

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ГІДРОПРУЖНОЇ НЕСТІЙКОСТІ КРОВОНОСНОЇ СУДИНИ НА ОСНОВІ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Д. В. ЛУКОМСЬКИЙ*, І. С. ГАНДЖА**

*Національний медичний університет ім. О. О. Богомольця, Київ

**Інститут фізики НАН України, Київ

Одержано 12.03.2010

Розглянуто задачу поширення хвиль у пружному порожнистому циліндрі, заповненого рідиною. Припускається, що рідина нестислива та нев'язка, а її рух потенціальний. Циліндр знаходиться в попередньо напруженому стані під дією внутрішнього (трансмурального) тиску, а його деформування описується рівняннями нелінійної теорії пружності. Розглянуто випадок осесиметричних деформацій при поширенні пульсових хвиль тиску в кровеносній судині. За допомогою розкладу пружного поля у степеневі ряди чисельно отримано закон дисперсії хвилі. У порівнянні з результатами теорії оболонок виявлено додаткову область нестійкості циліндричної форми судини, а також сильну залежність швидкості Моенса – Кортевега від трансмурального тиску.

Рассмотрена задача распространения волн в упругом полом цилиндре, заполненном жидкостью. Допускается, что жидкость несжимаемая и невязкая, а ее движение потенциально. Цилиндр находится в предварительно напряженном состоянии под действием внутреннего (трансмурального) давления, а его деформирование описывается уравнениями нелинейной теории упругости. Рассмотрен случай осесимметричных деформаций при распространении пульсовых волн давления в кровеносном сосуде. С помощью разложения упругого поля в степенные ряды численно получен закон дисперсии волны. По сравнению с результатами теории оболочек обнаружена дополнительная область неустойчивости цилиндрической формы сосуда, а также сильная зависимость скорости Моэнса – Кортевега от трансмурального давления.

The paper deals with considering of the problem on wave propagation in an elastic cylinder filled with a liquid. The liquid is treated as an incompressible and inviscid one performing the potential motion. The cylinder is prestressed by the internal (transmural) pressure, and the process of its deforming is described by the equations of a nonlinear theory of elasticity. The considered case corresponds to axisymmetric deformations at propagation of pulse pressure waves in a blood vessel. Wave dispersion law is obtained numerically by expanding of the elastic field in power series. In comparison with the theory of shells, the additional domain of instability is found for the cylindrical vessel's shape, as well as strong dependence of the Moens – Korteweg velocity from the transmural pressure.

ВСТУП

Особливості хвильових процесів у рідині, яка знаходиться всередині тонкого порожнистого пружно-деформівного циліндра, давно стало предметом інтенсивних досліджень. Така увага пояснюється, насамперед, фізіологічним аспектом задачі, пов'язаним з появою пульсової хвилі у кровеносних судинах. Зокрема, велику кількість робіт присвячено визначенню швидкостей поширення імпульсів у заповнених рідиною циліндричних трубках.

Аналіз специфіки поширення осесиметричних хвиль у трубці, заповненій в'язкою нестисливою рідиною, з урахуванням радіальної й поздовжньої інерції трубки, а також тертя об стінку дав у 1883 році І. С. Громека [1]. Ця робота у багатьох відношеннях є визначальною, адже в ній уперше було записано загальну систему рівнянь коливань оболонки (у тому числі неосесиметричних), а також встановлено умови рівності швидкостей оболонки й рідини на рухомій поверхні. Більш детальне дослідження було проведено для нев'язкої рідини,

що дозволило отримати дві швидкості поширення хвилі. Одна з них відома як швидкість Моенса – Кортевега, тобто фазова швидкість поширення пульсових хвиль тиску в оболонці з рідиною. Більш пізні дослідження в цьому напрямку виконані у працях [2–4].

Відомо, що течія крові у великих кровеносних судинах характеризується відносно слабким впливом реологічних властивостей рідини у зв'язку із зосередженням ефектів в'язкості лише в достатньо вузькій зоні поблизу стінки судини (при великих числах Уомерслі [5]), а також первалюючим впливом механічних характеристик судинної стінки. Проте у переважній більшості праць навіть для товстостінних судин застосовується теорія оболонок Кірхгофа – Лява [6, 7].

У цьому дослідженні рівняння динаміки поперечно напруженої судини, заповненої рідиною, розглянуто на основі теорії гіперпружного ізотропного тіла з урахуванням геометричної нелінійності. Це дозволяє знайти більш загальний закон дисперсії хвиль з урахуванням товщини стінки, а також проаналізувати вплив трансмурального тиску на

швидкість Моенса–Кортевега та появу нестійкості циліндричної форми судини.

1. ЗАГАЛЬНІ РІВНЯННЯ

З метою дослідження кровоносної судини з урахуванням геометричної нелінійності будемо виходити з рівнянь нелінійної теорії пружності у криволінійній системі координат. Коваріантні компоненти тензора деформацій тіла мають вигляд

$$\varepsilon_{ik} = u_{ik} + f_{ik}, \quad (1)$$

де $u_{ik} = (\nabla_i u_k + \nabla_k u_i)/2 = u_{ki}$ – лінійна складова по u_i (симетричний тензор малої деформації); $f_{ik} = \nabla_i u_l \nabla_k u^l / 2 = g^{lm} \nabla_i u_l \nabla_k u_m / 2$ – квадратична складова по u_i , яка визначає геометричну нелінійність деформації середовища. Також уведемо антисиметричний тензор дисторсії $A_{ij} = (\nabla_i u_j - \nabla_j u_i)/2 = -A_{ji}$. (усі індекси пробігають значення від 1 до 3). По індексах, які повторюються, проводиться підсумовування, якщо окремо не зазначено інше.

Оскільки щільність внутрішньої енергії середовища $\Phi(\nabla_i u_k)$ – скалярна величина, то вона залежить від компонент тензора деформації (1) не явно, а через інваріанти. В ізотропному гіперпружному середовищі існує тільки три незалежних інваріанти тензора деформації [8]:

$$\begin{aligned} K_1 &= \varepsilon_k^k = g^{km} \varepsilon_{km}, \\ K_2 &= \varepsilon_k^j \varepsilon_j^k = g^{jm} g^{kn} \varepsilon_{km} \varepsilon_{jn}, \\ K_3 &= \varepsilon_k^j \varepsilon_j^i \varepsilon_i^k = g^{jm} g^{in} g^{kr} \varepsilon_{km} \varepsilon_{jn} \varepsilon_{ir}. \end{aligned} \quad (2)$$

Запишемо рівняння Лагранжа у фізично лінійному по u_i наближенні, тобто щільність внутрішньої енергії має залежати від двох пружних констант. Для цього у Φ потрібно утримати доданки до другого ступеня по u_i включно:

$$F(K_1, K_2, K_3) = A_1 K_1^2 + A_2 K_2. \quad (3)$$

Відзначимо також, що $\lambda = 2A_1$ і $\mu = A_2$ – це параметри Ламе, які характеризують пружні властивості середовища й пов'язані з модулем Юнга E та коефіцієнтом Пуассона σ :

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (4)$$

Таким чином, при урахуванні співвідношень (1)–(3) рівняння Лагранжа набудуть вигляду

$$-\rho_w g^{ki} \ddot{u}_i + \nabla_i T^{ik} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

де через

$$\begin{aligned} T^{ik} &= \frac{\partial \Phi}{\partial (\nabla_i u_k)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial (\nabla_i u_k)} = \\ &= \sigma^{ik} + \sigma^{i\alpha} \nabla_\alpha u^k \end{aligned} \quad (6)$$

позначені компоненти несиметричного тензора напружень [9], виражені через тензор напруг σ^{ik} .

