

УДК 539.3:534.1

©2014. Д.С. Вуколов, В.И. Сторожев

## ДИФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН СДВИГА НА ВНУТРЕННЕМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ОРТОТРОПНОМ ВКЛЮЧЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ В ОРТОТРОПНОМ УПРУГОМ СЛОЕ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ГРЯНЯМИ

С использованием метода изображений получено численно-аналитическое решение двумерной краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига на прямолинейно-ортотропном цилиндрическом упругом включении эллиптического поперечного сечения в плоскопараллельном ортотропном деформируемом слое. Рассмотрен случай нормального падения волны из произвольной моды дисперсионного спектра на включение с осью, лежащей в срединной плоскости слоя с закрепленными плоскими гранями. Решение задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей в областях сечения слоя и включения рядами по соответствующим базисным частным решениям волновых уравнений в аффинно-преобразованных координатах, выражаемым через цилиндрические функции. Представлены результаты численных исследований, характеризующие ряд ведущих закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле применительно к вариантам задачи, в которых отношения квадратов полуосей эллиптического сечения включения равны отношениям соответствующих модулей продольного сдвига для материалов слоя и включения. Рассмотрены случаи варьирования полуосей эллиптического сечения, относительной длины падающей волны из низшей моды дисперсионного спектра, а также показателя пропорциональности для модулей продольного сдвига ортотропных материалов слоя и включения.

**Ключевые слова:** *закрепленный ортотропный упругий слой, дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига, численно-аналитическое исследование, методы изображений и аффинных преобразований, закономерности распределений волновых перемещений.*

**Введение.** Проблемы теоретического исследования двумерных дифракционных полей, формирующихся при рассеивании стационарных волн механических деформаций на неоднородностях в виде полостей и включений в упругих телах, несмотря на длительный период изучения имеют ряд открытых, актуальных в фундаментальном и прикладном отношении аспектов. Анализ результатов, представленных в монографиях [1–3], а также в обзорных разделах ряда публикаций [4–8], свидетельствует, что это заключение справедливо и для задач о двумерных дифракционных полях, формирующихся в упругом слое при рассеянии нормальных волн продольного сдвига на внутренних туннельных цилиндрических полостях и деформируемых цилиндрических включениях различных сечений с параллельными плоскими гранями слоя образующими. В частности, в работе [9] описана принципиальная схема получения дисперсионных соотношений для волн сдвига, распространяющихся вдоль изотропного слоя с периодическим рядом перпендикулярных направлению распространения и параллельных граням внутренних туннельных цилиндрических полостей. Метод базируется на использовании рядов по

базисным решениям волнового уравнения в цилиндрических функциях. Результаты численных исследований по данной методике в указанной работе не приведены. В публикациях [10, 11] рассмотрены задачи о полях сдвиговых магнитоупругих волн в градиентно-неоднородном слое с внутренней туннельной цилиндрической полостью как приграничной части изотропного полупространства. Метод интегральных преобразований и решения волновых уравнений в цилиндрических функциях в пространстве изображений применялся в работе [12] для исследования эффектов рассеяния упругих продольно-сдвиговых волн на круговом отверстии в изотропной полосе со свободными от напряжений границами. В [2] без примеров численной реализации описан численно-аналитический подход к решению задач дифракции волн сдвига на внутренних туннельных круговых цилиндрических полостях в упругом слое, базирующийся на концепции зеркального отражения (методе изображений [13]). Работа [14] содержит аналитическое и численное исследование задачи о дифракционном рассеянии нормальной волны сдвига на туннельном цилиндрическом упругом включении кругового сечения в изотропном слое с закрепленными плоскими гранями, включая описание ряда ведущих эффектов в структуре дифракционных полей.

