

УДК 539.3

БИФУРКАЦИИ ХОПФА В ВОЛНОВЫХ МОДЕЛЯХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНЫХ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН

С. Н. ХУДОЛИЙ, О. В. ГЛУШАКОВА

*Национальный транспортный университет, Киев**Получено 09.06.2010*

Построена волновая модель торсионных колебаний вращающихся колонн глубокого бурения. Выполнено компьютерное исследование эффектов зарождений их крутильных автоколебаний. Найденны диапазоны значений угловых скоростей вращения, соответствующие режимам устойчивых периодических движений. Показано, что в состояниях, ограничивающих эти диапазоны, реализуются бифуркации Хопфа. Проанализировано влияние длин участков составных бурильных колонн на бифуркационные значения их угловых скоростей. Установлены основные закономерности наступления и протекания автоколебательных процессов в таких системах.

Побудовано хвильову модель торсіонних коливань колон глибокого буріння, які обертаються. Виконано комп'ютерне дослідження ефектів зародження їхніх крутильних автоколивань. Знайдені діапазони значень кутових швидкостей обертання, які відповідають режимам стійких періодичних рухів. Показано, що в станах, які обмежують ці діапазони, реалізуються бифуркації Хопфа. Проаналізовано вплив довжин ділянок складених бурильних колон на бифуркаційні значення їхніх кутових швидкостей. Встановлено основні закономірності настання й перебігу автоколебальних процесів у таких системах.

Wave model of a torsional vibration of deep drill stems has been developed. The effects of generation of the torsional auto-oscillations have been simulated using the computer. The ranges of rotation angle velocity corresponding to the regimes of stable periodic motions have been determined. The Hopf bifurcations have been shown to occur in the conditions limiting these ranges. The influence of lengths of the sections forming the composite drill stems on the bifurcational values of angular velocities has been analyzed. General laws of occurrence and course of the auto-oscillation processes in composite drill stems have been specified.

ВВЕДЕНИЕ

Нефть и газ являются наиболее привлекательными видами топлива на транспорте, в промышленности и в жилом секторе благодаря их высокой теплотворной способности, легкости добычи и транспортировки, а также простоте извлечения из них тепловой энергии. Поэтому энергетические проблемы, все заметнее обостряющиеся в последнее время, в значительной мере обусловлены приближающимся исчерпанием нефтяных и газовых ресурсов и усложнением условий их добычи. Поскольку легкодоступные месторождения нефти и газа истощены в результате их нерационального и бесхозяйственного извлечения в течение двух предыдущих столетий, все более актуальной становится проблема бурения сверхглубоких нефтяных и газовых скважин.

При бурении глубоких скважин довольно сложным динамическим эффектом, способствующим возникновению аварийных ситуаций, является самовозбуждение крутильных колебаний вращающейся конструкции бурильной колонны (БК). В этом случае БК можно представить как торсионный маятник, в нижней части которого за счет трения взаимодействия между долотом и разрушаемой породой генерируется эффект срыв-

ного скольжения, в результате чего процесс стационарного оттока энергии приводного механизма в окружающую среду нарушается и долото переходит от режима установившегося стационарного вращения в режим крутильных автоколебаний.

Так как долото жестко связано с конструкцией БК, при его срывных крутильных колебаниях от нижнего конца БК к ее верхнему концу начинают распространяться упругие (как правило, негармонические) волны кручения, которые, достигнув верхнего конца, отражаются от него, и, вернувшись к долоту, воздействуют на него, оказывая существенное влияние на форму его колебаний. Поэтому движение такой системы может быть описано только на основе математической модели волнового торсионного маятника, роль маховика в котором играет долото. В данной работе показано, что благодаря отсутствию дисперсии этих волн и возможности представления решения волнового уравнения в форме Даламбера, волновое уравнение с системой краевых условий может быть приведено к одному обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка с запаздывающим аргументом (временем t) и с варьируемым параметром угловой скорости ω . В зависимости от значения этого параметра, построенное уравнение может иметь как стационарное решение $\varphi(t) = \text{const}$,