Граничні умови на недеформованій поверхні S гіперпружного тіла [9] мають вигляд

$$T^{ik} n_i = p^k, \quad (7)$$

де p^k – контраваріантні компоненти вектора поверхневого навантаження; n_i – компоненти одиничного вектора нормалі до незбуреної поверхні S .

Скориставшись виразами (1) і (2), розкладемо інваріанти K_1 , K_2 на лінійні та квадратичні по u_i доданки, нехтуючи членами вищих порядків:

$$K_1 = g^{lm} u_{lm} + g^{lm} f_{lm} = K_{11} + K_{12}, \quad (8)$$

$$K_2 = g^{lp} g^{mq} u_{lq} u_{mp} = K_{22}.$$

Надалі розглядатимемо ортогональну криволінійну систему координат, в якій метричний тензор g^{ik} має лише діагональні ненульові компоненти: $g^{ik} = \sqrt{g^{ii}} \sqrt{g^{kk}} \delta_{ik}$ без (суми по i та k), і перейдемо від коваріантних та контраваріантних компонент до фізичних складових вектора деформацій \vec{u} й тензорів u_{ik} , A_{ik} , T^{ik} та σ^{ik} . Тоді, утримуючи у компонентах u_i лінійні та квадратичні доданки, отримаємо в загальному вигляді несиметричний тензор напружень, розкладений на симетричну й антисиметричну частини (S і A відповідно):

$$T_{ik} = T_{ik}^{(1S)} + T_{ik}^{(2S)} + T_{ik}^{(2A)}, \quad (9)$$

де

$$T_{ik}^{(1S)} = 2A_1 K_{11} \delta_{ik} + 2A_2 u_{ik},$$

$$\begin{aligned} T_{ik}^{(2S)} &= (A_1 K_{22} - A_1 A_{lm} A_{ml}) \delta_{ik} + \\ &+ 2A_1 K_{11} u_{ik} + 3A_2 u_{im} u_{mk} - A_2 A_{im} A_{mk}, \end{aligned}$$

$$T_{ik}^{(2A)} = 2A_1 K_{11} A_{ik} + A_2 (u_{im} A_{mk} + A_{im} u_{mk}).$$

Отже, загальна система диференціальних рівнянь руху фізично малої частинки гіперпружного ізотропного середовища в довільних ортогональних лагранжевих координатах для фізичних складових вектора зміщення \vec{u} й несиметричного тензора напружень T^{ik} при нехтуванні масовими силами у квадратичному наближенні з урахуванням

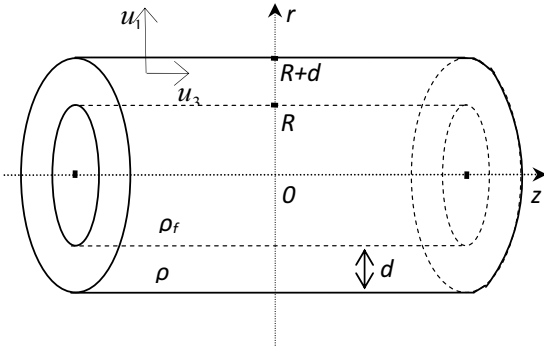


Рис. 1. Схема гіперпружного твердого тіла з рідиною в початковий момент часу

геометричної нелінійності має вигляд

$$-\rho_w \ddot{u}_k + \sqrt{g^{ii}} \frac{\partial \Gamma^{ik}}{\partial x^i} + \sqrt{g^{ll}} \Gamma_{li}^i T^{lk} + \frac{\sqrt{g^{ii}} \sqrt{g^{ll}}}{\sqrt{g^{kk}}} \Gamma_{li}^k T^{il} = 0, \quad (10)$$

$$k = 1, 2, 3,$$

де по k підсумовування не ведеться. Тут ρ_w – густина середовища; g^{ii} – компоненти метричного тензора; Γ_{li}^k – символи Кристоффеля.

2. ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА У ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

Розглянемо нескінченну гіперпружну ізотропну трубку з матеріалу густиною ρ_w з не закріпленими кінцями, повністю зсередини заповнену рідиною з густиною ρ_f . Нехай у початковий момент часу трубка має циліндричну форму з внутрішнім радіусом R і товщиною $d < R$ (рис. 1), причому товщина не є нескінченно малою.

Необхідність урахування нелінійної компоненти тензора деформації (1) пов'язана з циліндричністю геометрії тіла, оскільки для неї навіть при невеликих розтягах і стисненнях всередині самого тіла вектор деформації може бути достатньо великим [10].

Спростимо задачу, припустивши її осесиметричність, коли положення фізично малих частинок трубки не залежить від ϕ ($\partial u_k / \partial \phi = 0$), а їхня координата ϕ не змінюється з часом ($u_2 = 0$). Тоді вектор деформації запишеться як $\vec{u} = \{u_1(r, z, t), 0, u_3(r, z, t)\}$.

Ненульові фізичні складові u_{ik} й A_{ik} будуть та-

кими [10]:

$$u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad u_{22} = \frac{u_1}{r}, \quad u_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z},$$

$$u_{13} = u_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial r} \right), \quad (11)$$

$$A_{13} = -A_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \right).$$

Система рівнянь (10) для осесиметричної задачі набуде вигляду

$$-\rho_w \ddot{u}_1 + \frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{\partial T_{31}}{\partial z} + \frac{T_{11} - T_{22}}{r} = 0,$$

$$-\rho_w \ddot{u}_3 + \frac{\partial T_{13}}{\partial r} + \frac{\partial T_{33}}{\partial z} + \frac{T_{13}}{r} = 0, \quad (12)$$

де T_{ik} задано виразами (9).

У розглянутому випадку залишаться чотири динамічних граничних умови (7):

$$T_{11} = T_{13} = 0 \quad \text{при} \quad r = R + d,$$

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= -p\delta_{11} \\ T_{13} &= -p\delta_{13} \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad r = R. \quad (13)$$

Наголосимо, що для нев'язкої рідини тангенціальна компонента тиску відсутня (δ_{ik} – символ Кронекера).

