УДК 531.36

©2014. **В.Е. Пузырев, Н.В. Савченко**

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА С ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ

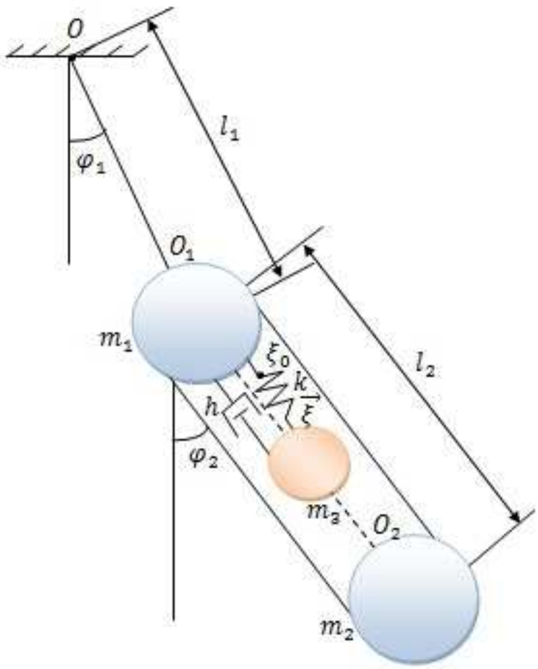
Рассмотрена задача о влиянии присоединенной массы на устойчивость нижнего положения равновесия двойного маятника. Линейное приближение не позволяет решить задачу, поскольку имеет место критический случай двух пар чисто мнимых корней, вследствие чего для исследования используется прямой метод Ляпунова. Функция Ляпунова строится согласно общей методике, предложенной А.Я. Савченко и несколько модифицированной, с учетом особенностей задачи. Показано, что добавление массы делает положение равновесия маятника асимптотически устойчивым.

Ключевые слова: *демпфер пассивного типа, асимптотическая устойчивость, функция Ляпунова, критический случай.*

Введение. Задача устранения или уменьшения нежелательных вибраций в механических системах имеет давнюю историю. С этой целью используют разные методы, в том числе добавление в механическую систему различных демпфирующих устройств – динамических абсорберов. По принципу действия их разделяют на пассивные и активные (а также смешанного типа). Демпферы активного типа используют в случаях, когда нужно управлять свойствами механической системы и предполагают наличие обратной связи. Они требуют установки сенсоров, актуаторов и внешнего источника энергии. К устройствам пассивного типа относят такие, которые, будучи добавлены в систему, выполняют свое назначение за счет естественных свойств материала. Сюда относятся вязкоупругие материалы, вязкие жидкости, магнитные устройства, пьезокерамические демпферы и пр. Наиболее распространенным является использование вязкоупругих материалов (простота и относительная дешевизна).

Классическим примером демпфера пассивного типа является динамический поглотитель колебаний (ДПК). Он представляет собой присоединенную массу, которая обычно моделируется как материальная точка и характеризуется массой, жесткостью и коэффициентом вязкого трения. ДПК может быть использован для успокоения как свободных колебаний [1], так и вибраций, вызванных действием внешней периодической силы [2]. В случае обычного маятника ДПК использовался в работах [3–5]. В настоящей работе демпфер пассивного типа используется для стабилизации положения равновесия двойного математического маятника. Заметим, что похожие задачи для маятниковых систем рассматриваоись в работах [6, 7]. Система, рассматриваемая в настоящей статье, отличается от изученной в [7] своей конструкцией (иной тип шарнира), результатом (в [7] шарнир должен быть “достаточно жестким”) и методом исследования (критический случай пар чисто мнимых корней вместо устойчивости по линейному приближению в [7]).

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из двойного математического маятника с динамическим поглотителем колебаний (рисунок). Последний представляет собой материальную точку, присоединенную к одному из звеньев маятника в рамках модели Кельвина–Фойгта. Массы и длины звеньев соответственно равны m_1, l_1 и m_2, l_2, масса ДПК – m_3, жесткость пружины – k, коэффициент вязкого трения – h. В качестве обобщенной координаты ξ, характеризующей положение ДПК, возьмем отношение его расстояния до шарнира O_1 к длине второго звена.



