

УДК 620.179

# ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕННЫЙ СТАН МАТЕРИАЛУ З УРАХУВАННЯМ ПРОЦЕСУ РОЗВАНТАЖЕННЯ У ДИНАМІЧНІЙ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНІЙ ПОСТАНОВЦІ

В. Р. БОГДАНОВ\*, Г. Т. СУЛИМ\*\*

\*Національний транспортний університет, Київ

\*\*Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

Отримано 07.07.2011

З використанням різницевих методів досліджено плоский напружений стан тонкого компактного зразка з нерухомою тріщиною в нестационарній пружно-пластичній постановці. При цьому враховувався процес розвантаження матеріалу при навантаженні, яке прикладене до локалізованої області й змінюється з часом за лінійним законом. У ролі основного незалежного параметра для виявлення розвитку полів напружень, деформацій, параметра Одквіста і т. п. вибрано розрахункове значення коефіцієнта інтенсивності напружень біля тріщини у статичній задачі для пружно-деформованого компактного зразка. Виявлені характерні осциляції напружень при досягненні коефіцієнтами інтенсивності напружень критичних значень. Розроблена методика дає можливість визначати в'язкість руйнування (тріщиновитримність) матеріалу.

С использованием разностных методов исследовано плоское напряженное состояние тонкого компактного образца с неподвижной трещиной в нестационарной упругопластической постановке. При этом учитывался процесс разгрузки материала при нагружении, которое приложено к локализованной области и изменяется со временем по линейному закону. В роли основного независимого параметра для определения развития полей напряжений, деформаций, параметра Одквиста и т. п. выбрано расчетное значение коэффициента интенсивности напряжений возле трещины в статической задаче для упруго-деформированного компактного образца. Обнаружены характерные осцилляции напряжений при достижении коэффициентами интенсивности напряжений критических значений. Разработанная методика дает возможность определять вязкость разрушения (трещиностойкость) материала.

By finite-difference technique, a planar stress state for a thin compact specimen with static (non-growing) crack is considered in an unsteady elasto-plastic formulation. In doing so, the the material unloading process was taken into account for load applied to localized area according to linear time dependence. The calculated value of stress intensity factor near the crack's edge in the problem on static elastic deformation of a compact specimen was taken for the main independent parameter for determining of evolution of stress and strain fields, Odquist parameter, etc. The specific stress oscillations are found when stress intensity factors are growing above some critical values. The developed technique gives the possibility for determining of destruction toughness of the material.

## ВСТУП

У праці [1] для аналізу процесів руйнування запропоновано, окрім експериментальних, застосувати розрахункові методи з використанням квазістатичної пружно-пластичної моделі матеріалу. Ці результати узагальнено в публікаціях [2–9], де визначальні співвідношення для пружно-пластичного деформування було поєднано з динамічними рівняннями. Зокрема, у статті [4] розв'язано задачу для плоского деформованого стану, а просторовий напружено-деформований стан матеріалу визначено у [3]. У публікації [5] розв'язано задачу плоского напруженого стану з тріщиною, яка збільшується за умови відсутності максимальних напружень біля її вістря. У [6, 7] розглянуто плоскі задачі відповідно напруженого і деформованого станів із тріщиною, яка збільшується за локальним критерієм крихкого руйнування. У публікаціях [2, 8, 9] в'язкість руйнування визначалась на основі розв'язку задач відповідно для плоского напруженого, плоского деформованого і просторового напружено-деформованого станів у при-

пущенні про нерухомість тріщини. Запропоновані моделі дали можливість значно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів. У статті [10] визначено пружно-деформований стан жорстко-пластичної криволінійної пластини змінної товщини з довільним отвором при динамічному навантаженні.

Ця стаття є прямим продовженням згаданих досліджень, причому тут, на відміну від постановки [2], враховується процес розвантаження матеріалу.