Припустимо, що рідина ідеальна, а течія відсутня. Нехай трубка знаходиться під впливом постійного в часі трансмурального тиску p_{tr} , який визначається як різниця між тиском на стінку з боку рідини всередині трубки й зовнішнім тиском на стінку. Тоді для статичного вектора деформації $\vec{u}_{ст} = \{\bar{u}_1(r), 0, 0\}$ рівняння (12) й граничні умови (13) матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}_{11}}{\partial r} + \frac{\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}}{r} &= 0 \\ \bar{T}_{11} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad r = R + d, \quad (14)$$

$$\bar{T}_{11} = -p_{tr} \quad \text{при} \quad r = R.$$

Інші рівняння й граничні умови виконані тотожно.

Розв'язок цієї задачі статички має вигляд [10]:

$$\bar{u}_1(r) = ar + \frac{b}{r}, \quad (15)$$

де a і b можна знайти підстановкою (15) в граничні

умови:

$$a = \frac{p_{tr}R^2}{(R+d)^2 - R^2} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad (16)$$

$$b = \frac{p_{tr}R^2(R+d)^2}{(R+d)^2 - R^2} \frac{1+\sigma}{E}.$$

Запишемо відмінні від нуля компоненти тензора статичної деформації (11):

$$\bar{u}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r} = a - \frac{b}{r^2}, \quad (17)$$

$$\bar{u}_{22} = \frac{\bar{u}_1}{r} = a + \frac{b}{r^2}.$$

3. ПРОХОДЖЕННЯ ПУЛЬСОВИХ ХВИЛЬ У ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНІЙ АРТЕРІЇ

Серце в процесі своєї роботи періодично створює в артерії, попередньо розтягнутій статичним трансмуральним тиском p_{tr} , додатковий тиск крові. Для прикладу на рис. 2 зображено характерну для собаки часову форму залежності тиску крові у корені аорти [5]. Така функція тиску $p(t)$ може бути розкладена в ряд Фур'є

$$p(t) = p_0 + \sum_{n=1}^N p_n \sin(n\omega t + \theta'_n)$$

на статичну складову $p_0 = p_{tr}$ й гармоніки з циклічними частотами, кратними $\omega = 2\pi\nu$, де ν – частота серцевих скорочень. Для людини у стані спокою $\nu \approx 1.2$ Гц, для собаки $\nu \approx 2$ Гц. Характерні величини амплітуд гармонік p_n наведені на рис. 3, з якого видно, що домінує значення статичного трансмурального тиску (близько 100 мм. рт. ст.), а суттєвий вклад у форму $p(t)$ вносять лише кілька перших гармонік [11].

Якщо переміститися вниз за течією крові й проаналізувати криві тиску, зареєстровані в декількох точках по осі z аорти (0, 4, 8, 12 і 16 см), то видно, що їхні форми подібні з точністю до часу запізнення тиску, записаного нижче за потоком (рис. 4). Отже, пульсове коливання тиску, викликане скороченнями серцевого шлуночка, поширюється вздовж аорти у вигляді хвилі, яку називають пульсовою. Виходячи з цього, тиск можна розкласти в ряд Фур'є в точці аорти з координатою z :

$$p(z, t) = p_0 + \sum_{n=1}^N p'_n e^{i(k_n z - n\omega t)} + \text{к.с.}, \quad (18)$$

де k_n і $\theta_n = n\omega t$ – відповідно хвильове число та зсув по фазі n -ої гармоніки; N – кількість утримуваних

Тиск, мм. рт. ст.

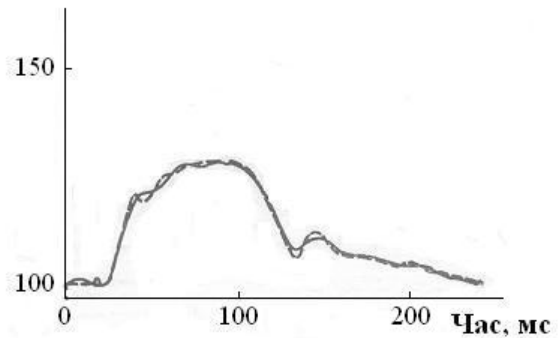


Рис. 2. Залежність тиску крові від часу в корені аорти собаки (усереднені дані по вісьмох собаках): суцільна – експериментальні дані, штрихова – відновлений графік за десятима першими гармоніками

Тиск, см. вод. ст.

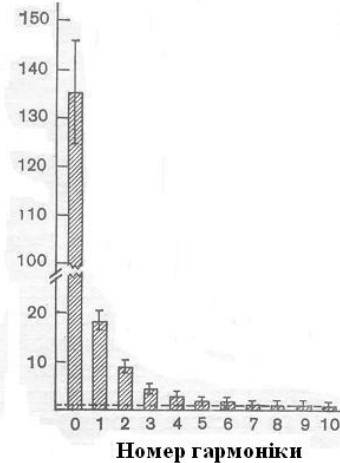


Рис. 3. Амплітуди перших десяти гармонік розкладів сигналів тиску в корені аорти на гармонічні складові

Тиск, мм. рт. ст.

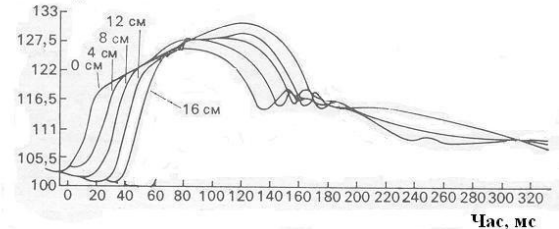


Рис. 4. Криві артеріального тиску, зареєстровані одночасно в різних ділянках аорти собаки

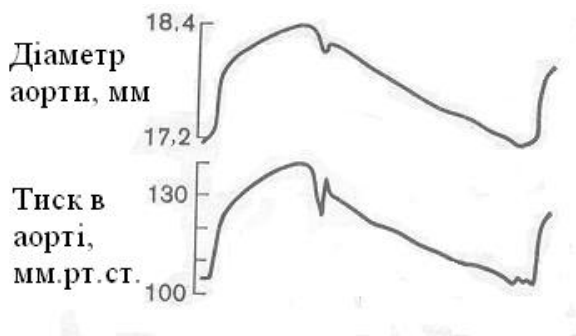


Рис. 5. Зареєстровані одночасно зміни діаметра аорти собаки й тиску на протязі одного серцевого циклу

гармонік; к.с. означає комплексно-спряжений вираз (вибір одного з комплексно-спряжених доданків визначається вибраним напрямком поширення хвилі).

