

УДК 517.9:534.8

# К АНАЛИЗУ ЭФФЕКТИВНОСТИ СОСТАВНЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИХ КОНФИГУРАЦИИ

К. А. ТРАПЕЗОН

Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев

Получено 28.04.2010

Рассмотрены варианты усовершенствования разработанных ранее конфигураций концентраторов акустической энергии. Приведена методика получения основных технических параметров концентраторов и намечены рекомендации по рациональному выбору их профилей. Такие концентраторы имеют несколько меньшие коэффициенты усиления колебаний, чем их традиционные аналоги, но отличаются более высоким техническим ресурсом.

Розглянуті варіанти удосконалення розроблених раніше конфігурацій концентраторів акустичної енергії. Наведено методику отримання основних технічних параметрів концентраторів й окреслено рекомендації щодо раціонального вибору їхніх профілів. Такі концентратори мають дещо менші коефіцієнти підсилення коливаль, ніж їхні традиційні аналоги, але відрізняються більш високим технічним ресурсом.

The paper deals with considering of the variants for improving of configurations of the thickeners of acoustic energy. The technique for receiving of basic technical parameters of the thickeners is presented and recommendations for rational choosing of their profiles are outlined. Such thickeners have somewhat lower vibration amplification coefficients than their traditional analogies, but are notable for higher useful operating life.

## ВВЕДЕНИЕ

Концентраторы акустической энергии широко используются при ультразвуковой сварке, а также очистке деталей и узлов электронных устройств различной сложности. Кроме того, они с успехом применяются в ядерной индустрии для измерения температуры внутри урановых стержней и пищевой промышленности для получения высококачественных пищевых компонент. В строительстве ударные импульсы, передаваемые такими акустическими устройствами, позволяют проводить контроль бетонных конструкций на предмет их разрушения и дефектов.

Концентраторы ультразвуковых колебаний выполняются в виде стержней переменного сечения, законом изменения которых в конечном итоге и определяется эффективность работы всей системы. Основное их назначение – концентрация, а следовательно, усиление продольных акустических колебаний в зоне контакта концентратора с полезной нагрузкой. Подобные конструкции работают в резонансном режиме. Это сопряжено с нагревом разных их участков, который со временем может привести к термоусталостному разрушению. Учет тепловых свойств и снижение нагрева за счет охлаждения наиболее целесообразно проводить в опасных сечениях (области действия максимальных механических напряжений), а также в тех сечениях, где поперечный диаметр наименьший.

В этой статье предложено заменить ранее разработанное устройство на более технологическую составную конструкцию, для одной части которой принимается закон изменения диаметра исходного концентратора, а вторая выполняется в виде призматического стержня постоянного поперечного сечения [1]. Сочленение обеих частей проводится в области минимального поперечного диаметра исходной конструкции концентратора.

## 1. ИСХОДНОЕ УРАВНЕНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Обратимся к математической формулировке задачи. Дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня переменного сечения имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial X} \ln F \frac{\partial w}{\partial X} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = 0, \quad (1)$$

где  $w(X, t)$  – перемещение текущего поперечного сечения при колебаниях;  $c = \sqrt{E/\rho}$  – скорость распространения продольной волны в стержне;  $E$  и  $\rho$  – модуль Юнга и плотность материала, из которого изготовлен стержень;  $F(x)$  – площадь поперечного сечения стержня. Уравнение (1) справедливо при условии, что поперечные размеры стержня достаточно малы по сравнению с длиной (так называемый тонкий стержень), а поперечные сечения при колебаниях остаются плоскими, т. е. здесь не учитываются поперечные деформации.

Используя метод разделения переменных, положим  $w = W(X) \cos(\omega t)$  (гармонические колебания) и введем вместо  $X$  относительную координату  $x = X/l$ , где  $l$  – длина стержня. Тогда вместо формулы (1) получим уравнение форм колебаний стержня [1, 2]:

$$W'' + 2 \frac{D'}{D} W' + k^2 W = 0, \quad (2)$$

где  $D(x) = \sqrt{F(x)}$  – параметр, определяющий форму поперечного сечения;  $k = l\omega/c$  – собственное значение задачи;  $\omega = 2\pi f$  – круговая собственная частота колебаний стержня;  $f$  – линейная циклическая частота колебаний стержня; штрих обозначает производную по  $x$ .