Целью настоящей работы является дальнейшее обобщение метода изображений, заключающееся в построении решения задачи о дифракционном рассеянии симметричных сдвиговых волн при нормальном падении на параллельные граням центрально расположенное туннельное прямолинейно-ортотропное упругое цилиндрическое включение эллиптического сечения в прямолинейно-ортотропном слое с закрепленными гранями. Применяется подход, основывающийся на аффинном преобразовании координат для трансформации уравнения стационарных колебаний антиплоской деформации ортотропной среды в метагармоническое уравнение, а также на представлении поля рассеиваемых в слое волн в виде суперпозиции рядов по базисным системам решений метагармонических уравнений во вспомогательных аффинно-преобразованных локальных координатных системах с полюсами, зеркально расположенными относительно его границ.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается отнесенный к прямоугольным координатам  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  прямолинейно ортотропный упругий слой толщины  $2h$ , сечение которого в плоскости  $O\xi_1\xi_2$  представлено на рис. 1. Грани слоя  $\Gamma_{\pm} : \xi_2 = \pm h$  жестко закреплены, а внутри слоя расположено прямолинейно ортотропное туннельное цилиндрическое упругое включение эллиптического поперечного сечения, занимающее область  $V_2 = \{x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 \leq 1, -\infty < x_3 < \infty\}$ . Контур сечения упругого включения имеет параметрическое представление  $\Gamma = \{x_1 = a \cos \varphi, x_2 = b \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ . Во введенных координатах область сечения, занимаемая материалом слоя, имеет вид  $V_1 = \{-\infty < x_2, x_3 < \infty, |x_1| \leq h\}/V_2$ . Физико-механические свойства материалов слоя и включения при динамической антиплоской деформации соответственно характеризуются упругими постоянными  $\{c_{44}^{(1)}, c_{55}^{(1)}\}$ ,  $\{c_{44}^{(2)} = \delta c_{44}^{(1)}, c_{55}^{(2)} = \delta c_{55}^{(1)}\}$  и параметрами плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Полуоси эл-

липтического сечения включения  $V_2$ , по предположению, имеют величины  $a = R$ ,  $b = (c_{55}/c_{44})^{1/2} R$ .

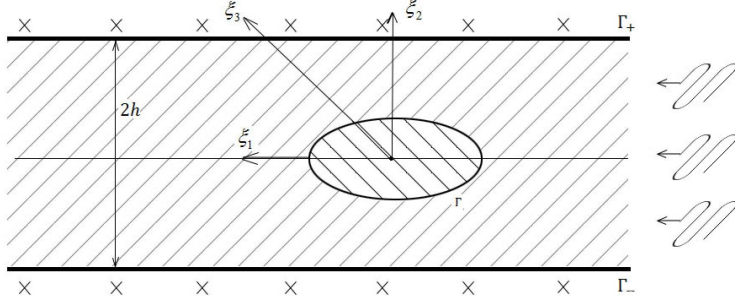


Рис. 1. Сечение слоя с туннельным цилиндрическим включением эллиптического сечения.

Искомые комплексные амплитудные функции для волновых перемещений  $U_3^{(\text{отр})}(\xi_1, \xi_2, t)$  в отраженных волнах и волновых перемещений  $U_3^{(\text{прел})}(\xi_1, \xi_2, t)$  в преломленных во включении волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнений стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации для материалов слоя и включения, которые в случае отнесения всех характеристик с линейной размерностью к нормирующему параметру  $h$  принимают вид

$$(c_{55}^{(j)} \partial_1^2 + c_{44}^{(j)} \partial_2^2 - \rho_j h^2 \partial_t^2) U_3^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

где

$$\partial_j = \partial/\partial \xi_j \quad (j = 1, 2), \quad \partial_t = \partial/\partial t, \quad U_3^{(1)} = U_3^{(\text{пад})} + U_3^{(\text{отр})}, \quad U_3^{(2)} = U_3^{(\text{прел})}. \quad (2)$$

Краевые условия рассматриваемой задачи на плоских гранях слоя  $\Gamma_{\pm}$  и на границе контакта материалов слоя и включения имеют вид

$$(U_3^{(1)})_{\xi_2 = \pm h} = 0, \quad (U_3^{(1)})_{\Gamma} = (U_3^{(2)})_{\Gamma}, \quad (\sigma_{n3}^{(1)})_{\Gamma} = (\sigma_{n3}^{(2)})_{\Gamma}, \quad (3)$$

где  $(\sigma_{n3}^{(j)})_{\Gamma}$  – отнесенные к нормирующему параметру  $c_* = c_{55}^{(1)}$  амплитудные характеристики касательных напряжений на площадках вдоль поверхности с направляющей  $\Gamma$ . Для функции волновых упругих перемещений в падающей нормальной упругой  $SH$ -волне вводится исходное представление

$$U_3^{(\text{пад})}(\xi_1, \xi_2, t) = U_{30} \exp(-i(\omega t - k_n \xi_1)) \cos(\tilde{\alpha}_n \xi_2), \quad (4)$$