При розгляді пульсової хвилі стисливістю рідини можна знехтувати як малою більш високого порядку [12]. У циліндричній системі координат поле швидкостей $\vec{v} = \nabla \phi_f$ потенціальної осесиметричної течії нестисливої рідини задовольняє рівняння Лапласа $\Delta \phi_f = 0$. Тиск на стінку судини з боку рідини в лінійному наближенні визначається інтегралом Бернуллі [13]:

$$p = p_{tr} - \rho_f \frac{\partial \phi_f}{\partial t}.$$

Порівнюючи цей вираз з рівнянням (18), приходимо до висновку, що потенціал ϕ_f також може бути представлений у вигляді розкладу в ряд Фур'є з тими самими значеннями ω та k_n , що і для $p(z, t)$:

$$\phi_f(z, t) = \sum_{n=1}^N \phi_n(r) e^{i(k_n z - n\omega t)} + \text{к.с.} \quad (19)$$

В області течії $0 < r < R$ відомий точний і регулярний в $r = 0$ розв'язок рівняння Лапласа для такого потенціалу [1]:

$$\phi_f(z, t) = \sum_{n=1}^N D_n I_0(k_n r) e^{i(k_n z - n\omega t)} + \text{к.с.}, \quad (20)$$

де D_n – довільні константи, $I_0(k_n r)$ – модифіковані функції Бесселя нульового порядку.

При проходженні пульсової хвилі тиску в поперечно напруженій артерії з трансмуральним тиском p_{tr} у результаті контакту рідини й пружної стінки виникає збурення компонент вектора деформації ($\tilde{u}_1(r, z, t)$ і $\tilde{u}_3(r, z, t)$), тобто він набуває вигляду

$$\vec{u}(r, z, t) = \{\tilde{u}_1(r) + \tilde{u}_1(r, z, t), 0, \tilde{u}_3(r, z, t)\}. \quad (21)$$

З рис. 5 видно, що рухи стінки артерії відбуваються практично синфазно зі змінами тиску, тобто стінка поводить себе як чисто пружний матеріал, не проявляючи в'язкопружних властивостей. Це дозволяє стверджувати, що компоненти вектора деформації також можуть бути представлені у вигляді розкладу в ряд Фур'є з тими самими значеннями ω і k_n :

$$u_1(r, z, t) = \bar{u}_1(r) + \sum_{n=1}^N (\tilde{u}_1)_n(r) e^{i(k_n z - n\omega t)} + \text{к.с.}, \quad (22)$$

$$u_3(r, z, t) = \sum_{n=1}^N (\tilde{u}_3)_n(r) e^{i(k_n z - n\omega t)} + \text{к.с.}$$

4. ЛІНЕАРИЗАЦІЯ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ СТІНКИ ГІПЕРПРУЖНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА

Враховуючи вигляд вектора деформації (21), компоненти тензорів u_{ij} , A_{ij} й інваріант K_{ii} можна розкласти на статичні й збурені складові:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \bar{u}_{ij} + \tilde{u}_{ij}, \\ A_{ij} &= \bar{A}_{ij} + \tilde{A}_{ij}, \\ K_{ii} &= \bar{K}_{ii} + \tilde{K}_{ij}. \end{aligned} \quad (23)$$

Вважаючи $\bar{u}_1(r, z, t)$, $\tilde{u}_1(r, z, t)$, $\tilde{u}_3(r, z, t)$ малими, після підстановки співвідношень (23) у квадратичні складові виразів (9) знехтуємо доданками типу \tilde{u}_{ij}^2 , \tilde{u}_{ij}^2 , \tilde{A}_{ij}^2 (як другого порядку малості), залишаючи перехресні доданки типу $\bar{u}_{ij}\tilde{u}_{kl}$, $\bar{u}_{ij}\tilde{A}_{kl}$. Наприклад, у першому доданку для $\tilde{T}_{ik}^{(2S)}$ нелінійний K_{22} перетвориться таким чином:

$$\begin{aligned} K_{22} &= \sum_{j,k} u_{kj} u_{jk} = u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2 + 2u_{13}^2 = \\ &= \bar{u}_{11}^2 + 2\bar{u}_{11}\tilde{u}_{11} + \tilde{u}_{11}^2 + \bar{u}_{22}^2 + 2\bar{u}_{22}\tilde{u}_{22} + \tilde{u}_{22}^2 + \\ &\quad + \bar{u}_{33}^2 + 2\bar{u}_{33}\tilde{u}_{33} + \tilde{u}_{33}^2 + 2\tilde{u}_{13}^2. \end{aligned}$$

Відкинувши доданки другого порядку малості та врахувавши формулу (17), отримаємо лінеаризовану частину K_{22} :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{22} &= 2(\bar{u}_{11}\tilde{u}_{11} + \bar{u}_{22}\tilde{u}_{22} + \bar{u}_{33}\tilde{u}_{33}) = \\ &= 2\bar{u}_{11}\tilde{u}_{11} + 2\bar{u}_{22}\tilde{u}_{22} = \\ &= 2a\tilde{u}_{11} + 2a\tilde{u}_{22} - \frac{2b}{r^2}\tilde{u}_{11} + \frac{2b}{r^2}\tilde{u}_{22}. \end{aligned} \quad (24)$$

У результаті залишаються лінеаризовані по малих збуреннях квадратичні складові $\tilde{T}_{ik}^{(2S)}$ і $\tilde{T}_{ik}^{(2A)}$,

які містять перехресні доданки. Враховуючи представлення (23), лінійну складову першого рівняння (9) також можна розкласти на статичну й збурену частини:

$$\begin{aligned} T_{ik}^{(1S)} &= \bar{T}_{ik}^{(1S)} + \tilde{T}_{ik}^{(1S)} = \\ &= 2A_1 \bar{K}_{11} \delta_{ik} + 2A_2 \bar{u}_{ik} + 2A_1 \tilde{K}_{11} \delta_{ik} + 2A_2 \tilde{u}_{ik}. \end{aligned}$$

Тоді, виходячи зі співвідношення (9), загальний вигляд складових несиметричного тензора деформацій стане таким:

$$T_{ik} = \bar{T}_{ik}^{(1S)} + \tilde{T}_{ik}^{(1S)} + \tilde{T}_{ik}^{(2S)} + \tilde{T}_{ik}^{(2A)} = \bar{T}_{ik} + \tilde{T}_{ik}. \quad (25)$$