Граничные условия для стержня со свободными концами при  $x = \alpha$  и  $x = \beta$  имеют вид

$$W'(x = \alpha) = W'(x = \beta) = 0, \quad \beta - \alpha = 1. \quad (3)$$

Эффективность работы концентратора связана с выбором закона изменения  $D(x)$  таким образом, чтобы коэффициент усиления  $M = W(\alpha)/W(\beta)$  был максимально возможным, а циклические механические напряжения в опасных сечениях концентратора были ограничены уровнями ниже предела усталости материала концентратора.

В качестве примера рассмотрим два типа составных концентраторов, в основу конструкции которых положена замена рабочего участка переменного сечения стержнем постоянного сечения.

## 2. КОНЦЕНТРАТОР ВИДА ПРИЗМА – КАТЕНОИДА

Пусть профиль концентратора определяется законом  $D(x)$  вида (призма – катеноида) (рис. 1):

$$D(x) = \begin{cases} b, & x \in (0, \gamma), \\ \text{ch}(mx) & x \in (\gamma, 1), \end{cases} \quad (4)$$

где  $b$  и  $m$  – произвольные постоянные, значения которых выбирают исходя из необходимых присоединительных и габаритных размеров. Заметим, что эта задача в принципиальном плане рассматривалась М. М. Писаревским в [1].

Для первой (левой) части концентратора при  $0 < x \leq \gamma$  решение уравнения (1) и его производная с учетом граничного условия  $W_1'(0) = 0$  имеют вид

$$W_1(x) = B_1 \cos(k_1 x), \quad W_1'(x) = -k_1 B_1 \sin(k_1 x), \quad (5)$$

где значение коэффициента  $B_1$  определяется из условий сопряжения частей концентратора.

Для второй части составного концентратора решение уравнения (1) и его производную можно определить, используя результаты работы [3]:

$$W_2(x) = \frac{1}{\text{ch}(mx)} [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)],$$

$$W_2'(x) = -A \frac{m \cos(\lambda x) \text{sh}(mx) + \lambda \sin(\lambda x) x \text{ch}(mx)}{\text{ch}^2(mx)^2} + B \frac{\lambda \cos(\lambda x) \text{ch}(mx) - m \sin(\lambda x) x \text{sh}(mx)}{\text{ch}^2(mx)}. \quad (6)$$

Здесь  $\lambda = \sqrt{k_1^2 - m^2}$ ;  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные, значения которых определяются из граничных условий и условий сопряжения. Так, граничное условие  $W_2'(1) = 0$  позволяет найти связь между  $A$  и  $B$ :

$$B = A \frac{\lambda \sin(\lambda) \text{ch}(m) + m \cos(\lambda) \text{sh}(m)}{\lambda \cos(\lambda) \text{ch}(m) - m \sin(\lambda) \text{sh}(m)}.$$

Уравнение собственных частот можно получить на основе двух условий сопряжения. Первое из них,  $W_1(\gamma) = W_2(\gamma)$ , дает

$$B_1 \cos(k_1 \gamma) = \frac{A}{\text{ch}(m\gamma)} \left[ \cos(\lambda \gamma) + \frac{B}{A} \sin(\lambda \gamma) \right]. \quad (7)$$

Второе условие сопряжения,  $W_1'(\gamma) = W_2'(\gamma)$ , приводит к соотношению

$$k_1 B_1 \sin(k_1 \gamma) = \frac{A}{\text{ch}^2(m\gamma)} \times \left\{ [\lambda \sin(\lambda \gamma) \text{ch}(m\gamma) + m \cos(\lambda \gamma) \text{sh}(m\gamma)] - \frac{B}{A} [\lambda \cos(\lambda \gamma) \text{ch}(m\gamma) - m \sin(\lambda \gamma) \text{sh}(m\gamma)] \right\}. \quad (8)$$

Из формул (7) и (8) получим частотное уравнение:

$$k_1 \text{tg}(k_1 \gamma) = \frac{1}{\cos(\lambda \gamma) + \frac{B}{A} \sin(\lambda \gamma)} \frac{1}{\text{ch}(m\gamma)} \times \left\{ [(\lambda \sin(\lambda \gamma) \text{ch}(m\gamma) + m \cos(\lambda \gamma) \text{sh}(m\gamma))] - \frac{B}{A} [\lambda \cos(\lambda \gamma) \text{ch}(m\gamma) - m \sin(\lambda \gamma) \text{sh}(m\gamma)] \right\}. \quad (9)$$