в котором  $\tilde{\alpha}_n = (2n + 1) \pi / 2h$ ,  $k_n = (\Omega_1^2 - \tilde{\alpha}_n^2)^{1/2}$ ,  $\Omega_1^2 = \rho_1 \omega^2 h^2 / c_*$ ,  $n$  – номер моды падающих нормальных бегущих симметричных  $SH$ -волн в закрепленном на плоских гранях слое. Представление (4) априори удовлетворяет первому из краевых условий (3). Задача заключается в описании полей отраженных и преломленных волн.

**2. Построение численно-аналитического решения задачи.** На исходном этапе построения решения осуществляется аффинное преобразование координат  $O\xi_1\xi_2$  в координаты  $Ox_1x_2$ , которое описывается соотношениями

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \mu\xi_2, \quad \mu = (c_{55}^{(1)}/c_{44}^{(1)})^{1/2}.$$

При этом эллиптический контур сечения включения  $\Gamma$  трансформируется в окружность  $\tilde{\Gamma}$  радиуса  $R$ , а уравнения (1) принимают вид

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 - \rho_1 h^2 c_*^{-1} \partial_t^2) U_3^{(1)} = 0, \quad (\partial_1^2 + \partial_2^2 - \rho_2 h^2 (\delta c_*)^{-1} \partial_t^2) U_3^{(2)} = 0.$$

В плоскости  $Ox_1x_2$  система полярных координат  $Or\theta$  связана с  $x_j$  соотношениями

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Для амплитудной составляющей функции волновых перемещений в преломленных во включении волнах записывается представление

$$U_3^{(\text{прел})} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(\Omega_2 r) \cos(n\theta), \quad (5)$$

в котором  $B_n$  – подлежащие определению коэффициенты разложения поля преломленных во включении волн в ряд по базисным цилиндрическим стоячим волнам;  $J_n(\Omega_2 r)$  – цилиндрические функции Бесселя первого рода индекса  $n$ ,  $\Omega_2^2 = \rho \omega^2 h^2 / (\delta c_*) = \Omega_1^2 / \delta$ . Для записи амплитудной составляющей поля волн, отраженных от включения и удовлетворяющих краевому условию на закрепленных гранях слоя  $\Gamma_{\pm}$ , согласно концепции метода изображений, вводится счетное множество вспомогательных локальных прямоугольных и полярных координатных систем с полюсами  $O_k$ , имеющими в  $Ox_1x_2$  координаты  $x_{1,k} = 0$ ,  $x_{2,k} = 2kh$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Соответственно с использованием введенных локальных координатных систем записывается удовлетворяющее условию на  $\Gamma_{\pm}$  представление

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\Omega_1 r_0) \cos(n\theta_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^k (H_n(\Omega_1 r_k) \cos(n\theta_k) + H_n(\Omega_1 r_{-k}) \cos(n\theta_{-k})). \quad (6)$$

После применения теорем сложения цилиндрических функций контурное представление  $(U_3^{(\text{отр})})_{\tilde{\Gamma}}$  принимает вид

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [H_{p-n}^{(1)}(2\Omega hk) + H_{n+p}^{(1)}(2\Omega hk)] \right] \cos(n\theta), \quad (7)$$

и с введением обозначения  $S_{p,n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H_{p-n}^{(1)}(2\Omega h k)$  приобретает окончательную форму записи в полярных координатах, связанных с центром включения

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) (S_{p,n} + S_{p,-n}) \right] \cos(n\theta). \quad (8)$$

Контурное представление на  $\tilde{\Gamma}$  для комплексной амплитудной составляющей функции перемещений в падающей волне

$$\tilde{U}_3^{(\text{пад})} = U_{30} \exp(ik_n \xi_1) \cos(\tilde{\alpha}_n \xi_2) = U_{30} \exp(ik_n x_1) \cos(\alpha_n x_2),$$

где  $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n/\mu$ , записывается с использованием формулы обобщенного разложения Якоби

$$e^{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2} = \sum_{(p)} Q_p e^{ip\theta}, \quad (9)$$

$$Q_p = J_p \left( -iR(\nu_1^2 + \nu_2^2)^{1/2} \right) \left( (i\nu_1 + \nu_2) / (\nu_1^2 + \nu_2^2)^{1/2} \right)^p$$