При підстановці виразу (25) у рівняння (12) та врахуванні рівнянь статички (14) приходимо до загальної лінеаризованої системи динамічних рівнянь для їх знаходження, отриманої з квадратичного наближення по збуреннях вектора деформації $\tilde{u}_1(r, z, t)$ і $\tilde{u}_3(r, z, t)$:

$$\begin{aligned} -\rho_w \ddot{u}_1 + \frac{\partial \tilde{T}_{11}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{T}_{31}}{\partial z} + \frac{\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22}}{r} &= 0, \\ -\rho_w \ddot{u}_3 + \frac{\partial \tilde{T}_{13}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{T}_{33}}{\partial z} + \frac{\tilde{T}_{13}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ik} &= \tilde{T}_{ik}^{(0)} + \tilde{T}_{ik}^{(1)} \frac{1}{r^2}; \\ T_{kk}^{(0)} &= \sum_{l=1}^3 \beta_{kl}^{(0)} \tilde{u}_l; \\ T_{kk}^{(1)} &= \sum_{l=1}^3 \beta_{kl}^{(1)} \tilde{u}_l; \\ \begin{pmatrix} \tilde{T}_{13}^{(0)} \\ \tilde{T}_{31}^{(0)} \end{pmatrix} &= \gamma_1^{(0)} \tilde{u}_{13} \pm \gamma_2^{(0)} \tilde{A}_{13}; \\ \begin{pmatrix} \tilde{T}_{13}^{(1)} \\ \tilde{T}_{31}^{(1)} \end{pmatrix} &= \gamma_1^{(1)} \tilde{u}_{13} \pm \gamma_2^{(1)} \tilde{A}_{13}; \\ k &= 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$$\tilde{u}_{11} = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial r}; \quad \tilde{u}_{22} = \frac{\tilde{u}_1}{r}; \quad \tilde{u}_{33} = \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial z};$$

$$\tilde{u}_{13} = \tilde{u}_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial r} \right);$$

$$\tilde{A}_{13} = -\tilde{A}_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} \right),$$

а коефіцієнти β та γ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \beta_{11}^{(0)} = \beta_{22}^{(0)} &= \lambda + 2\mu + 2(2\lambda + 3\mu)a; \\ \beta_{12}^{(0)} = \beta_{21}^{(0)} &= \lambda + 2\lambda a; \\ \beta_{13}^{(0)} = \beta_{31}^{(0)} = \beta_{23}^{(0)} = \beta_{32}^{(0)} &= \lambda + \lambda a; \\ \beta_{33}^{(0)} &= \lambda + 2\mu + 2\lambda a; \\ \beta_{11}^{(1)} = -\beta_{22}^{(1)} &= -2(\lambda + 3\mu)b; \\ \beta_{12}^{(1)} = \beta_{21}^{(1)} = \beta_{33}^{(1)} &= 0; \\ \beta_{13}^{(1)} = \beta_{31}^{(1)} = -\beta_{23}^{(1)} = -\beta_{32}^{(1)} &= -\lambda b; \\ \gamma_1^{(0)} = 2\mu + (2\lambda + 3\mu)a; \quad \gamma_2^{(0)} &= (2\lambda + \mu)a; \\ \gamma_1^{(1)} = -3\mu b; \quad \gamma_2^{(1)} &= -\mu b. \end{aligned} \quad (27)$$

В останніх співвідношеннях a і b – статичні константи (16), пов'язані з попередньо напруженим станом судини; λ і μ – параметри Ламе. Якщо трансмуральний тиск відсутній ($p_{tr} = 0$), то $a = b = 0$ і задача перетворюється на геометрично та фізично лінійну по збуреннях вектора деформації, оскільки всі лінеаризовані доданки містять множники a або b .

До динамічних граничних умов (13) має бути додана кінематична умова непроникнення рідини через матеріал трубки на внутрішній поверхні:

$$\frac{\partial \phi_f}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t},$$

що дозволяє записати чотири граничні умови замість п'яти [14]:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{11}(R) + m_0 \rho_w R^2 \omega^2 \tilde{u}_1(R) &= 0, \\ \tilde{T}_{13}(R) &= 0, \\ \tilde{T}_{11}(R + d) &= 0, \\ \tilde{T}_{13}(R + d) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Тут m_0 – приєднана безрозмірна маса:

$$m_0 = \frac{\rho_f}{\rho_w} \frac{I_0(kR)}{kR I_1(kR)}.$$

5. РОЗВ'ЯЗОК МЕТОДОМ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Розкладемо вектор зміщення в ряд за степенями змінної r в околі внутрішньої стінки:

$$\tilde{u}_k(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{u}_k)_n(z, t) (r - R)^n, \quad (29)$$

$$k = 1, 3, \quad R < r < R + d.$$

Підставляючи аналогічні розклади для тензорів \tilde{u}_{ik} , \tilde{A}_{ik} та \tilde{T}_{ik} (див. вирази (9) і (11)) в систему рівнянь (26), отримуємо рекурентні співвідношення для послідовного обчислення коефіцієнтів $(\tilde{u}_k)_n(z, t)$ розкладу (29) для $n=2, 3, \dots$. Подібний метод вже застосовувався у [14], але для лінійної задачі.

Для зручності чисельних розрахунків введемо безрозмірювання:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)\rho_w}} \omega_B, \\ p_{tr} &= \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} p_{trB}, \\ k &= \frac{1}{R} k_B, \quad r = R(1 + r_B). \end{aligned} \quad (30)$$

Усі величини з розмірністю довжини нормовано на внутрішній радіус трубки R . При цьому параметри в чисельних розрахунках будуть ρ_f/ρ_w , σ , d/R і N – кількість членів розкладу (29). Значення ж E , R , ρ_w виступають в якості автомобільних змінних.

У випадку проходження пульсової хвилі тиску компоненти вектора деформації можна розкласти у ряд Фур'є (22). Оскільки доданки цих розкладів лінійно незалежні, то для визначення закону дисперсії $\omega = \omega(k)$ достатньо врахувати лише першу гармоніку $\sim e^{i(kz - \omega t)}$, а всі наступні гармоніки, очевидно, дадуть ідентичну форму кривої $\omega = \omega(k)$.

Підстановка розкладів (29) та врахування залежності \vec{u} від z та t у вигляді $e^{i(kz - \omega t)}$ перетворює диференціальні рівняння (26) відносно змінних r , z , t на алгебраїчні співвідношення для послідовного знаходження коефіцієнтів $(\tilde{u}_1)_{n+2}$ і $(\tilde{u}_3)_{n+2}$ для $n=0, 1, 2, \dots$. Усі подальші коефіцієнти розкладу можна виразити через чотири перших $(\tilde{u}_1)_0$,

$(\tilde{u}_1)_1$, $(\tilde{u}_3)_0$, $(\tilde{u}_4)_0$, які можна знайти з чотирьох граничних умов (28) шляхом підстановки у них розкладів \tilde{T}_{11} , \tilde{T}_{13} і \tilde{u}_1 по r .

Отримана система чотирьох лінійних однорідних рівнянь має нетривіальний розв'язок за умови рівності детермінанта нулю. Задаючи конкретні значення безрозмірних параметрів, з цієї системи рівнянь чисельними методами можна знайти закон дисперсії $\omega_B(k_B)$ при проходженні пульсової хвилі по еластичній судині зі скінченною товщиною стінки.