Выражение для расчета коэффициента усиления имеет вид

$$M = \frac{W_1(0)}{W_2(1)} = \frac{B_1}{A} \frac{\text{ch } m}{\cos \lambda + \frac{B}{A} \sin \lambda}, \quad (10)$$

где, следуя формуле (7),

$$\frac{B_1}{A} = \frac{\cos(\lambda\gamma) + \frac{B}{A} \sin(\lambda\gamma)}{\cos(k_1\gamma) \operatorname{ch}(m\gamma)}.$$

Анализ выражений (9) и (10) при  $m=1.745$  показал, что при поперечном диаметре призматической части  $b=D_0=7$  мм и присоединительном размере 20.7 мм ( $\delta=2.95$ ), собственное значение будет  $k_1=2.866 \text{ м}^{-1}$ . При этом координата присоединения составляет  $\gamma=0.368$ , а коэффициент усиления продольных колебаний –  $M=4.647$ .

Профиль составного концентратора, а также распределение перемещений и напряжений вдоль его длины показаны на рис. 1. Остальные результаты расчетов для такого концентратора при разных значениях поперечного диаметра в месте присоединения приведены в табл. 1.

### 3. КОНЦЕНТРАТОР ВИДА ПРИЗМА – ПРОФИЛЬ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Проведем анализ эффективности составного концентратора, который характеризуется следующим законом изменения функции  $D(x)$ :

$$D(x) = \begin{cases} \frac{x}{\cos(Cx)(a-Cx) + \sin(Cx)(1+aCx)}, & x \in (0.02, \gamma), \\ b = \text{const}, & x \in (\gamma, 1.02), \end{cases} \quad (11)$$

где  $C=3.5$ ;  $a=\alpha=0.02$ ;  $b=D_0=7$  мм.

Для первой (левой) части такого профиля воспользуемся решением волнового уравнения (1), полученным ранее в [4]. При этом для упрощения введем систему обозначений, подобную описанной в [5]:

$$U = D_0[(a - Cx) \cos(Cx) + (1 + aCx) \sin(Cx)] = D_0 U^*,$$

$$U' = D_0 C^2 x (a \cos(Cx) + \sin(Cx)) = D_0 (U^*)',$$

$$Z = \frac{A}{x} [(\sqrt{k_1^2 + C^2} \alpha \cos((\sqrt{k_1^2 + C^2})(x - \alpha)) + \sin((\sqrt{k_1^2 + C^2})(x - \alpha))] = AZ^*,$$

$$Z' = A(Z^*)'.$$

Тогда выражения для вычисления перемещений и напряжений (значений производной  $W'_1$ ) вдоль

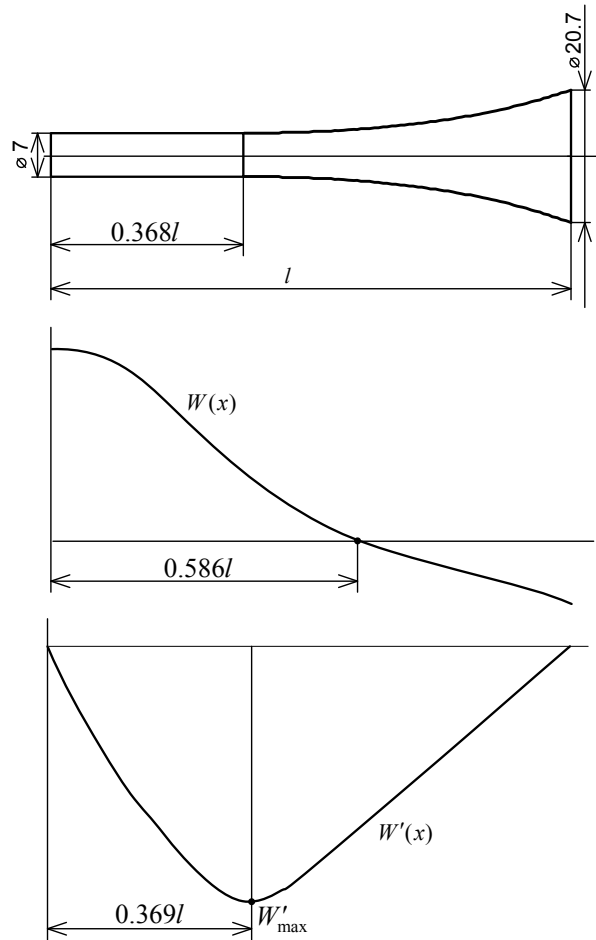


Рис. 1. Профиль составного концентратора вида “призма – катеноида” и его динамические характеристики