## 1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглядається деформування тіла – компактного (балкового) зразка – у формі прямокутника  $\Sigma = L \times B$  ( $0 \leq y \leq B$ ;  $-L/2 \leq x \leq L/2$ ) з пропилом-тріщиною початкової довжини  $l = l_0$  уздовж відрізка  $x = 0$ ;  $0 \leq y \leq l_0$ . Вважаємо, що зразок контактує з двома нерухомими опорами уздовж  $L_* \leq |x| \leq L_* + a$ ;  $y = 0$ . Товщину зразка вважаємо настільки малою, щоб можна було використовувати залежності для плоского напруженого стану.

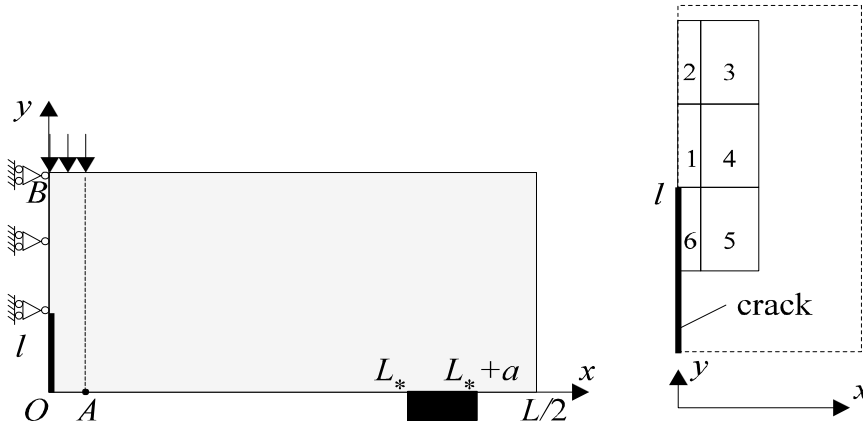


Рис. 1. Геометрична схема задачі (ліворуч) і сітка розбиття біля вістря тріщини (праворуч)

Зверху на тіло падає абсолютно жорсткий ударник, що контактує з ним уздовж відрізка  $|x| \leq A$ ;  $y = B$ . Дію ударника замінимо рівномірно розподіленим в області контакту нормальним напруженням  $-P$ , яке змінюється з часом за лінійним законом  $P = p_{01} + p_{02}t$ . З огляду на симетрію процесу деформування відносно лінії  $x = 0$ , надалі розглядатимемо лише праву частину поперечного перерізу тіла (рис. 1). Вважаємо, що матеріал – пружно-пластичний зі зміцненням. Поля напружень, деформацій і їхні прирости (зокрема, пластичні прирости інтенсивності  $d\varepsilon_i^p$  і параметра Одквіста  $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$ ) будемо розраховувати на основі числового розв’язку відповідної динамічної пружно-пластичної задачі. При цьому використовуємо відомі методики дослідження квазістатичної пружно-пластичної моделі [1], в яких враховують нестационарність навантаження і застосовують числове інтегрування. При розрахунку динамічних полів напружень і деформацій не враховуємо інтерференцію хвильових полів, відбиття від межі тіла і можливу при цьому контактну взаємодію між берегами розрізу. Розглядаються рівняння плоскої динамічної теорії.

Компоненти вектора зміщень  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  пов’язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші. Рівняння руху середовища густиною  $\rho$  мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}.$$

Початкові й крайові умови задачі, які виходять із припущення про незмінність області прикладання

опорних реакцій, а також розташування опор, записуються так:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 0 < y < l & : \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ x = 0; \quad l < y < B & : u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ x = L/2, \quad 0 < y < B & : \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y = 0, \quad 0 < x < L_* & : \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y = 0, \quad L_* < x < L_* + a & : u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y = 0, \quad L_* + a < x < L/2 & : \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y = B, \quad 0 < x < A & : \sigma_{yy} = -P, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ y = B, \quad A < x < L/2 & : \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\ u_x|_{t=0} = u_y|_{t=0} = 0; \quad \dot{u}_x|_{t=0} = \dot{u}_y|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