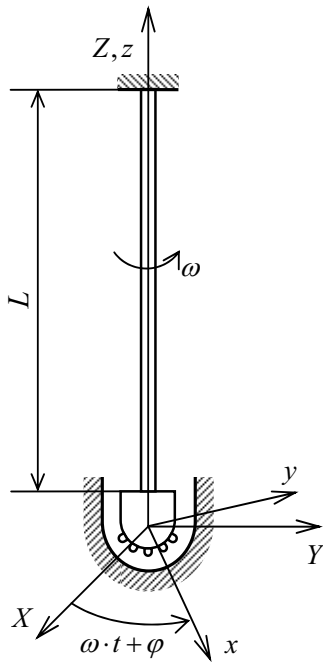


Рис. 1. Схема однородной буровой колонны

так и автоколебательное решение в виде периодической функции $\varphi(t)$. Смена первого решения вторым называется бифуркацией Хопфа, а значение параметра ω , при котором эта смена происходит, – бифуркационным [1–7]. Ниже на основе построенной математической модели торсионных колебаний БК найдены бифуркационные значения ω для различных длин БК и установлены некоторые закономерности протекания автоколебательных процессов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ТОРСИОННЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ В ОДНОРОДНЫХ КОЛОННАХ

Рассмотрим буровую колонну в виде торсионного маятника, к нижнему концу которого прикреплено долото. Верхний конец БК вращается с заданной постоянной скоростью ω .

Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в центре масс долота, ось OZ которой совпадает с осью БК, и систему координат $Oxyz$, вращающуюся с угловой скоростью ω вокруг оси OZ (рис. 1)

Движение элементов БК и долота относительно системы $Oxyz$ определяется углом упругого кручения $\varphi = \varphi(z, t)$.

На нижнем конце на долото действует момент

сил резания (трения) M^{fr}

$$M^{fr} = M[\omega + \dot{\varphi}(0, t)], \tag{1}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Упругие крутильные движения БК описываются уравнением

$$\rho I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - G I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

где ρ – плотность материала БК; G – его модуль упругости при сдвиге; I_z – полярный момент инерции площади поперечного сечения трубы БК.

Введя обозначение $\beta = \sqrt{G/\rho}$, где β – скорость распространения поперечной упругой волны (волны кручения), приведем уравнение (2) к стандартной форме:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Оно имеет решение в форме Даламбера:

$$\varphi(z, t) = f(z - \beta t) + g(z + \beta t), \tag{4}$$

где $f(z - \beta t)$, $g(z + \beta t)$ – произвольные непрерывные (не обязательно дифференцируемые) функции, первая из которых определяет волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Oz , вторая – в противоположном. Поскольку волны недиспергирующие, то они перемещаются, не изменяя своего профиля, что существенно упрощает решение задачи.

Действительно, в этом случае функции f и g при $t > 0$ определяются только начальными условиями:

$$f(z - 0) = f_0(z), \quad g(z + 0) = g_0(z), \tag{5}$$

и граничными условиями на нижнем конце $z = 0$:

$$F[f(0 - \beta t), g(0 + \beta t)] = 0 \tag{6}$$

и на верхнем конце $z = L$:

$$\varphi(L, t) = f(L - \beta t) + g(L + \beta t) = 0. \tag{7}$$

Здесь F – нелинейный дифференциальный оператор, описывающий движение долота.

Условие (6) формируется с помощью уравнения баланса моментов сил инерции M^{in} , сил трения M^{fr} и сил упругости M^{el} :

$$M^{in} + M^{fr} + M^{el} = 0, \tag{8}$$

вытекающего из принципа Даламбера, записанного для долота, условно отделенного от трубы БК.

Входящий в уравнение (8) момент M^{in} сил инерции, действующих на долото, рассчитывается по формуле

$$M^{\text{in}} = -J\ddot{\varphi}, \quad (9)$$

где J – момент инерции долота относительно оси Oz ; $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение долота относительно инерциальной системы координат $OXYZ$.