Табл. 1. Расчетные параметры концентратора вида призма – катеноида ( $m=1.745$ )

$b$ , мм	$\delta$	$\gamma$	$k_1$	$M$
5.602	3.695	0.233	3.0294	3.762
6	3.45	0.275	2.9888	3.933
6.3	3.285	0.305	2.9565	4.104
7	2.958	0.368	2.886	4.647

длины составного концентратора примут вид

$$W_1(x) = D_0 A [(k_1^2 + C^2) U^* Z^* + (U^*)' (Z^*)'], \quad (12)$$

$$W'_1(x) = D_0 A (k_1^2) U^* (Z^*)'.$$

Для призматической части решение уравнения (1) и его производная определяются стандарт-

ным образом [1]:

$$W_2(x) = A_1 \sin(k_1 x) + B_1 \cos(k_1 x), \quad (13)$$

$$W_2'(x) = k_1 [A_1 \cos(k_1 x) - B_1 \sin(k_1 x)].$$

Чтобы задать значение параметра  $x = \gamma$  в формуле (11), допустим, что присоединительный размер составного концентратора при  $x = 0.02$  равен диаметру и составляет 20.7 мм, а диаметр призматической части – 7 мм. Поперечное сечение концентратора, равное 7 мм, соответствует  $\gamma = 0.551$ . Тогда отношение концевых размеров будет  $\delta \approx 3$ .

На основании выражений (12), (13), а также условий сопряжения составных частей построим уравнение частот и определим коэффициент усиления конструкции. Так, из условия сопряжения  $W_1'(x = \gamma) = W_2'(x = \gamma)$  следует, что

$$\frac{k_1}{\gamma^2} [(a - C\gamma) \cos(C\gamma) + (1 + aC\gamma) \sin(C\gamma)] \times$$

$$\times \left\{ \sqrt{k_1^2 + C^2}(\gamma - \alpha) \cos\left(\sqrt{k_1^2 + C^2}(\gamma - \alpha)\right) - \right.$$

$$\left. - [(k_1^2 + C^2)\alpha\gamma + 1] \sin\left(\sqrt{k_1^2 + C^2}(\gamma - \alpha)\right) \right\} = \quad (14)$$

$$= \frac{A_1}{D_0 A} \left[ \cos(k_1 \gamma) - \frac{B_1}{A_1} \sin(k_1 \gamma) \right].$$

В полученном уравнении неизвестными являются отношения коэффициентов  $A_1 / (D_0 A)$  и  $B_1 / A_1$ . Определим формулу для расчета второго из них, исходя из граничного условия – равенства нулю механических напряжений на конце составного концентратора  $W_2'(x = \varphi + 1) = 0$  ( $\varphi = 0.02$ ):

$$A_1 \cos(k_1(\varphi + 1)) = B_1 \sin k_1(\varphi + 1),$$

откуда

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\cos(k_1(\varphi + 1))}{\sin(k_1(\varphi + 1))}. \quad (15)$$

Из второго условия сопряжения частей концен-

тратора  $W_1(x = \gamma) = W_2(x = \gamma)$  получим

$$k^2 [(a - C\gamma) \cos(C\gamma) + (1 + aC\gamma) \sin(C\gamma)] \times$$

$$\times \frac{1}{\gamma} [k\alpha \cos(k(\gamma - \alpha)) + \sin(k(\gamma - \alpha))] +$$

$$+ C^2 \gamma (a \cos(C\gamma) + \sin(C\gamma)) \times$$

$$\times \frac{1}{\gamma^2} [k(\gamma - \alpha) \cos(k(\gamma - \alpha)) -$$

$$- (k^2 \alpha \gamma + 1) \sin(k(\gamma - \alpha))] = \quad (16)$$

$$= \frac{A_1}{D_0 A} \left( \sin(k_1 \gamma) + \frac{B_1}{A_1} \cos(k_1 \gamma) \right),$$