Двойной маятник с поглотителем колебаний во втором звене.

В этом случае имеем следующие соотношения

$$\mathbf{OO_1} = l_1(\sin\varphi_1, \cos\varphi_1),\ \mathbf{O_1O_2} = l_2(\sin\varphi_2, \cos\varphi_2),\ \ \mathbf{O_1O_3} = l_2\xi(\sin\varphi_2, \cos\varphi_2);$$

$$\boldsymbol{v}_1 = l_1\dot\varphi_1(\cos\varphi_1, -\sin\varphi_1), \qquad \boldsymbol{v}_2 = l_2\dot\varphi_2(\cos\varphi_2, -\sin\varphi_2) + \boldsymbol{v}_1,$$

$$\boldsymbol{v}_3 = l_2\dot\xi(\sin\varphi_2, \cos\varphi_2) + l_2\dot\varphi_2\xi(\cos\varphi_2, -\sin\varphi_2) + \boldsymbol{v}_1.$$

Кинетическая и потенциальная энергии запишутся так:

$$2T = (m_1 + m_2 + m_3)l_1^2\dot\varphi_1^2 + l_2^2(m_2 + m_3\xi^2)\dot\varphi_2^2 + m_3l_2^2\dot\xi^2 +$$

$$+2l_1l_2\dot\varphi_1[\dot\varphi_2(m_2 + m_3\xi)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + m_3\dot\xi\sin(\varphi_2 - \varphi_1)],$$

$$\Pi = -g[(m_1 + m_2 + m_3)l_1\cos(\varphi_1) + l_2(m_2 + m_3\xi)\cos(\varphi_2)] + \frac{1}{2}kl_2(\xi - \xi^{(0)})^2.$$

Значение $\xi^{(0)}$ соответствует длине пружины в недеформированном состоянии. Функция Релея имеет вид $R = -h\dot{\xi}^2/2$.

Запишем уравнения движения рассматриваемой системы в форме Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q}, \tag{1}$$

где $L = T - \Pi$, $\boldsymbol{Q} = (0, 0, -h\dot{\xi})$.

Изучим вопрос об устойчивости нижнего положения равновесия данной механической системы, т. е. решения

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \xi = \xi_0, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \dot{\xi} = 0 \quad (\xi_0 = \xi^{(0)} + \frac{m_3 g}{k}). \tag{2}$$

Очевидно, оно является устойчивым (потенциальная энергия имеет минимум), но будет ли устойчивость асимптотической? Классические теоремы Кельвина–Четаева [8] не дают ответа на этот вопрос, поскольку диссипация энергии является неполной. Поэтому воспользуемся прямым методом Ляпунова.

Введем безразмерные параметры и время по формулам

$$M = m_1 + m_2 + m_3, \ \tilde{m}_2 = \frac{m_2}{M}, \ \tilde{m}_3 = \frac{m_3}{M}, \ \widetilde{h} = \frac{h}{M}\sqrt{\frac{l_2}{g}}, \ \widetilde{k} = \frac{k l_2}{M g}, \ \tau = \sqrt{\frac{g}{l_2}} t. \tag{3}$$

Для удобства в дальнейшем символ $\sim$ будем опускать.

Запишем характеристическое уравнение линейной части системы (1)

$$(a\lambda^4 + b\lambda^2 + c)(m_3\lambda^2 + h\lambda + k) = 0, \tag{4}$$

где
$$a = l_1 m_2 + l_1 m_3 \xi_0^2 - l_1 m_2^2 - 2 l_1 m_2 m_3 \xi_0 - l_1 m_3^2 \xi_0^2,$$

$$b = -m_2 - m_3\xi_0^2 - l_1 m_2 - l_1 m_3 \xi_0, \qquad c = m_2 + m_3 \xi_0.$$

Уравнение (4) имеет четыре чисто мнимых корня $\lambda_1 = i\omega_1$, $\lambda_2 = i\omega_2$, $\lambda_3 = -\lambda_1$, $\lambda_4 = -\lambda_2$ и два корня с отрицательной вещественной частью. Соответственно, для системы уравнений возмущенного движения имеет место критический случай двух пар чисто мнимых корней.