Момент M^{fr} определяется условиями силового взаимодействия долота с разрушаемой породой и угловой скоростью $\omega + \dot{\varphi}$ их относительного вращательного движения. Обычно [8, 9] этот момент задается в виде зависимости $M^{\text{fr}}(\omega + \dot{\varphi})$, которая может быть описана с помощью аппроксимирующей функции

$$M^{\text{fr}} = -\frac{a_1(\omega + \dot{\varphi}) + a_3(\omega + \dot{\varphi})^3 + a_5(\omega + \dot{\varphi})^5}{1 + a_2(\omega + \dot{\varphi})^2} - \frac{a_7(\omega + \dot{\varphi})^7 + a_9(\omega + \dot{\varphi})^9}{1 + a_2(\omega + \dot{\varphi})^2}, \quad (10)$$

где коэффициенты a_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) определяются из экспериментов.

Момент M^{el} вычисляется с помощью формулы

$$M^{\text{el}} = GI_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (11)$$

Угловая деформация $\partial \varphi / \partial z$ подсчитываются так:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial z} [f(z - \beta t) + g(z + \beta t)]_{z=0}.$$

На основании условия (7) имеем

$$g(L + \beta t) = -f(L - \beta t).$$

Это равенство может быть использовано в качестве начального условия для исходящей от края $z = L$ волны:

$$g(z, t) = g(z + \beta t) = -f(2L - z - \beta t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(z, t) &= f(z - \beta t) - f(2L - z - \beta t) = \\ &= f(u) - f(w), \end{aligned} \quad (12)$$

где $u = z - \beta t$; $w = 2L - z - \beta t$. При $z = 0$ получим

$$\begin{aligned} \varphi(0, t) &= f(-\beta t) - f(2L - \beta t) = \\ &= f(-\beta t) - f\left[-\beta\left(t - \frac{2L}{\beta}\right)\right]. \end{aligned}$$

Таким образом, в точке $z = 0$ присоединения долота к БК угол $\varphi(0, t)$ упругого закручивания последней определяется текущим значением функции

$f(-\beta t)$ и ее значением $f(2L - \beta t)$, которое имело место в данной точке в момент времени, сдвинутый в прошлое на величину $\Delta t = 2L/\beta$. Это означает, что $\varphi(0, t)$ – функция не только текущего значения аргумента t , но и аргумента $(t - \Delta t)$ с запаздыванием времени.

Из равенства (12) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial f(u)}{\partial z} - \frac{\partial f(w)}{\partial z} = \frac{\partial f(u)}{\partial u} + \frac{\partial f(w)}{\partial w}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial f(u)}{\partial t} - \frac{\partial f(w)}{\partial t} = -\beta \frac{\partial f(u)}{\partial u} + \beta \frac{\partial f(w)}{\partial w}. \end{aligned}$$

В результате сравнения этих соотношений получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial f(z - \beta t)}{\beta \partial t} - \frac{\partial f(2L - z - \beta t)}{\beta \partial t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} M^{\text{el}} &= \\ &= -GI_z \left[\frac{\partial f(z - \beta t)}{\beta \partial t} + \frac{\partial f(2L - z - \beta t)}{\beta \partial t} \right]_{z=0} = \\ &= -\frac{GI_z}{\beta} \left[\frac{\partial f(-\beta t)}{\beta \partial t} + \frac{\partial f(2L - \beta t)}{\beta \partial t} \right]_{z=0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя выражения (9), (10), (13) в формулу (8) с учетом соотношения (5) получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned} J[\ddot{f}(-\beta t) - \ddot{f}(2L - \beta t)] + \\ + \frac{a_1[\omega + \dot{f}(-\beta t) - \dot{f}(2L - \beta t)]}{1 + a_2[\omega + \dot{f}(-\beta t) - \dot{f}(2L - \beta t)]^2} + \dots + \\ + \frac{a_9[\omega + \dot{f}(-\beta t) - \dot{f}(2L - \beta t)]^9}{1 + a_2[\omega + \dot{f}(-\beta t) - \dot{f}(2L - \beta t)]^2} + \\ + \frac{GI_z}{\beta} [\dot{f}(-\beta t) + \dot{f}(2L - \beta t)] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Данное уравнение эквивалентно системе волнового уравнения с частными производными (2) и краевых уравнений (6), (7).

2. ВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ ТОРСИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНЫХ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН

Рассмотрим составную БК. Пусть она состоит из двух участков, длины которых составляют l_1 и

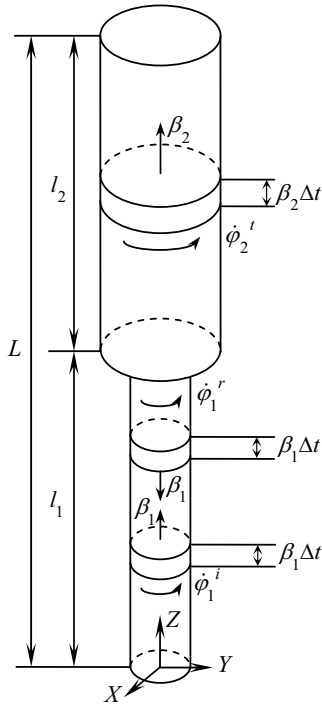


Рис. 2. Схема составной буровой колонны

l_2 , а механические характеристики – β_1 , ρ_1 , l_1 и β_2 , ρ_2 , l_2 соответственно (рис. 2).

Тогда волны вида $f(z-\beta t)$, распространяясь от точки $z=0$ и достигая точки $z=l_1$, будут испытывать в ней ударное преломление-отражение. Для вычисления интенсивностей соответствующих преломленных и отраженных волн рассмотрим процесс дифракции элемента волны длиной $\beta_1 \Delta t$ в течение времени Δt . Выделим элементы БК в падающей, отраженной и проникшей волнах, которые участвуют в этом взаимодействии и имеют угловые скорости $\dot{\varphi}_1^i$, $\dot{\varphi}_1^r$, $\dot{\varphi}_2^i$ и длины $\beta_1 \Delta t$, $\beta_1 \Delta t$, $\beta_2 \Delta t$ соответственно. Здесь индексами “i”, “r” и “t” помечены соответственно падающая, отраженная и преломленная волны. Полагая, что $\dot{\varphi}_1^i$ известна, найдем $\dot{\varphi}_1^r$, $\dot{\varphi}_2^t$. Для этого используем условие сохранения момента количества движения выделенных элементов до и после удара. Оно имеет вид

$$\Delta K_1^i = \Delta K_1^r + \Delta K_2^t, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta K_1^i &= \dot{\varphi}_1^i \rho_1 I_1 \beta_1 \Delta t, \\ \Delta K_1^r &= \dot{\varphi}_1^r \rho_1 I_1 \beta_1 \Delta t, \\ \Delta K_2^t &= \dot{\varphi}_2^t \rho_2 I_2 \beta_2 \Delta t. \end{aligned} \quad (16)$$

Дополнив уравнение (15) условием неразрывности

угловых скоростей

$$\dot{\varphi}_1^i + \dot{\varphi}_1^r = \dot{\varphi}_2^t, \quad (17)$$

получим систему двух уравнений для вычисления $\dot{\varphi}_1^r$ и $\dot{\varphi}_2^t$. Она имеет решение

$$\dot{\varphi}_1^r = \frac{\beta_2 \rho_2 I_2 - \beta_1 \rho_1 I_1}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{\varphi}_1^i, \quad (18)$$

$$\dot{\varphi}_2^t = \frac{2\beta_1 \rho_1 I_1}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{\varphi}_1^i.$$

Из условий неразрывности крутящего момента и угла кручения вычисляются углы кручения в отраженной и проникшей волнах:

$$\varphi_1^r = \frac{\beta_2 \rho_2 I_2 - \beta_1 \rho_1 I_1}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \varphi_1^i, \quad (19)$$

$$\varphi_2^t = \frac{2\beta_1 \rho_1 I_1}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \varphi_1^i.$$