В основу визначальних співвідношень механічної моделі покладено теорію неізотермічної пластичної течії середовища зі зміцненням за умови текучості Губера – Мізеса. Ефектами повзучості й температурним розширенням нехтуємо [11]. Відповідно до цієї моделі, рівняння зв’язку між напруженнями й деформаціями мають вид [12]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \\ \varepsilon_{ij}^e &= \frac{s_{ij}}{2G} + K\sigma, \\ d\varepsilon_{ij}^p &= s_{ij}d\lambda. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$  – компоненти девіатора тензора напружень;  $\delta_{ij}$  символ Кронекера;  $G$  – модуль зсуву;  $K_1 = (1 - 2\nu)/(3E)$ ;  $K = 3K_1$  – модуль об’ємного стиску, який зв’язує у співвідношенні  $\varepsilon = K\sigma$

об'ємне розширення  $3\varepsilon$ ;  $E$  – модуль пружності;  $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$  – середнє напруження;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $d\lambda$  – деяка скалярна функція, що визначається умовою пластичності (формою поверхні навантаження) і квадратично залежить від компонент девіатора напружень  $s_{ij}$  [11]:

$$d\lambda = \begin{cases} 0, & f < 0, \\ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, & \|f, df\| = 0; \end{cases}$$

$$f = \sigma_i^2 - \sigma_S^2(T).$$

Матеріал зміцнюється з коефіцієнтом зміцнення  $\eta_*$  [1]:

$$\sigma_S(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{\kappa(T)}{\varepsilon_0}\right)^{\eta_*},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E},$$
(2)

де  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ;  $\sigma_S(T)$  – межа текучості після зміцнення матеріалу за температури  $T$ .

## 2. СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай нестационарна взаємодія відбувається в інтервалі часу  $t \in [0, t_*]$ . Тоді для кожного моменту  $t$  з цього інтервалу справедливо

$$\varepsilon_{\|xx,yy\|}^e = \frac{\sigma_{\|xx,yy\|} - \sigma}{2G} + K\sigma,$$

$$\frac{d\varepsilon_{\|xx,yy\|}^p}{dt} = (\sigma_{\|xx,yy\|} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt},$$

$$\varepsilon_{zz}^e = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{yy}^e),$$

$$\frac{d\varepsilon_{xy}^p}{dt} = \sigma_{xy} \frac{d\lambda}{dt},$$

$$\varepsilon_{xy}^e = \frac{\sigma_{xy}}{2G},$$

$$\varepsilon_{zz}^p = -(\varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{yy}^p).$$
(3)

Для числового інтегрування за часом використовувалась квадратурна формула Грегорі [13] порядку  $m_1=3$  з коефіцієнтами  $D_n$ . Після рівномірної дискретизації за часом з вузлами  $t_k = k\Delta t \in [0, t_*]$  ( $k = \bar{0}, K$ ) запишемо:

$$\Delta\varepsilon_{xx,k} = B_1\sigma_{xx,k} + B_2\sigma_{yy,k} - b_{xx},$$

$$\Delta\varepsilon_{xy,k} = B_3\sigma_{xy,k} - b_{xy},$$

$$\Delta\varepsilon_{yy,k} = B_2\sigma_{xx,k} + B_1\sigma_{yy,k} - b_{yy},$$

$$\Delta\varepsilon_{zz,k} = B_4(\sigma_{xx,k} + \sigma_{yy,k}) - \Delta\varepsilon_{xx,k} - \Delta\varepsilon_{yy,k} - b_{zz},$$

$$B_1 = \frac{1}{3} \left( K + \frac{1}{G} + 2D_0\Delta\lambda_k \right),$$

$$B_2 = \frac{1}{3} \left( K - \frac{1}{2G} - D_0\Delta\lambda_k \right),$$

$$B_3 = \frac{1}{2G} + D_0\Delta\lambda_k,$$

$$B_4 = \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)} \left( 2K + \frac{1}{2G} \right),$$

$$b_{zz} = B_4(\sigma_{xx,k-1} + \sigma_{yy,k-1}),$$

$$b_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij,k-1} + \delta_{ij} \left( K - \frac{1}{2G} \right) \sigma_{k-1} - \sum_{n=1}^{m_1-1} D_n (\sigma_{ij,k-n} - \delta_{ij}\sigma_{k-n}) \Delta\lambda_{k-n};$$

$i, j$  відповідає  $x, y$ .