2. Вспомогательные результаты. Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m + l$ вида

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \sum_{s=1}^{l} \xi_s \widetilde{\boldsymbol{C}}^{(s)}\boldsymbol{x}, \quad \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi} + \sum_{s=1}^{2m} x_s \widetilde{\boldsymbol{D}}^{(s)}\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2m}$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{l}$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \widetilde{\boldsymbol{C}}^{(s)}$ $(s = \overline{1, 2m})$ – вещественные квадратные матрицы, $\widetilde{\boldsymbol{D}}^{(j)}$ $(j = \overline{1, 2m})$ – вещественные прямоугольные матрицы порядка

$l \times 2m$. Собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$ суть $\pm i\omega_1, \cdots \pm i\omega_m$ $(0 < \omega_1 < \cdots < < \omega_m)$, вещественные части собственных значений матрицы $\boldsymbol{B}$ отрицательны.

Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения системы (5). Для общего случая m пар чисто мнимых корней обычно используется принцип сведения [9–14], который с помощью нелинейной замены приводит исходную систему к специальному виду, для которого и строится функция Ляпунова (ФЛ). Альтернативой является "прямое" построение ФЛ [3, 15], которое, в зависимости от сложности рассматриваемой системы, может оказаться значительно более простым с технической точки зрения. Мы воспользуемся вторым подходом. Переменные x_s $(s = \overline{1, 2m})$ будем называть критическими, а ξ_j $(j = \overline{1, l})$ – некритическими.

С помощью линейного невырожденного преобразования критических переменных $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda z}$ приведем систему (5) к виду

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \boldsymbol{Jz} + \sum_{s=1}^{l} \xi_s \boldsymbol{C}_*^{(s)} \boldsymbol{z}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{B\xi} + \sum_{s=1}^{2m} z_s \boldsymbol{D}^{(s)} \boldsymbol{z}. \tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(i\omega_1, \cdots, i\omega_m, -i\omega_1, \cdots, -i\omega_m)$ – жорданова форма матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}, \bar{\boldsymbol{y}})^T$, $\boldsymbol{C}_*^{(s)} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{C}}^{(s)} \boldsymbol{\Lambda}$, элементы матриц $\boldsymbol{D}^{(s)}$ известным образом выражаются через элементы матриц $\widetilde{\boldsymbol{D}}^{(s)}$, $\boldsymbol{\Lambda}$. Черта сверху означает комплексное сопряжение, верхний индекс T – транспонирование. Очевидно, что j-я и $j+m$-я строки матриц $\boldsymbol{C}_*^{(s)}$ являются комплексно сопряженными, т. е. $\boldsymbol{C}_*^{(s)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}^{(s)} \\ \overline{\boldsymbol{C}}^{(s)} \end{pmatrix}$.

Следуя работам [13, 15], введем следующие обозначения. Пусть $P = (p_1, \cdots, p_m)$ – m-мерный индекс, $p = |P| = p_1 + \cdots + p_m$, однородную форму порядка n запишем, как

$$\sum_{p+q=n} k_{PQ} \boldsymbol{y}^P \bar{\boldsymbol{y}}^Q = \sum_{p+q=n} k_{p_1 \cdots p_m q_1 \cdots q_m} y_1^{p_1} \cdots y_m^{p_m} \bar{y}_1^{q_1} \cdots \bar{y}_m^{q_m}.$$

Обозначим

$$V_0^{(2)}(\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j \bar{y}_j$$

и выберем ФЛ в виде

$$V(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) = V_0^{(2)}(\boldsymbol{z}) + \alpha_{m+1} V^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + V^{(3)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) + V^{(4)}(\boldsymbol{z}), \; V^{(3)} = \sum_{s=1}^{l} \xi_s \widetilde{V}_s^{(2)}(\boldsymbol{z}), \tag{7}$$