При рассмотрении дифракции волны $g(z+\beta t)$ в сечении $z=l_1$ волна $g_2^i(z+\beta_2 t)$ на втором участке, прибывающая к этому сечению, является падающей и считается известной, а волны $g_2^r(z-\beta_2 t)$ ($z \geq l_1$) и $g_1^t(z+\beta_1 t)$ ($z \leq l_1$) – отраженной и преломленной и подлежат определению. Их кинематические характеристики вычисляются по изложенной выше методике с помощью равенств

$$\varphi_2^r = \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \varphi_2^i, \quad (20)$$

$$\varphi_1^t = \frac{2\beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \varphi_2^i$$

и

$$\varphi_2^r = \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \varphi_2^i, \quad (21)$$

$$\varphi_1^t = \frac{2\beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \varphi_2^i.$$

В результате дифракции волн $\varphi_1^i(z-\beta_1 t)$ и $\varphi_2^i(z-\beta_2 t)$ суперпозиция проникшей $\varphi_2^t(z-\beta_2 t)$ и отраженной $\varphi_2^r(z-\beta_2 t)$ волн составляет волну $f_2(z-\beta_2 t)$ на втором участке, а $\varphi_1^r(z+\beta_1 t) + \varphi_1^t(z+\beta_1 t)$ – волну $g_1(z+\beta_1 t)$ на первом участке. С учетом этого получим начальное условие в точке $z=l_1$ для волны $f_2(z-\beta_2 t)$ в

области $l_1 \leq z \leq L$:

$$\begin{aligned}
 f_2(l_1 - \beta_2 t) &= \\
 &= \frac{2\beta_1 \rho_1 I_1}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} f_1^i(l_1 - \beta_2 t) - \\
 &\quad - \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} g_2^i(l_1 + \beta_1 t), \\
 \dot{f}_2(l_1 - \beta_2 t) &= \\
 &= \frac{2\beta_1 \rho_1 I_1}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{f}_1^i(l_1 - \beta_2 t) - \\
 &\quad - \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{g}_2^i(l_1 + \beta_1 t),
 \end{aligned} \tag{22}$$

и начальные условия в этой точке для волны $g_1(z + \beta_1 t)$ в области $0 \leq z \leq l_1$:

$$\begin{aligned}
 g_1(l_1 + \beta_1 t) &= \\
 &= \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} f_1^i(l_1 - \beta_2 t) + \\
 &\quad + \frac{2\beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} g_2^i(l_1 + \beta_2 t), \\
 \dot{g}_1(l_1 + \beta_1 t) &= \\
 &= \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{f}_1^i(l_1 - \beta_2 t) + \\
 &\quad + \frac{2\beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{g}_2^i(l_1 + \beta_2 t),
 \end{aligned} \tag{23}$$

Уравнения (3), (4) совместно с граничными условиями (6), (8) и условиями сопряжения (22), (23) описывают трехточечную краевую задачу по отношению к переменной z с условиями в точках $z=0$, $z=l_1$ и $z=L$. Для ее численного решения применяется метод Рунге–Кутты.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для установления зависимости особенностей возникновения бифуркаций рождения цикла и процесса крутильных автоколебаний БК длинами $L=1000$ и 2000 м от характера изменения ее механических свойств вдоль осевой линии решены четыре задачи. Задачи 1 и 2 решены для БК длиной 1000 м. В задаче 1 рассмотрена БК, состоящая из двух секций длинами $l_1=333$ м, $l_2=667$ м. Значения основных определяющих параметров: $J=3.1 \text{ кг}\cdot\text{м}^3$, $G=8.076 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\beta=3218 \text{ м/с}$.