и после ряда преобразований принимает вид

$$\tilde{U}_3^{(\text{пад})} = U_{30} \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^0 J_p \left( R\sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^p \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{p/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{p/2} \right) \cos(p\theta), \quad (10)$$

$$\delta_p^0 = \begin{cases} \frac{1}{2}, & p = 0; \\ 1, & p \neq 0. \end{cases}$$

При использовании представлений (8) и (10) для записи функциональных уравнений, следующих из краевых условий (3) на контактной поверхности  $\tilde{\Gamma}$ , и в результате их последующей алгебраизации с применением метода ортогональных рядов, для неизвестных коэффициентов в указанных представлениях получена бесконечная система из двух групп линейных алгебраических уравнений:

$$B_n J_n(\Omega_2 R) - A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega_1 R) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ H_{p-n}^{(1)}(2\Omega_1 h k) + H_{n+p}^{(1)}(2\Omega_1 h k) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= U_{30} \delta_n^0 J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^n \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right), \\
 B_n \delta \left( \frac{n}{R} J_n (\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1} (\Omega_2 R) \right) - A_n \left( \frac{n}{R} H_n^{(1)} (\Omega_1 R) - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)} (\Omega_1 R) \right) - \\
 &\quad - \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) \left( \frac{n}{R} J_n (\Omega_1 R) - \Omega_1 J_{n+1} (\Omega_1 R) \right) \times \\
 &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ H_{p-n}^{(1)} (2\Omega_1 hk) + H_{n+p}^{(1)} (2\Omega_1 hk) \right] = \\
 &= U_{30} \delta_n^0 \left( \frac{n}{R} J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) \right) \times \\
 &\quad \times i^n \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Путем исключения в указанных группах коэффициента  $B_n$  система (11) преобразуется к следующему, используемому при редукции и численных исследованиях виду:

$$\begin{aligned}
 &A_n \left( \frac{1}{\delta} \frac{\frac{n}{R} H_n^{(1)} (\Omega_1 R) - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)} (\Omega_1 R)}{\frac{n}{R} J_n (\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1} (\Omega_2 R)} - \frac{H_n^{(1)} (\Omega_1 R)}{J_n (\Omega_2 R)} \right) + \\
 &\quad + \delta_n^0 \left( \frac{1}{\delta} \frac{\frac{n}{R} J_n (\Omega_1 R) - \Omega_1 J_{n+1} (\Omega_1 R)}{\frac{n}{R} J_n (\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1} (\Omega_2 R)} - \frac{J_n (\Omega_1 R)}{J_n (\Omega_2 R)} \right) \times \\
 &\quad \times \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ H_{p-n}^{(1)} (2\Omega_1 hk) + H_{n+p}^{(1)} (2\Omega_1 hk) \right] = \\
 &= U_{30} \delta_n^0 \left( \frac{J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right)}{J_n (\Omega_2 R)} - \frac{1}{\delta} \frac{\frac{n}{R} J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right)}{\frac{n}{R} J_n (\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1} (\Omega_2 R)} \right) \times \\
 &\quad \times i^n \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right).
 \end{aligned}$$

После определения искоемых коэффициентов из приведенной алгебраической системы может быть реализована фаза численного анализа основных закономерностей, свойственных полям преломляющихся во включении и рассеиваемых волн, на которой для расчета характеристик исследуемых полей в произвольной точке  $(\xi_1, \xi_2)$  используются соотношения

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2/\mu, \quad r = (\xi_1^2 + \xi_2^2/\mu^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctg(\xi_2/\mu\xi_1).$$

**3. Результаты численных исследований.** Анализ ряда эффектов распределения волновых перемещений реализован применительно к задаче о рассеянии симметричных нормальных волн сдвига с варьируемой относительной длиной  $\lambda = (2\pi/k_n) h^{-1}$  из низшей моды  $n = 0$  дисперсионного спектра в слое с включением, механические свойства, форму и размеры которого определяет набор варьируемых параметров  $\{c_{44}^{(1)}, c_{55}^{(1)}, R, \delta\}$ . Полагается, что плотности материалов слоя и включения равны. На рис. 2–10 в виде тонированных изображений, на которых переход от светлых тонов к темным отвечает нарастанию интенсивности характеризуемых величин, представлены картины распределения уровней волновых перемещений внутри эллиптических включений с различными полуосями и в подобластях слоя  $\xi_1 \in [-h, h]$ ,  $\xi_2 \in [-4h, 8h]$  вне включения для моментов времени, соответствующих началу периодов волновых колебаний. Варьируемыми параметрами являются также показатель  $\delta$  соотношения модулей сдвига для материалов слоя и включения и относительная длина падающей волны  $\lambda$ .