6. РЕЗУЛЬТАТИ

Відзначимо, що лінеаризовані квадратичні складові $\tilde{T}_{ik}^{(2S)}$ й $\tilde{T}_{ik}^{(2A)}$ є лінійними комбінаціями статичних констант a і b (16), тобто прямо пропорційні трансмуральному тиску p_{tr} . Це означає, що за відсутності попередньо напруженого стану ($p_{tr}=0$) лінеаризована по $\tilde{u}_1(r, z, t)$, $\tilde{u}_3(r, z, t)$ задача перетворюється на лінійну (тобто з лінійним тензором деформації), точний закон дисперсії для якої відомий [15].

З рис. 6 видно, що зі зростанням кількості членів розкладу (29) закон дисперсії наближається до закону, отриманого з точного розв'язку (позначений на графіку пунктиром) [15]. Тут і надалі числові значення параметрів обираємо у відповідності до реальних показників висхідної аорти собаки [5]: $\sigma=0.47$, $d/R=0.1$, $\rho_f/\rho_w=1$ – для безрозмірних обчислень; $R=0.7$ см, $\rho_w=10^3$ кг/м³, $E=5 \cdot 10^5$ Н/м² – автомобільні змінні.

Якщо вважати, що вагомий вклад у пульсову хвилю при розкладі у ряд Фур'є дають гармоніки до десятої включно [5], циклічна частота ω при значеннях розрахункових параметрів не перевищує штрих-пунктирну лінію на графіку (навіть при частоті серцевих скорочень 3 удари за секунду). Отже, пульсова хвиля поширюється в області довгих хвиль зі швидкістю, близькою до швидкості Моенса – Кортевега $v_m = \sqrt{Ed/(2\rho_f R)}$. При цьому поправки на скінченну товщину стінки складають близько 6 % [14].

Врахуємо тепер вплив попередньо напруженого стану судини на проходження пульсової хвилі, увівши постійний в часі трансмуральний тиск p_{tr} . На рис. 7 проілюстровані безрозмірні закони дисперсії при різних його значеннях. Видно, що при безрозмірному $p_{tr}=0.005, 0.0051, 0.0052$ швидкість Моенса – Кортевега (тангенс кута нахилу до осі X поблизу нуля) починає різко падати.

На рис. 8 показано залежність швидкості Моенса – Кортевега від трансмурального тиску в без-

розмірних величинах. Тут простежується таке її спадання аж до повного зникнення. В інтервалі трансмуральних тисків від 0.0053 до 0.0075 не існує v_m , тобто у довгохвильовій області пульсова хвиля не поширюється взагалі. Починаючи зі значення $p_{tr}=0.0076$ швидкість Моенса – Кортевега зазнає стрибкоподібного зростання. Отже, в області високих тисків швидкість Моенса – Кортевега сильно залежить від трансмурального тиску, що прямим чином впливає на функціонування кровеносної системи живих організмів.

У праці [16] розглянуто задачу поширення хвиль у заповненій стисливою рідиною пружній трубці за відсутності трансмурального тиску ($p_{tr}=0$), причому рух частинок трубки вважався одновимірним. Показано, що може мати місце відсікання хвиль у деякій скінченній області частот у зв'язку з появою уявного хвильового числа k , тобто має місце стрибок дисперсійної кривої. Це залежить від співвідношень швидкостей і довжин хвиль порожньої й заповненої рідиною трубки. У той же час, у випадку нестисливої рідини має місце відсікання хвиль при перевищенні власної частоти порожньої трубки. Але частота перистальтичної хвилі набагато менша від згаданої частоти, що не створює перешкод для її поширення.

Проведемо дослідження на стійкість за Ляпуновим [17]. При значеннях трансмуральних тисків, які відповідають першій гілці кривої на рис. 8, маємо $\text{Im } \omega = 0$ – стійкий режим проходження хвилі. Проте при перевищенні певного порогу трансмурального тиску кожному значенню p_{tr} відповідають такі проміжки k , для яких виконується умова $\text{Im } \omega > 0$, тобто виникає нестійкість форми судини (прогнозується необмежене зростання вектора деформації $\sim e^{i(kz-\omega t)}$) при проходженні пульсової хвилі.

Залежність $\text{Re } \omega(k)$ при перевищенні порогового значення $p_{tr}=0.0053$ наведено на рис. 9. Звідси робимо висновок, що в інтервалі трансмуральних тисків від 0.0053 до 0.0075 пульсові хвилі перестають бути довгими, стаючи все коротшими зі зростанням p_{tr} .

Залежність $\text{Im } \omega(k)$ для різних значень трансмурального тиску з зазначеного інтервалу подано на рис. 10. Очевидно, що тут кожному значенню p_{tr} відповідають таке хвильове число k_{cr} і довжина хвилі $\lambda_{cr} = 2\pi/k_{cr}$, при яких $\text{Im } \omega$ буде максимальним, тобто матиме місце найбільший інкремент експоненційного зростання розмірів судини (нестійкості форми) [6]. Отже, при певному значенні трансмурального тиску вище порогового нестійкість форми найшвидше зростатиме саме на довжині хвилі λ_{cr} .

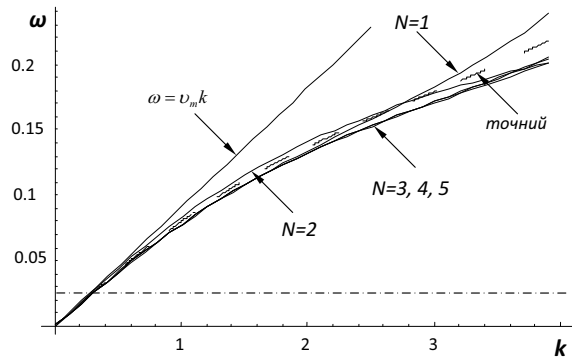


Рис. 6. Закон дисперсії, отриманий методом розкладу в степеневі ряди, у порівнянні з точним розв'язком

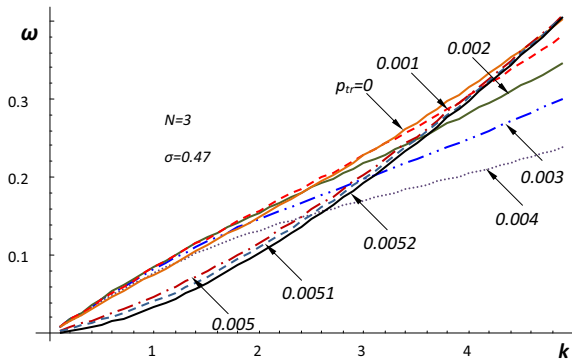


Рис. 7. Закон дисперсії при проходженні пульсової хвилі за різних значень трансмуральних тисків до порогу нестійкості