где  $k = \sqrt{k_1^2 + C^2}$ . Разделив левую и правую часть уравнения (14) на соответствующие части уравнения (16), с учетом выражения (15) получим иско-  
мое уравнение частот составного концентратора:

$$\frac{\sin(k_1 \gamma) + \frac{\cos k_1(\varphi + 1)}{\sin(k_1(\varphi + 1))} \cos(k_1 \gamma)}{\cos(k_1 \gamma) - \frac{\cos(k_1(\varphi + 1))}{\sin(k_1(\varphi + 1))} \sin(k_1 \gamma)} = \frac{H_1}{H_2}. \quad (17)$$

Здесь

$$H_1 = k^2 [(a - C\gamma) \cos(C\gamma) + (1 + aC\gamma) \sin(C\gamma)] \times$$

$$\times \frac{1}{\gamma} [k\alpha \cos(k(\gamma - \alpha)) + \sin(k(\gamma - \alpha))] +$$

$$+ C^2 \gamma (a \cos(C\gamma) + \sin(C\gamma)) \times$$

$$\times \frac{1}{\gamma^2} [k(\gamma - \alpha) \cos(k(\gamma - \alpha)) -$$

$$- (k^2 \alpha \gamma + 1) \sin(k(\gamma - \alpha))];$$

$$H_2 = k_1 [(a - C\gamma) \cos(C\gamma) + (1 + aC\gamma) \sin(C\gamma)] \times$$

$$\times \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \sqrt{k_1^2 + C^2}(\gamma - \alpha) \cos\left[\sqrt{k_1^2 + C^2}(\gamma - \alpha)\right] - \right.$$

$$\left. - [(k_1^2 + C^2)\alpha\gamma + 1] \sin\left[\sqrt{k_1^2 + C^2}(\gamma - \alpha)\right] \right\}.$$

Коэффициент усиления составного концентратора можно определить следующим образом:

$$M = \frac{W_2(x = \varphi + 1)}{W_1(x = \varphi)} = \frac{A_1}{D_0 A} \times$$

$$\frac{\sin(k_1(\varphi + 1)) + \frac{B_1}{A_1} \cos(k_1(\varphi + 1))}{(k_1^2 + C^2)N_1 + \frac{C^2}{\varphi} (a \cos(C\varphi) + \sin(C\varphi))N_2}, \quad (18)$$

где

$$N_1 = [(a - C\varphi) \cos(C\varphi) + (1 + aC\varphi) \sin(C\varphi)] \times \\ \times \frac{1}{\varphi} [k\alpha \cos(k(\varphi - \alpha)) + \sin(k(\varphi - \alpha))];$$

$$N_2 = k(\varphi - \alpha) \cos k(\varphi - \alpha) - \\ - ((k_1^2 + C^2)\alpha\varphi + 1) \sin k(\varphi - \alpha);$$

$$k = \sqrt{k_1^2 + C^2}.$$

Отношения коэффициентов  $A_1/(D_0A)$  и  $B_1/A_1$ , входящие в состав выражения (18), находим из соотношений (14) и (15) соответственно.

Таким образом, для составного концентратора, профиль которого определяется законом (11), поперечный диаметр призматической части составляет  $b = D_0 = 7$  мм, а присоединительный диаметр – 20.7 мм (что соответствует  $\delta = 2.95$ ), из выражений (17) и (18) находим собственное значение  $k_1 = 2.606$  и коэффициент усиления  $M = 22.019$ . Продольное сечение такого концентратора а также соответствующие распределения перемещений и напряжений в нем показаны на рис. 2.

Остальные результаты расчета для составного концентратора приведены в табл. 2. Следует отметить, что  $b = 5.602$  мм соответствует наименьшей продольной вариации поперечного диаметра  $D(x)$ , по которому строится правая часть рассчитываемой конструкции.

#### 4. СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод что по эффективности составной концентратор, который отвечает закону (11), дает значительно большее усиление продольных колебаний, чем концентратор, построенный по закону (4). Например, если необходимо обеспечить отношение присоединительных размеров  $\delta = 2.958$ , то концентратор “призма – катеноида” позволяет получить максимальное значение усиления, равное 4.647 (см. табл. 1). Для профиля, соответствующего закону (11), при прочих равных условиях (табл. 2), получаем коэффициент усиления 22.019, обеспечивающий выигрыш по эффективности в 4.73 раза. Из сравнения собственных волновых чисел для двух конструкций концентраторов, при условии что они работают на одной и той же рабочей частоте и изготовлены из одного и