В качестве выводов, следующих из анализа данных распределений, можно указать на следующие эффекты. В случае слоя с упругими постоянными,  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$  и включения с параметром  $R = 0.5h$  из ортотропного материала с пониженной жесткостью ( $\delta = 0.25$ ) при падении относительно короткой волны с  $\lambda = 0.25$  (рис. 2) во включении формируется поле с повышенной интенсивностью в окрестности больших полуосей и выраженной точкой фокуса концентрации, и в направлении теневой области включение выполняет роль рассеивателя; интенсивность отраженных волн в этом случае очень мала, а в теневой области на расстоянии, приблизительно составляющем  $6h$  от тыльной границы включения, генерируется фокус поля огибающих включение волн.

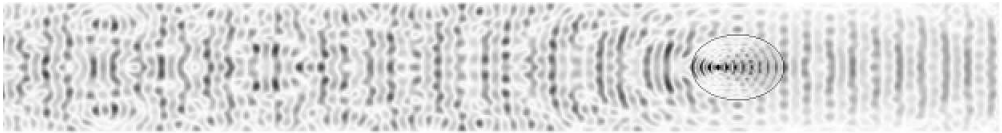


Рис. 2. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.25h$ ,  $\delta = 0.25$ .

Для случая падения волны с  $\lambda = 0.5h$  (рис. 3) в области включения формируются три полюса, расположенных в вершинах треугольника, а в случае падения волны с  $\lambda = 0.7h$  (рис. 4) – множественные полюсы у контура сечения. Примечательным является и эффект появления зон контрастно высокой интенсивности рассеянных волн в теневой области для случая  $\lambda = 0.5h$ .

При  $\lambda = h$  во включении данной геометрии формируются относительно большие зоны фокусирования (рис. 5), а также возникает зона интенсивного фокусирования огибающих волн в теневой области на удалении  $8.5h$  от тыльной точки включения. Наконец, наблюдается эффект формирования каналов отражения волны, расположенных у граней во фронтальной области слоя. Более контрастно изменяющимся во всех перечисленных случаях является



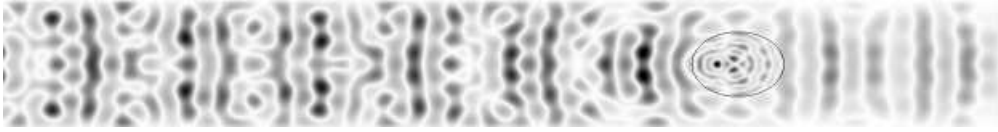


Рис. 3. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.5h$ ,  $\delta = 0.25$ .



Рис. 4. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.7h$ ,  $\delta = 0.25$ .

поле в тыльной зоне жесткого включения.

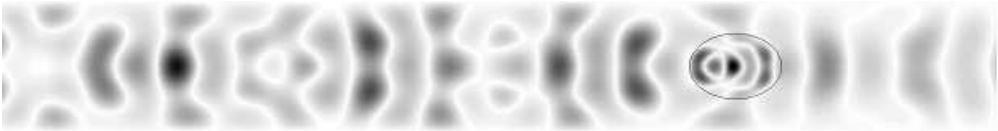


Рис. 5. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = h$ ,  $\delta = 0.25$ .

При изменении геометрии и соотношения модулей упругости включения с заданием  $c_{44} = 0.5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\delta = 0.25$  в случае относительной длины падающей волны  $\lambda = 0.25h$  (рис. 6) можно отметить роль включения как концентратора, вследствие которой вблизи контура за включением наблюдается контрастный фокус.

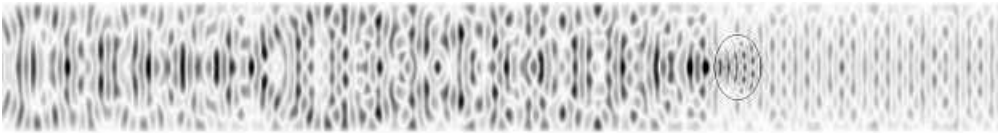


Рис. 6. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0.5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.25h$ ,  $\delta = 0.25$ .

