– **9**.– P. 24–48.
13. Schwartz M. (ed.) Encyclopedia of Smart Materials: in 2 vols.– New York: John Wiley and Sons, 2002.– 1176 p.
14. Karnaukhov V. G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // J. Therm. Stres.– 2005.– **28**, № 6-7.– P. 783–815.
15. Lu X. and Hanagud S. V. Extended irreversible thermodynamics modeling for self-heating and dissipation in piezoelectric ceramics // IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control.– 2004.– **31**, № 12.– P. 1582–1592.
16. Mauk L. D., Lynch C. S. Thermo-electromechanical behavior of ferroelectric materials. Part I: Computational micromechanical model versus experimental results // J. Int. Mat. Sys. Struct.– 2003.– **14**.– P. 587–602.
17. Weiland L. M., Lynch C. S. Thermo-electromechanical behavior of ferroelectric materials. Part II: Introduction of Rate and Self-heating Effects // J. Int. Mat. Sys. Struct.– 2003.– **14**.– P. 602–621.
18. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций. Том 4: Электротермовязкоупругость.– К.: Наук. думка, 1988.– 320 с.
19. Карнаухов В. Г. Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании // Прикл. мех.– 2004.– **40**, № 6.– С. 30–70.
20. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов // Успехи механики: том 1.– К., АСК.– С. 2005.107–130
21. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении.– Житомир: ЖТТУ, 2005.– 428 с.
22. Франц В. Пробой диэлектриков.– М.: ИИЛ, 1961.– 208 с.
23. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектрических пластин.– К.: Наук. думка, 2008.– 270 с.
24. Kapuria S., Dumir P. C. Geometrically nonlinear axisymmetric response of thin circular plate piezoelectric actuation // Nonlin. Sci. Num. Sim.– 2005.– **10**.– P. 411–423.
25. Donoso A., Bellido J. C. Distributed piezoelectric modal sensors for circular plates // J. Sound Vib.– 2009.– **319**, № 1-2.– P. 50–57.
26. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Том 5: Электроупругость.– К.: Наук. думка, 1989.– 290 с.
27. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // Фіз.-мат. модел. інформ, технол.– 2008.– **8**.– С. 48–68.
28. Карнаухова Т. В., Пятецкая Е. В. Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными актуаторами при моногармоническом нагружении // Прикл. мех.– 2009.– **45**, № 2.– С. 107–123.
29. Карнаухова Т. В., Пятецкая Е. В. Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами // Прикл. мех.– 2009.– **44**, № 6.– С. 100–112.
30. Карнаухова Т. В., Пятецкая Е. В. Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами и актуаторами // Прикл. мех.– 2010.– **46**, № 1.– С. 94–104.
31. Григоренко Я. М., Мукоєд А. П. Розв'язання лнійних і нелнійних задач теорії оболонок на ЕОМ.– К.: Либідь, 1992.– 152 с.

32. Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевская В. Ф. Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой пластины при помощи пьезоактуаторов // Теор. прикл. мех.– 2009.– **45**.– С. 114–123.
33. Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В. Резонансные изгибные колебания гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины с пьезоэлектрическими сенсорами // Теор. прикл. мех.– 2009.– **45**.– С. 124–130.
34. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина.– М.: Мир, 1988.– 352 с.
35. Митропольский Ю. А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания.– К.: Ин-т мат. НАНУ, 1997.– 344 с.