(4)

Функція  $\psi = 1/(2G) + \Delta\lambda$ , яка характеризує умову текучості, при урахуванні співвідношень (3) набуває вигляду

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{2G}, & f < 0, \\ \frac{1}{2G} + \frac{3\Delta\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, & \|f, df\| = 0, \end{cases}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 6(\sigma_{xy})^2]^{1/2},$$

$$\Delta\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{yy}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(\Delta\varepsilon_{xy}^p)^2]^{1/2},$$

$$\Delta\varepsilon_{zz}^p = -\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p,$$

$$\varepsilon_{\|xx,yy\|}^e = \frac{1}{2G}\sigma_{\|xx,yy\|} + \left( K - \frac{1}{2G} \right) \sigma,$$

$$\varepsilon_{xy}^e = \frac{1}{2G}\sigma_{xy},$$

$$\Delta\varepsilon_{\|xx,yy,xy\|}^p = \Delta\varepsilon_{\|xx,yy,xy\|} - \Delta\varepsilon_{\|xx,yy,xy\|}^e.$$
(5)

Для того, щоб позбутися фізичної нелінійності, яка міститься в залежностях (5), застосуємо метод послідовних наближень, який дає можливість нелінійну задачу звести до послідовності лінійних [1]:

$$\psi^{(n+1)} = \begin{cases} \psi^{(n)}p + \frac{1-p}{2G}, & Q_i < -Q; \\ \psi^{(n)}, & |Q_i| < Q; \\ \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_S(T)}, & Q_i > Q, \end{cases} \quad (6)$$

$$Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T).$$

Тут  $Q$  – найбільше відхилення інтенсивності напружень від зміщеної межі текучості;  $0 \leq p \leq 1$ .

Розв'язок системи (4) дає вирази для компонент тензора напружень на кожному кроці:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,k} &= A_1 \Delta \varepsilon_{xx,k} + A_2 \Delta \varepsilon_{yy,k} + Y_{xx}, \\ \sigma_{yy,k} &= A_2 \Delta \varepsilon_{xx,k} + A_1 \Delta \varepsilon_{yy,k} + Y_{yy}, \\ \sigma_{xy,k} &= A_3 \Delta \varepsilon_{xy,k} + Y_{xy}, \\ Y_{xx} &= A_1 b_{xx} + A_2 b_{yy}, \\ Y_{yy} &= A_2 b_{xx} + A_1 b_{yy}, \\ Y_{xy} &= \frac{A_3}{b_{xy}}, \quad A_3 = \frac{1}{B_3}, \\ A_1 &= \frac{B_1}{B_1^2 - B_2^2}, \quad A_2 = -\frac{B_2}{B_1^2 - B_2^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Інтенсивності напружень і деформацій визначалися для кожної елементарної комірки із числового розв'язку.

У механіці руйнування в'язкість руйнування (тріщиновитримність) переважно отримують у квазістатичних експериментах, після чого зіставляють її з граничним значенням коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН)  $K_1$ , отриманим із лінійно пружного розв'язку. Тому для опису зміни окремих характеристик у ролі незалежного параметра виберемо наближене значення КІН  $K_1^e$  для пружної задачі триточкового згину балки з тріщиною [14]:

$$K_1^e = \frac{12F\sqrt{l}}{BH} \left( 1.93 - 3.07 \frac{l}{B} + 14.53 \frac{l^2}{B^2} - 25.11 \frac{l^3}{B^3} + 25.8 \frac{l^4}{B^4} \right). \quad (8)$$

Нижче називатимемо його пружним КІН.

Вважалось, що процес розвантаження матеріалу відбувався за таким алгоритмом. Якщо у будь-якій комірці абсолютне значення напруження стає меншим за максимальне, то пластичні деформації перестають зростати й зміцнення матеріалу припиняється. Пластичні деформації починають знову збільшуватись і зміцнення матеріалу продовжується, коли абсолютне значення напружень перевищує максимальне.