При  $\lambda = 0.5h$  и  $\lambda = 0.7h$  (рис. 7, 8) наряду с появлением и трансформациями фокусных зон в области включения можно отметить эффекты множественной высокоуровневой фокусировки полей в теневой зоне за включением. В рассеянном поле выделяются явно выраженные интенсивные огибающие потоки и наблюдается специфический эффект возникновения зон фокусировки волн в теневой области на больших расстояниях от включения. При  $\lambda = h$  наблюдается выраженная картина формирования каналов отражения



у граней слоя во фронтальной зоне, а также формирование специфических подобластей взаимного гашения падающей и отраженной волн в прилегающей к срединной поверхности зоне фронтальной области и противоположный эффект фокусной концентрации поля в теневой области за включением (рис. 9).

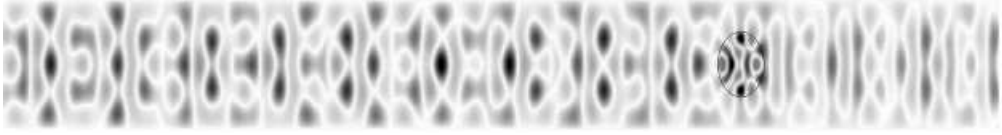


Рис. 7. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0.5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.5h$ ,  $\delta = 0.25$ .



Рис. 8. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0.5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.7h$ ,  $\delta = 0.25$ .

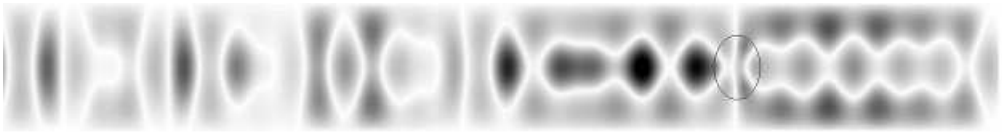


Рис. 9. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0.5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = h$ ,  $\delta = 0.25$ .

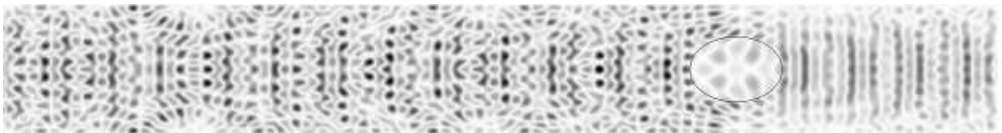


Рис. 10. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.25h$ ,  $\delta = 4$ .



Рис. 11. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.5h$ ,  $\delta = 4$ .

В случаях, когда рассматриваются включения повышенной жесткости, геометрические и механические параметры которых имеют характеристики  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\delta = 4$ , можно также акцентировать малые эффекты отражения и выраженное обтекание включения при падении относительно коротких волн с  $\lambda = 0.25h$  (рис. 10). При увеличении относительной длины падающей волны в случаях  $\lambda = 0.5h$  (рис. 11),  $\lambda = 0.7h$  (рис. 12) и  $\lambda = h$  (рис. 13) включение с разной степенью выраженности играет роль рассеивателя, а специфика геометрии поля рассеянных волн может рассматриваться как параметр обратных задач по идентификации формы и свойств рассеивающего препятствия. Следует также указать на эффекты формирования вихрей в отраженных полях и на формирование каналов отражения у границ слоя во фронтальной зоне взаимодействия волны с препятствием.



Рис. 12. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.7h$ ,  $\delta = 4$ .



Рис. 13. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = h$ ,  $\delta = 4$ .

Наконец, падение волн различной относительной длины на включение с характеристиками  $c_{44} = 0.5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\delta = 4$  (рис. 14–17) генерирует низкоинтенсивные поля во включении и сопровождается повышением степени регулярности в строении полей рассеянных волн с элементами концентрирующей фокусировки. Растет также интенсивность эффектов отражения во фронтальной зоне.