где α_j $(j = \overline{1, m})$, α_{m+1} – некоторые вещественные постоянные, $V^{(2)}$ – положительно определенная квадратичная форма, $\widetilde{V}_s^{(2)} = \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{K}^{(s)} \boldsymbol{z}$, элементы матриц $\boldsymbol{K}^{(s)}$ будут определены ниже. Обозначим через $\boldsymbol{\alpha y}$ вектор

$(\alpha_1 y_1, \cdots, \alpha_m y_m)$, тогда

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j \bar{y}_j = \langle \boldsymbol{\alpha y}, \bar{\boldsymbol{y}} \rangle,$$

где угловые скобки означают скалярное произведение.

Вычислим производную dV/dt в силу системы (6) и представим ее в виде суммы $\dot{V}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) = \dot{V}^{(2)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) + \dot{V}^{(3)}(\boldsymbol{z}, \xi) + \dot{V}^{(4)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) + \cdots$. Запишем выражения для форм $\dot{V}^{(s)}$ $(s = \overline{2,4})$. Для формы $\dot{V}^{(2)}$ имеем

$$\dot{V}^{(2)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) = -\alpha_{m+1} U^{(2)}(\boldsymbol{\xi}),$$

при этом, поскольку спектр матрицы $\boldsymbol{B}$ принадлежит левой полуплоскости, форму $V^{(2)}$ можно выбрать так, что $U^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$ будет положительно определенной.

$$\begin{gathered}\dot{V}^{(3)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{s=1}^{l} [(\boldsymbol{b}_s \boldsymbol{\xi}) \widetilde{V}_s^{(2)}(\boldsymbol{z}) + \xi_s (\operatorname{grad} \widetilde{V}_s^{(2)})(\boldsymbol{J z})] + \langle \boldsymbol{\alpha} \bar{\boldsymbol{y}}, \sum_{s=1}^{l} \xi_s \boldsymbol{C}^{(s)} \boldsymbol{z} \rangle + \\ + \langle \boldsymbol{\alpha y}, \sum_{s=1}^{l} \xi_s \overline{\boldsymbol{C}}^{(s)} \bar{\boldsymbol{z}} \rangle + \beta \langle \operatorname{grad} V^{(2)}, \sum_{s=1}^{2m} z_s \boldsymbol{D}^{(s)} \boldsymbol{z} \rangle,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\dot{V}^{(4)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) = (\operatorname{grad} \widetilde{V}^{(4)})(\boldsymbol{J z}) + \sum_{s=1}^{l} \xi_s (\operatorname{grad} \widetilde{V}_s^{(2)}) \sum_{s=1}^{l} \xi_s \boldsymbol{C}^{(s)} \boldsymbol{z} + \langle \widetilde{\boldsymbol{V}}^{(2)}, \sum_{s=1}^{2m} z_s \boldsymbol{D}^{(s)} \boldsymbol{z} \rangle, \tag{9}$$

здесь $\boldsymbol{b}_s$ означает s-ю строку матрицы $\boldsymbol{B}$; $\widetilde{\boldsymbol{V}}^{(2)} = (\widetilde{V}_1^{(2)}, \cdots, \widetilde{V}_l^{(2)})^T$.

Определим элементы матриц $\boldsymbol{K}^{(s)}$ таким образом, чтобы $\dot{V}^{(3)} \equiv 0$. Приравнивая нулю коэффициенты при различных слагаемых вида $\xi_s \boldsymbol{y}^P \overline{\boldsymbol{y}}^Q$ $(s = \overline{1,l},\ p + q = 2)$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $k_{PQ}^{(s)}$. Эта система распадается на $2m^2 + m$ подсистем s-го порядка с матрицами вида $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^T + i\Omega_{PQ}\boldsymbol{E}$, где $\Omega_{PQ} = (p_1 - q_1)\omega_1 + \cdots + (p_m - q_m)\omega_m$, $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица порядка l. Очевидно, что $\det \widetilde{\boldsymbol{B}} \neq 0$, поэтому искомые коэффициенты однозначно выражаются через элементы матриц $\boldsymbol{C}^{(s)}$, являясь при этом линейной комбинацией параметров $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$.