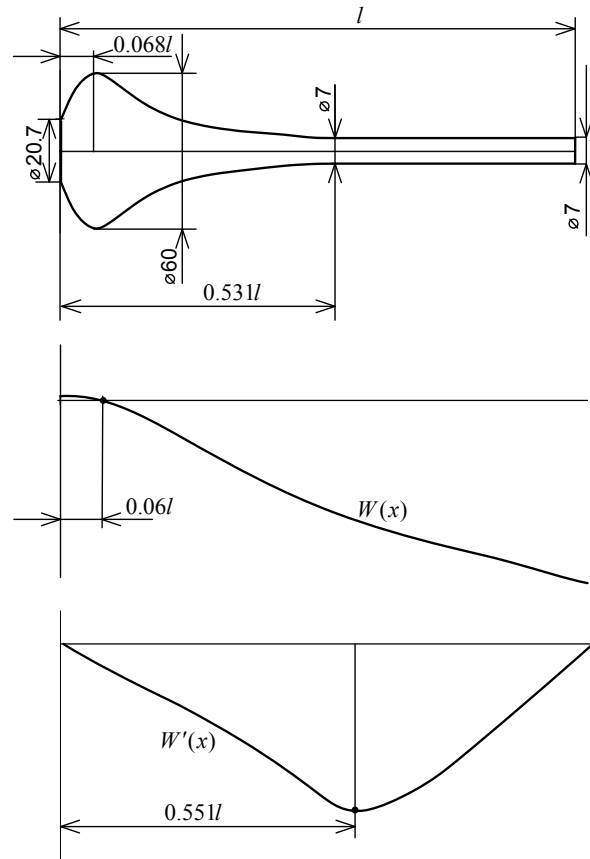


Рис. 2. Профиль составного концентратора вида (11) при  $M = 22.019$  и его динамические характеристики

Табл. 2. Расчетные параметры концентратора с профилем вида (11)

$b$ , мм	$\delta$	$\gamma$	$k_1$	$M$
5.602	3.695	0.777	2.9023	32.811
6	3.45	0.6516	2.794	29.592
6.3	3.285	0.6129	2.727	27.107
7	2.958	0.551	2.606	22.019

того же материала, вытекает что отношение длины составного концентратора (11) к длине концентратора “призма – катеноида” при  $\delta = 2.958$  будет  $l_{II}/l_I = k_{II}/k_I = 2.606/2.886 = 0.91$ . Таким образом, помимо большего усиления, концентратор (11) будет на 9 % короче, чем устройство с конфигурацией “призма – катеноида”.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Приведена схема расчета основных технических параметров составных концентраторов

акустической энергии. Получены зависимости для амплитуд перемещений и механических напряжений по длине составных концентраторов. Найдено, что для них узел колебаний не совпадает с пучностью напряжений (сечением, где действуют максимальные циклические напряжения). Это позволяет использовать узловые сечения рассмотренных концентраторов для их жесткого закрепления на неподвижных деталях аппаратуры.

2. Проанализирована эффективность усиления колебаний составных концентраторов “призма – катеноида” и “призма – специальная функция”. Показано, что при фиксировании отношения концевых размеров концентратора  $\delta=2.95$ , для второго типа устройства получается выигрыш в усилении колебаний, составляющий 4.73. Указанное преимущество позволяет увеличить общий ресурс использования новых конструкций концентраторов, соответствующих рис. 2, при

их работе в составе ультразвуковых технологических установок различного назначения.

3. Полученные результаты могут быть использованы при проведении дальнейших исследований в области прикладной теории расчета и конструирования акустических элементов различного назначения.
1. Писаревский М. М. Расчет переходных стержней для магнитострикционных вибраторов // Тр. науч.-тех. совещ. по изучению рассеяния энергии при колебаниях упругих тел.– К.: Изд-во АН УССР, 1958.– С. 54–89.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.– М.: Физматгиз, 1959.– 440 с.
3. Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1971.– 576 с.
4. Трапезон К. А. Метод симметрий при расчете и проектировании акустических концентраторов // Акуст. вісн.– 2006.– 9, № 4.– С. 50–55.
5. Абакумов В. Г., Трапезон К. А. О проектировании акустических концентраторов с учетом внутреннего рассеяния энергии // Акуст. вісн.– 2007.– 10, № 1.– С. 3–16.