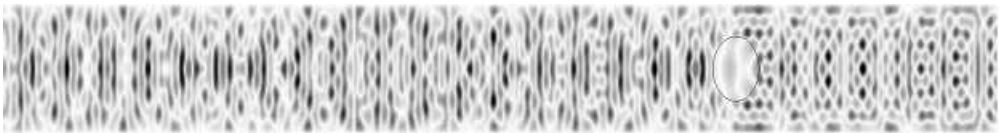


Рис. 14. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0.5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.25h$ ,  $\delta = 4$ .

Приведенные распределения подтверждают также априорные свойства сопоставительного уменьшения длины преломляющихся волн в мягком включении и увеличения длины этих волн в относительно жестком включении. Во



Рис. 15. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0.5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.5h$ ,  $\delta = 4$ .

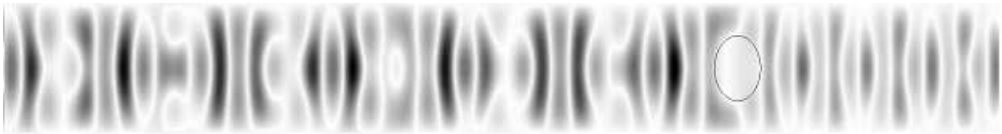


Рис. 16. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0.5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = 0.7h$ ,  $\delta = 4$ .

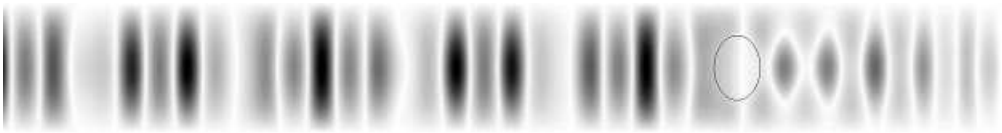


Рис. 17. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0.5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0.5h$ ,  $\lambda = h$ ,  $\delta = 4$ .

всех случаях более контрастно изменяющимся является поле в теневой зоне взаимодействия.

**Выводы.** С использованием метода изображений и приема аффинного преобразования координат для получения классического волнового уравнения из обобщенного метагармонического получено теоретическое численно-аналитическое решение двумерной краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига на прямолинейно-ортотропном цилиндрическом упругом включении эллиптического поперечного сечения в плоскопараллельном ортотропном деформируемом слое. Рассмотрен случай нормального падения волны из произвольной моды дисперсионного спектра на включение с осью, лежащей в срединной плоскости слоя с закрепленными плоскими гранями. Решение задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей в областях сечения слоя и включения рядами по базисным частным решениям в цилиндрических функциях для классических волновых уравнений, получаемых из соответствующих уравнений динамической антиплоской деформации ортотропной среды путем аффинных преобразований. Представлены результаты численных исследований для случая падения волны низшей моды дисперсионного спектра. На их основе установлен и описан ряд ведущих закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании соотношения полуосей эллиптического сечения включения,

относительной длины падающей волны, а также коэффициента пропорциональности модулей сдвига для ортотропных материалов слоя и включения. В частности, описаны эффекты фокусирующей либо рассеивающей функции включения для преломляющихся в нем волн в зависимости от соотношения сдвиговых жесткостей материалов включения и слоя; эффекты усложнения картины распределения волновых перемещений в протяженной теневой зоне за включением и появление зон выраженной фокусировки в полях перемещений в этой зоне; появление зон выраженной фокусировки в полях преломляющихся во включении волн; эффекты малости искажений, вносимых в поле падающих волн отраженными от включения волнами во фронтальной области взаимодействия.