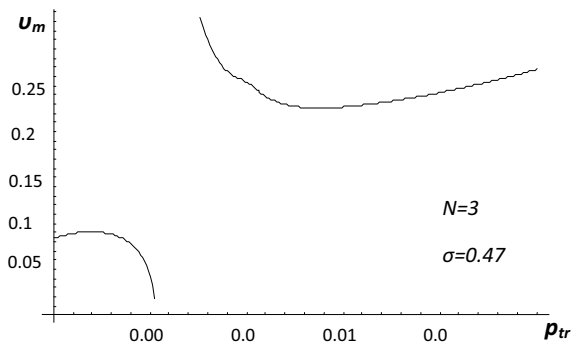


Рис. 8. Залежність швидкості поширення пульсової хвилі від трансмурального тиску

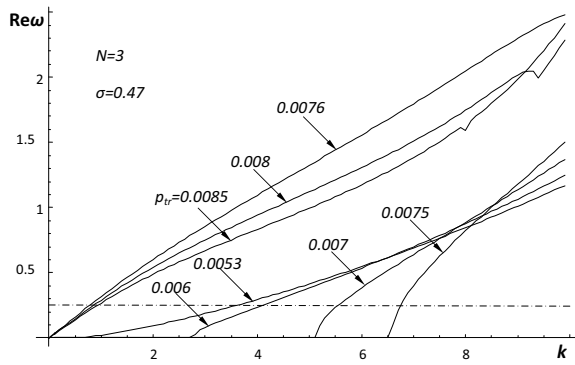


Рис. 9. Закон дисперсії для $\text{Re } \omega$ при перевищенні порогу трансмурального тиску. Нижче штрих-пунктирної лінії знаходяться циклічні частоти, які спостерігаються в реальних судинах людини й собаки

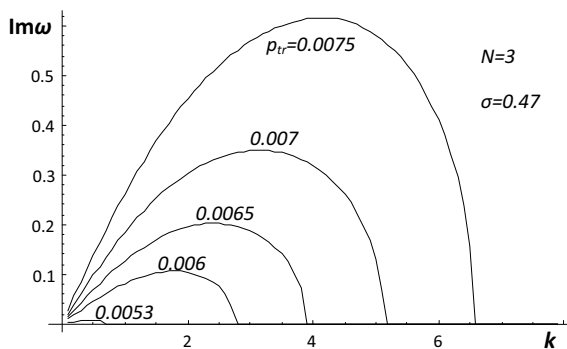


Рис. 10. Залежність $\text{Im } \omega$ від k при перевищенні порогу трансмурального тиску

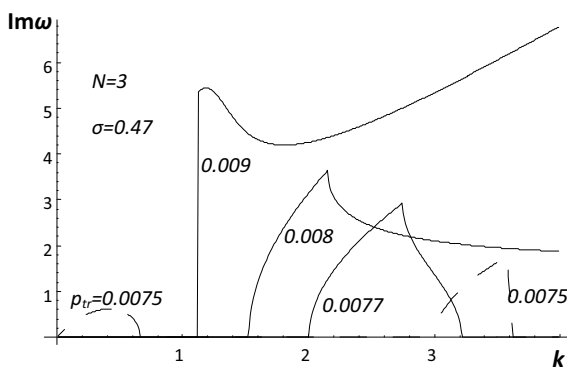


Рис. 11. Залежність $\text{Im } \omega$ від k у другій області нестійкості форми з появою від'ємної групової швидкості

Явище відхилення форми судин від циліндричної при перевищенні порогового трансмурального тиску спостерігалось експериментально і було пояснено теоретично, виходячи з припущення усереднення по поперечному перерізу судини [11], а також більш точно на базі геометрично-нелінійної теорії оболонок з використанням гіпотези Кірхгофа–Лява [6]. Викладена в нашому дослідженні більш загальна геометрично-нелінійна теорія судин зі скінченною товщиною стінки також підтверджує експериментальні спостереження.

При зростанні p_{tr} вище 0.0075 перша довгохвильова область нестійкості переходить у другу – короткохвильову, що демонструють графіки залежності $\text{Im } \omega(k)$ на рис. 11. Штриховою лінією позначено роздвоєння області нестійкості при $p_{tr}=0.0075$. Для другої області характерне швидке зникнення (вже при $p_{tr}=0.0082$) максимального інкремента наростання $\text{Im } \omega$. Обчислення показують, що при більшій кількості N членів розкладу (29) критичне значення k_{cr} зникає ще швидше.

Якщо розглянути $\text{Re } \omega$ з другої області нестійкості ($p_{tr} > 0.0075$) при різних значеннях трансмурального тиску (рис. 12), стає очевидним, що тут разом з довгими пульсовими хвилями поширюються коротші хвилі з від'ємною груповою швидкістю $d\omega/dk$, описані в [6, 18] на основі теорії оболонок та гіпотези Кірхгофа–Лява. Штрих-пунктирна лінія проведена на тому ж рівні, що і для рис. 9.

Таким чином, можна зробити висновок, що нелінійна теорія оболонок в [6] описувала саме другу область нестійкості. Справді, як свідчать розрахунки, при граничному переході до теорії оболонок $d/R \rightarrow 0$ перша область нестійкості (рис. 10) звужується та зникає. Це означає, що більш загальна нелінійна теорія нетонкої стінки виявляє якісно нову, довгохвильову область нестійкості форми судини.

Оскільки модуль Юнга E є автомодельною змінною, то зі співвідношення (30) випливає, що порогові значення p_{tr} зміняться прямо пропорційно до зміни E (наприклад, у жорсткішій судині нестійкість форми виникатиме при більших значеннях трансмуральних тисків).

Чисельний аналіз порогових значень p_{tr} за більшої кількості N членів розкладу (29) вказує на лише незначну їх зміну, що свідчить про хорошу збіжність ряду (29) при $d/R=0.1$.

На рис. 13 представлена залежність безрозмірного критичного хвильового числа k_{cr} від трансмурального тиску, поданого для зручності в мм. рт. ст. З графіка видно стрімке зростання k_{cr} при переході у другу область нестійкості (з від'ємною

груповою швидкістю). Враховуючи безрозмірвання (30), відповідну залежність можна побудувати, відклавши по осі ординат відношення розмірної критичної довжини хвилі λ_{cr} до радіуса судини R (рис. 14). З останнього графіка видно, що у досить широкій області трансмуральних тисків (перша область нестійкості), притаманних живим організмам, довжина нестійкості форми судини λ_{cr} дорівнює декільком радіусам. Перехід у другу область нестійкості (з від'ємною груповою швидкістю) супроводжується різким зменшенням величини λ_{cr} .