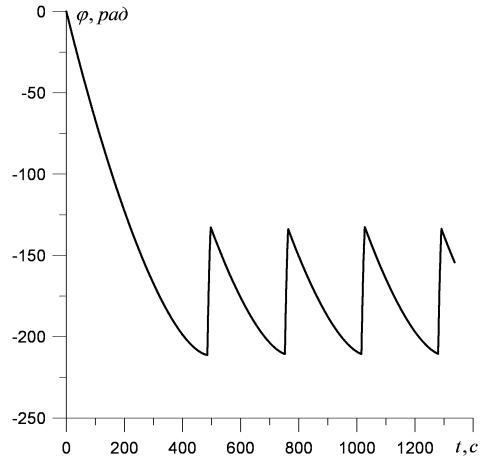


Рис. 3. Диаграмма крутильных колебаний долота

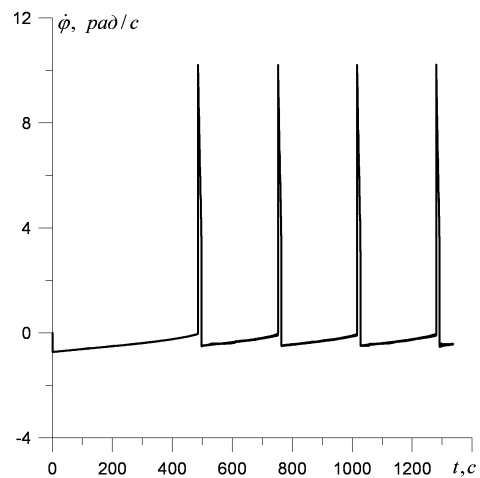


Рис. 4. Диаграмма изменения угловой скорости долота

Выбранная функция $M^{\text{fr}}(\omega + \dot{\varphi})$ описывается равенством (10) при значениях коэффициентов $a_1=2400 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, $a_2=225 \text{ с}^2$, $a_3=15000 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^3$, $a_5=1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^5$, $a_7=4 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^7$, $a_9=-130 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^9$. Сечение верхней секции имеет момент инерции $I_{z,2}=3.12 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$, сечение нижней секции – $I_{z,1}=0.404 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$. В задаче 2 длины секций БК составляют $l_1=667$ м, $l_2=333$ м. Задачи 3 и 4 решены для БК длиной 2000 м. В задаче 3 длины секций БК составляют $l_1=667$ м, $l_2=1333$ м, а в задаче 4 – $l_1=1333$ м, $l_2=667$ м. При этом значения основных определяющих параметров не меняются.

На рис. 3 показана диаграмма изменения угла закручивания $\varphi(t)$ долота при $\omega_b=0.725 \text{ рад/с}$. На рис. 4 показан график зависимости от времени угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$. На рис. 5 дан фазовый

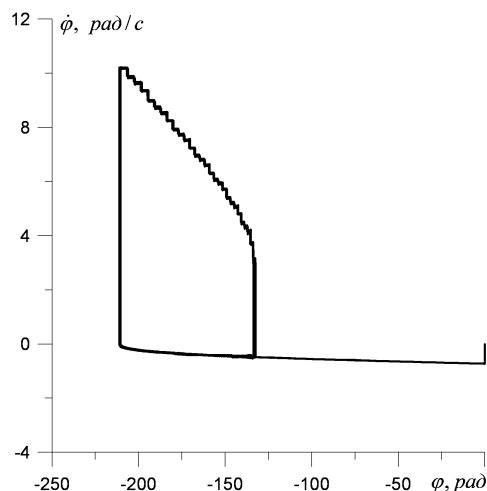


Рис. 5. Фазовый портрет автоколебаний

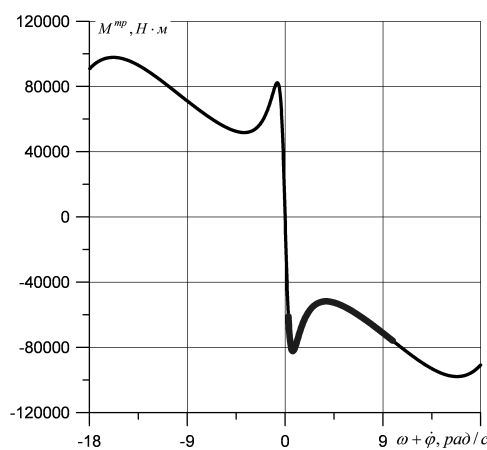


Рис. 6. Диаграмма момента трения M^{tr}

Таблица. Параметры крутильных автоколебаний составной БК

Номер задачи	ω_b , рад/с	φ_{st} , рад	φ_{av} , рад	D , рад	T , с
1	0.71	-105.8	-85.9	39.8	139.9
2	0.71	-178.4	-145.2	66.4	124.5
3	0.725	-210.1	-38.8	77.6	266.6
4	0.725	-357	-66.5	133	462.5

портрет автоколебаний (зависимость $\varphi(t)$ от $\dot{\varphi}(t)$). рис. 3–5 соответствуют задаче 3. Аналогичные графики для задач 1, 2 и 4 не приведены, поскольку для них картина качественно не меняется. На рис. 6 представлен график функции M^{tr} , использованной для всех четырех задач.