1. Pao Y.H., Mow C.C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. – New York: Crane Russak, 1973. – 308 p.
2. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – К.: Наук. думка, 1972. – 254 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
4. Fang X.-Q. Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer // Intern. J. Solids Struct. – 2008. – **45**. – P. 5716–5729.
5. Fang X.-Q., Liu J.-X., Wang X.-H. et al. Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves // Compos. Sci. Technol. – 2009. – **69**. – P. 1115–1123.
6. Fang X.-Q., Liu J.-X., Wang X.-H., Zhang L.-L. Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves // Phil. Mag. Lett. – 2010. – **90**. – P. 361–380.
7. Fang X.-Q., Liu J.-X., Zhang L.-L., Kong Y.-P. Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves // Mater. Struct. – 2011. – **44**. – P. 67–75.
8. Yang Y.-H., Wu L.-Z., Fang X.-Q. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves // J. Nondestructive Eval. – 2010. – **29**. – P. 233–240.
9. Golovchan V.T., Guz A.N. Shear-wave propagation in an elastic layer perforated by a series of cylindrical cavities // Soviet Applied Mechanics. – 1976. – **12**, Issue 9. – P. 888–892.
10. Острик В.И., Фильштинский Л.А. Динамические задачи магнитоупругости для слоя и полуслоя с туннельными полостями и трещинами продольного сдвига // Изв. НАН Армении. Механика. – 1991. – **44**, № 4. – С. 34–45.
11. Ostriuk V.I., Filshhtinskii L.A. The interaction of a magnetoelastic shear wave with longitudinal cavities in a conducting layer // J. of Mathematical Sciences. – 1996. – **79**, Iss. 6. – P. 1450–1454.
12. Ito S. Diffraction of a stress wave by a cylindrical cavity in an infinite elastic strip // Lett. Appl. Engng. Sci. – 1984. – **22**, № 4. – P. 475–490.
13. Taraldsen G. The complex image method // Wave Motion. – 2005. – **43**. – P. 91–97.
14. Вуколов Д.С., Сторожев В.И. Дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига на туннельном цилиндрическом включении в упругом слое с закрепленными границами // Вестн. Донецкого национального ун-та. Сер. А. Естеств. науки. – 2014. – № 1. – С. 14–21.

D.S. Vukolov, V.I. Storozhev

**Diffraction scattering of normal shear waves at the inner orthotropic cylindrical inclusion of elliptical cross section in orthotropic elastic layer with fixed faces**

A numerical-analytical solution of two-dimensional boundary problem of diffraction scattering of symmetric normal shear waves on elliptic cylindrical anisotropic elastic inclusion in the deformable layer using the method of images and method of affine transformation is obtained. The case of normal incidence of the wave on inclusion with the axis lying in the median plane of the layer with fixed faces is investigated. Solution of the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations for the coefficients of representations of wave fields in the areas of cross-section of the layer and the inclusion by series in the basic particular solutions of wave equations expressed in cylindrical functions. The results of numerical investigation characterizing a number of leading effects in the distribution of the wave displacements in the near- and far- diffraction field obtained by varying the relative radius of inclusions, the relative length of the incident wave on the lowest mode of dispersion spectrum, and the ratio of the shear modulus for the material layer and inclusion are presented.

**Keywords:** *fixed orthotropic elastic layer, diffractive scattering of normal shear waves, numerical-analytical study, the method of images, the series of basic solutions of wave equations, behaviour of distribution of wave displacements.*

Д.С. Вуколов, В.І.Сторожев

**Дифракційне розсіювання нормальних хвиль зсуву на внутрішньому циліндричному ортотропному включенні з еліптичним перерізом в ортотропному пружному шарі із закріпленими гранями**

З використанням методу зображень отримано чисельно-аналітичний розв'язок двовимірної крайової задачі про дифракційне розсіювання біжучих симетричних нормальних хвиль поздовжнього зсуву на прямолінійно ортотропному циліндричному пружному включенні еліптичного поперечного перерізу в плоскопаралельному ортотропному деформівному шарі. Розглянуто випадок нормального падіння хвилі з довільної моди дисперсійного спектру на включення з віссю, що лежить в серединній площині шару з закріпленими плоскими гранями. Задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів зображень хвильових полів в областях перерізу шару і включення рядами за відповідними базисними частинними розв'язками хвильових рівнянь у циліндричних функціях в афінно-перетворених координатах. Подано результати чисельних досліджень, що характеризують низку провідних закономірностей в розподілах хвильових переміщень в ближньому і далекому дифракційному полі для варіантів задачі, в яких співвідношення квадратів півосей еліптичного перетину включення дорівнюють співвідношенням відповідних модулів поздовжнього зсуву для матеріалів шару і включення. Розглянуто випадки варіювання півосей еліптичного перетину, відносної довжини падаючої хвилі з нижчої моди дисперсійного спектру, а також показника пропорціональності для модулів поздовжнього зсуву ортотропних матеріалів шару і включення.

**Ключові слова:** *закріплений ортотропний пружний шар, дифракційне розсіювання нормальних хвиль зсуву, чисельно-аналітичне дослідження, методи зображень і афінних перетворень, закономірності розподілу хвильових переміщень.*

Донецкий национальный ун-т  
stvi@i.ua

Получено 03.04.14