Слід відзначити, що рис. 13 і 14 побудовані при кількості членів розкладу (29) $N=5$. Проте, як уже було сказано вище, метод демонструє хорошу збіжність і ці результати майже не відрізняються від отриманих при $N=3$.

ВИСНОВКИ

1. Обчислено дисперсійні криві при проходженні пульсової хвилі тиску в попередньо напруженій еластичній судині зі скінченною товщиною стінки з урахуванням геометричної нелінійності. Досліджено вплив величини трансмурального тиску на проходження пульсової хвилі. За відсутності напруженого стану задача перетворюється на лінійну, а закон дисперсії – у відомий точний розв'язок [15].
2. Встановлена наявність двох областей нестійкості форми судини при перевищенні відповідних порогових значень трансмуральних тисків. Перша (довгохвильова) область характерна наявністю критичних значень довжини хвилі λ_{cr} , на яких найшвидше наростає нестійкість форми. Друга область, яка існує при вищих p_{tr} , характерна наявністю окрім довгих пульсових хвиль ще й хвиль з від'ємною груповою швидкістю [6, 18]. Граничний перехід до теорії оболонки $d/R \rightarrow 0$ призводить до зникнення першої області нестійкості, тобто в [6, 18] з урахуванням гіпотези Кірхгофа – Лява було описано саме другу область з від'ємною груповою швидкістю.
3. Досліджено залежність швидкості Моенса – Кортвега поширення довгих пульсових хвиль від трансмурального тиску. При зростанні p_{tr} з подальшим переходом до першої області нестійкості виявлено падіння на нуль та зникнення цієї швидкості з наступним різким стрибком у другій області. Це свідчить про сильну залежність v_m від p_{tr} в області високих

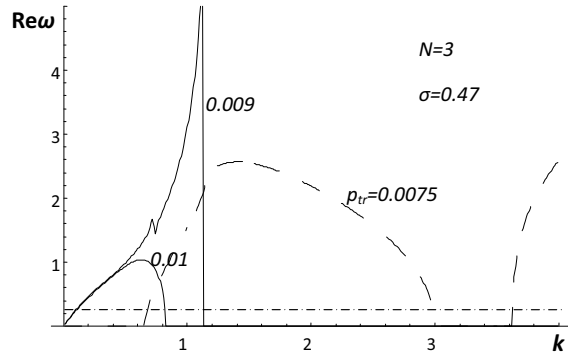


Рис. 12. Закон дисперсії для $\text{Re } \omega$ у другій області нестійкості форми з появою від'ємної групової швидкості

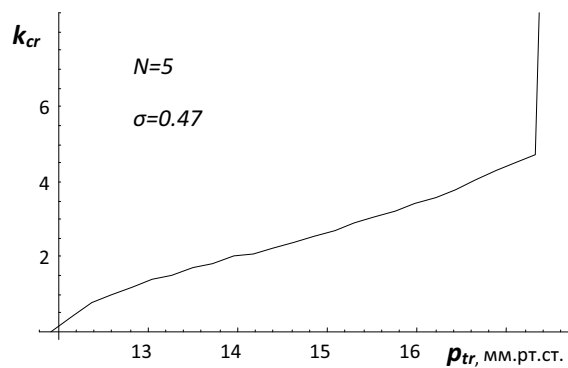


Рис. 13. Залежність критичного хвильового числа нестійкості k_{cr} від p_{tr}

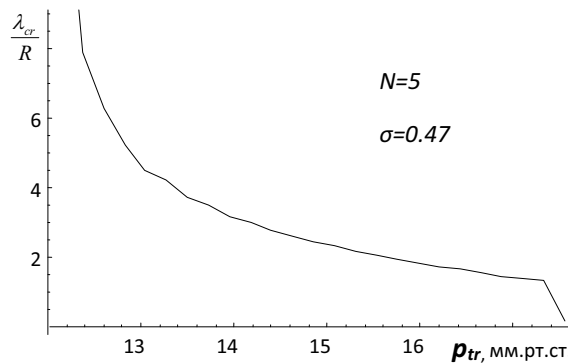


Рис. 14. Залежність відношення λ_{cr}/R від p_{tr}

трансмуральних тисків, що прямо впливає на функціонування кровоносної системи живих організмів при гіпертензіях.

1. Громека И. С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках // Собр. соч.– М.: Изд-во АН СССР, 1952.– С. 172–183.

2. Epstein P. S. On the theory of elastic vibrations in plates and shells // J. Math. Phys.– 1942.– **21**, № 3.– P. 198–209.
3. Kennard E. H. The new approach to shell theory: Circular cylinders // J. Appl. Mech.– 1953.– **20**, № 1.– P. 33–40.
4. Селезов И. Т. О распространении малых возмущений в упругой цилиндрической оболочке, наполненной жидкостью // Прикл. мех.– 1963.– **9**, № 3.– С. 10–16.
5. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения.– М.: Мир, 1981.– 372 с.
6. Лукомський Д. В., Селезов І. Т. Виникнення нестійкості форми при поширенні гідропружних хвиль в еластичній трубці, заповненій рідиною // Наук. записки НПУ ім. М. П. Драгоманова.– 2002.– № 3.– С. 132–145.
7. Lukomsky D., Selezov I. Arteria instability under heart pressure pulse propagation // Acta Bioeng. Biomech.– 2002.– **4**, Suppl. 1 (Proc. 13-th Conf. Europ. Soc. Biomech., Wroclaw, 2002).– P. 524–525.
8. Гольденблат И. И. Нелинейные проблемы теории упругости.– М.: Наука, 1969.– 336 с.
9. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.– М.: Физматгиз, 1961.– 339 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.– М.: Наука, 1987.– 248 с.
11. Astrom P., Egulfluz V. M., Colding-Jorgensen M., Gustafsson F., Holstein-Rathlou N.-H. Instability and “sausage-string” appearance in blood vessels during high blood pressure // Phys. Rev. Lett.– 1999.– **82**.– P. 1995–1998.
12. Селезов И. Т. Волновые процессы в гидродинамических и упругих средах // Прикл. гідромех.– 2000.– **2**, № 4.– С. 99–118.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.– М.: Наука, 1986.– 736 с.
14. Лукомський Д. В. Поширення пульсових хвиль у великих кровоносних судинах з довільною товщиною стінки // Акуст. вісн.– 2008.– **11**, № 4.– С. 31–35.
15. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью // Прикл. мех.– 1984.– **20**, № 1.– С. 21–26.
16. Исакович М. А. Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 496 с.
17. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики.– Л.: Гидрометеоиздат, 1988.– 424 с.
18. Селезов И. Т., Лукомский Д. В. Распространение пульсовых волн давления в кровеносном сосуде за пороговым значением трансмурального давления // Прикл. гідромех.– 2008.– **10**, № 4.– С. 65–69.