Численные исследования показали, что при ма-

лых и больших значениях скорости ω долото находится в состояниях стационарного вращения с постоянным углом закручивания $\varphi(t) = \text{const}$ и $\dot{\varphi}(t) = 0$. Крутильные автоколебания долота возбуждаются внутри диапазона $\omega_b \leq \omega \leq \omega_d$, где ω_b, ω_d – бифуркационные значения ω , при которых рождаются и утрачиваются циклы автоколебаний. Изучалось поведение системы в состоянии бифуркации рождения цикла при $\omega = \omega_b$. Результаты решений приведены в таблице. В ней φ_{st} – угол упругого квазистатического закручивания долота в предбифуркационном состоянии; φ_{av} – значение φ , относительно которого происходят автоколебания; D – размах автоколебаний; T – период автоколебаний. Заслуживает внимания установленный эффект независимости бифуркационного значения $\omega_b = 0.71$ рад/с для $L = 1000$ м и $\omega_b = 0.725$ рад/с для $L = 2000$ м от жесткостных и инерционных свойств БК, однако остальные числовые значения параметров автоколебательного процесса отличаются друг от друга существенно.

ВЫВОДЫ

1. Построена волновая модель торсионных колебаний вращающихся колонн глубокого бурения. Выполнено компьютерное исследование эффектов зарождения их крутильных автоколебаний. Найдены диапазоны значений угловых скоростей вращения, соответствующие режимам устойчивых периодических движений. Показано, что в состояниях, ограничивающих эти диапазоны, реализуются бифуркации Хопфа.
2. Выполнен анализ влияния длин участков составных буровых колонн на бифуркационные значения их угловых скоростей. Установлены основные закономерности наступления и протекания автоколебательных процессов в составных буровых колоннах. Обнаружено, что характер изменения жесткостных свойств вращающейся колонны вдоль ее длины не влияет на бифуркационные значения угловой скорости вращения, но в значительной мере определяет амплитуду и период автоколебаний.

1. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы.– М.: Наука, 1980.– 364 с.
2. Рабинович М. К., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.– М.: Наука, 1984.– 432 с.
3. Гуляев В. И., Борщ О. И. Спиральні хвилі в закручених пружних трубчастих стержнях, що оберта-

- ються, з внутрішніми потоками рідини // Акуст. вісн.– 2007.– 10, № 3.– С. 12–18.
4. В. И. Гуляев, О. В. Глушакова, С. Н. Худолий Квантованные аттракторы в волновых моделях торсионных колебаний колонн глубокого бурения // Изв. РАН. МТТ.– 2010.– № 2.– С. 134–147.
 5. В. И. Гуляев, С. Н. Худолий, О. В. Глушакова Самовозбуждение крутильных колебаний колонн глубокого бурения // Пробл. прочн.– 2009.– № 6.– С. 31–43.
 6. V. Gulyayev, S. Hudoliy, O. Glushakova The Hopf bifurcations in the wave models of torsional vibrations of superdeep drill columns // ENOC 2008 Sixth Euromech Nonlin. Dyn. Conf.– Saint Petersburg, Russia, 2008.– P. 136.
 7. V. Gulyayev, S. Hudoliy, O. Glushakova Quantized attractors in the wave torsion models of superdeep drill columns // Int. Sympos. RA08 on Rare Attractors and Rare Phenomena in Nonlin. Dyn.– Riga, Latvia, 2008.– P. 33.
 8. Tucker R. W., Wang C. On the effective control of torsional vibrations in drilling systems // J. Sound Vib.– 1999.– 224, № 1.– P. 101–122.
 9. Ford Brett J. The genesis of torsional drillstring vibrations // SPE Drill. Eng.– 1992.– 7, № 3.– P. 168–174.