### 3. ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ

Для розрахунків математичної моделі компактного зразка із сталі 15Х2НМФА застосовано метод скінченних різниць зі змінюваним кроком розбиття уздовж осей  $Ox$  і  $Oy$  ( $N$  і  $M$  елементів відповідно). Крок між точками розбиття був найменшим в околі вершини тріщини і на межах зразка. Характерний розмір [2] комірок в радіусі (1...2) мм від вершини тріщини дорівнював середньому розміру зерна випробуваного металу (0.05 мм). Використання методу скінченних різниць обґрунтовано в [15]. При цьому забезпечується точність розрахунків з похибкою, не більшою за  $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta t)^2)$ .

Результати розрахунків середніх напружень у комірках поблизу вістря тріщини за відносно невеликих навантажень, коли у дискретизованій задачі пластичні деформації відсутні і розв'язок задачі є суто лінійно пружним, зіставлялися із розрахунками для центру комірки на основі класичних одночленних асимптотичних залежностей [14, п. 1.2] з використанням виразу (8) для КІН пружного розв'язку. На рис. 2 і 3 відображено результати обчислення величин при таких значеннях параметрів:  $\eta_* = 0.05$ ;  $L = 60$  мм;  $B = 10$  мм;  $l = 3$  мм;  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  с;  $A = 2.5$  мм;  $p_{01} = 8$  МПа;  $p_{02} = 10$  МПа;  $M = 60$ ;  $N = 77$ ;  $T = 50^\circ\text{C}$ .

Розрахункові залежності напружень біля вістря тріщини (комірка 1, див. рис. 1) двовимірного компактного зразка (рис. 2) свідчать, що з розвитком процесу при перевипливанні пружним КІН  $K_1^e$  рівня  $K_{1*}^e = 90.5 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$  напруження у цій точці перестають зростати монотонно і починають осцилювати.

На рис. 3 отримане значення параметра Оджвіста порівнюється зі значеннями відповідної задачі плоского напруженого стану без урахування процесу розвантаження матеріалу. Виявлено, що рівень пластичних деформацій при урахуванні розвантаження буде більшим, якщо пружний КІН не перевищує рівня  $K_1^e = 129.9 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ .

На рис. 4 і 5 зображені температурні залежності відповідно середнього напруження  $\sigma$  і параметра

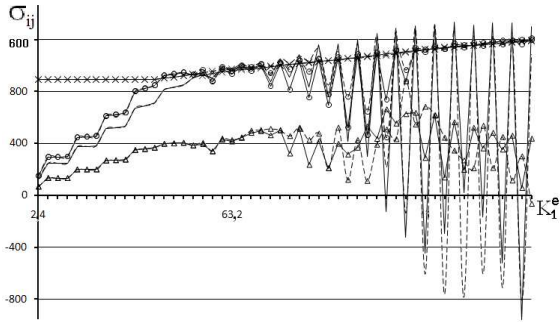


Рис. 2. Залежність напружень від  $K_1^e$  у комірці 1 на продовженні осі тріщини:  
 неперервні – розв’язок з урахуванням розвантаження,  
 штрихові – розв’язок без урахування розвантаження;  
 без маркера –  $\sigma_{xx}$ ,  $\times$  –  $\sigma_{yy}$ ,  
 $\Delta$  – напруження текучості  $\sigma_S$ ,  
 $\circ$  – інтенсивність напружень  $\sigma_i$

ра Одквіста  $\kappa$  у комірці 1, коли КІН  $K_1^e$  дорівнює  $57.1 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ . З графіків видно, що при температурі  $T \leq -50^\circ\text{C}$  значення середніх напружень і параметра Одквіста для обох випадків співпадають.

## ВИСНОВКИ

Розроблено методику для розв’язку задач для плоского напруженого стану у динамічній пружно-пластичній постановці. Розв’язання такої задачі для компактного зразка для визначення в’язкості руйнування на триточковий згин у динамічному пружно-пластичному формулюванні з урахуванням процесу розвантаження матеріалу дає можливість набагато точніше визначити поля пластичних деформацій і напружень у порівнянні з квазістатичною задачею для плоского напруженого стану.

1. Махненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – К.: Наук. думка, 1976. – 320 с.
2. Богданов В. Р. Визначення в’язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану // Вісн. Київ. нац. ун-ту, Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. 3. – С. 51–56.
3. Богданов В. Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісн. Київ. нац. ун-ту, Сер. фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 51–56.
4. Богданов В. Р., Сулым Г. Т. О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упругопластических деформаций при динамическом нагружении // Теор. прикл. мех. – 2010. – 47. – С. 126–133.

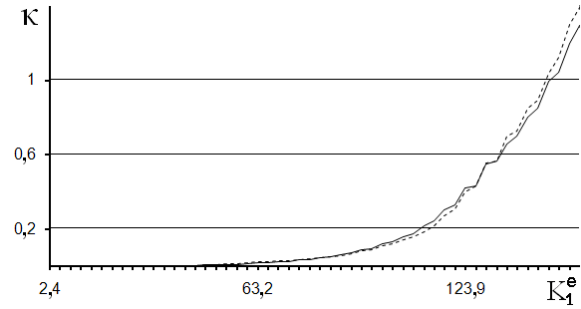


Рис. 3. Залежність параметра Одквіста  $\kappa$  у комірці 1 від КІН  $K_1^e$ :  
 неперервні – розв’язок з урахуванням розвантаження,  
 штрихові – розв’язок без урахування розвантаження

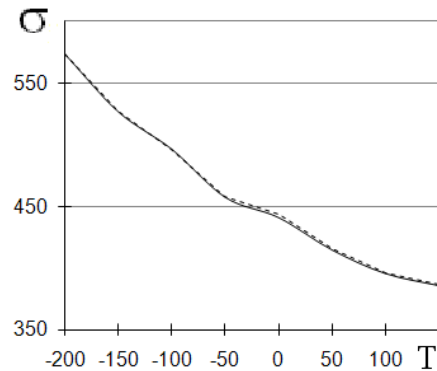


Рис. 4. Залежність середнього напруження від температури:  
 неперервні – розв’язок з урахуванням розвантаження,  
 штрихові – розв’язок без урахування розвантаження

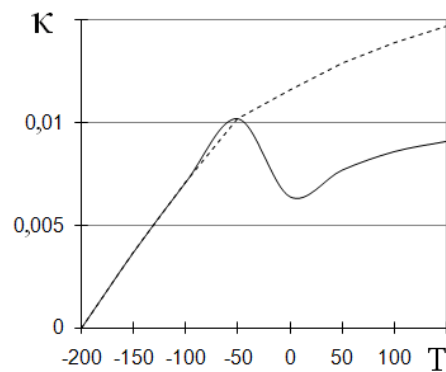


Рис. 5. Залежність параметра Одквіста  $\kappa$  у комірці 1 від температури:  
 неперервні – розв’язок з урахуванням розвантаження,  
 штрихові – розв’язок без урахування розвантаження

5. Богданов В. Р., Сулим Г. Т Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки.– 2010.– Вип. 4.– С. 51–54.
6. Богданов В. Р., Сулим Г. Т Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки.– 2010.– **73**.– С. 192–204.
7. Богданов В. Р., Сулим Г. Т Моделирование подрастания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния // Пробл. обчисл. мех. міцн. констр.– 2011.– № 15.– С. 33–44.
8. Богданов В. Р., Сулим Г. Т Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі числового моделювання плоского деформованого стану // Фіз.-хім. мех. матер.– 2010.– № 6.– С. 16–24.
9. Богданов В. Р., Сулим Г. Т Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Надійність и долговечность машин и сооружений.– 2010.– **33**.– С. 153–166.
10. Немировский Ю. В., Романова Т. П Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием // Прикл. мех.– 2010.– **46**, № 3.– С. 70–76.
11. Теория пластичности: Сборник.– М.: ИЛ, 1948.– 460 с.
12. Аркулис Г. Э., Дорогобид В. Г Теория пластичности.– М.: Металлургия, 1987.– 352 с.
13. Хемминг Р. В Численные методы.– М.: Наука, 1972.– 399 с.
14. Саврук М. П Механика разрушения и прочность материалов. Том 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами.– К.: Наук. думка, 1988.– 620 с.
15. Зюкина Е. Л Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского.– 2004.– **26**.– С. 151–160.