Аналогично, коэффициенты формы $V^{(4)}$ можно выбрать таким образом, чтобы

$$\dot{V}^{(4)} = \sum_{p=2}^{m} G_P \boldsymbol{y}^P \overline{\boldsymbol{y}}^P,$$

где коэффициенты G_P представляют собой комбинации различных произведений коэффициентов $k_{PQ}^{(s)}$ на элементы матриц $\boldsymbol{D}^{(s)}$ и, следовательно, они могут быть записаны в виде

$$G_P = \alpha_1 G_P^{(1)} + \cdots + \alpha_m G_P^{(m)} + \alpha_{m+1} G_P^{(m+1)}. \tag{10}$$

Величины $G_P^{(s)}$, $s = \overline{1,m}$, называют коэффициентами устойчивости, они зависят от коэффициентов правых частей системы (6) (и не зависят от множителей α_s) и позволяют применять теоремы Ляпунова или Четаева, т. е. делать заключение об устойчивости (неустойчивости) изучаемого решения. Для этой цели можно использовать теоремы монографии [10], которые дают необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости[1] и достаточные условия неустойчивости. Отметим, что для конкретных механических систем в случае $m > 2$ проверка этих условий достаточно сложна, поскольку коэффициенты правых частей системы (5) обычно зависят от нескольких параметров (распределение масс системы, упругие характеристики и пр.), и задача сводится к решению системы неравенств высокой степени. Поэтому мы ограничимся здесь случаем $m = 2$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть для функции Ляпунова, построенной согласно описанной выше процедуре, имеет место один из следующих случаев:*

А1. $G_{20}^{(1)} < 0,\ G_{02}^{(2)} < 0,\ G_{11}^{(1)} \le 0,\ G_{11}^{(2)} \le 0;$

А2. $G_{20}^{(1)} < 0,\ G_{02}^{(2)} < 0,\ \min\{G_{11}^{(1)}, G_{11}^{(2)}\} \le 0,\ \ \max\{G_{11}^{(1)}, G_{11}^{(2)}\} > 0;$

Б. $G_{20}^{(1)} < 0,\ G_{02}^{(2)} < 0,\ G_{11}^{(1)} > 0,\ G_{11}^{(2)} > 0,\ G_{20}^{(1)} G_{02}^{(2)} > G_{11}^{(1)} G_{11}^{(2)};$

В. $G_{20}^{(1)} > 0$, *или* $G_{02}^{(2)} > 0$, *или* $G_{20}^{(1)} G_{02}^{(2)} < G_{11}^{(1)} G_{11}^{(2)}$ $(G_{11}^{(1)} > 0)$.

Тогда в случаях А, Б тривиальное решение системы (6) асимптотически устойчиво, а в случае В – неустойчиво.

Заметим, что справедливость первой части утверждения следует из результатов работы [11], поскольку при этом отсутствуют нейтральные и неустойчивые лучи. Часть утверждения леммы, касающаяся неустойчивости, доказывается с помощью теоремы Четаева [8] (с двумя функциями). Формальное доказательство довольно громоздкое, поэтому мы отметим только, что оно проводится подобно доказательству теоремы 2.1 из [15].

Рассмотрим также систему

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} &= \boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{X}_1^{(3)}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{X}_2^{(3)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) + \cdots , \\ \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} &= \boldsymbol{\Xi}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\Xi}_1^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) + \cdots . \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь через $\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\Xi}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ обозначены правые части системы (5), $\boldsymbol{X}_1^{(3)}$, $\boldsymbol{X}_2^{(3)}$, $\boldsymbol{\Xi}_1^{(2)}$ – однородные формы указанных переменных, $\boldsymbol{X}_2^{(3)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\Xi}_1^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, многоточием обозначена совокупность слагаемых более высокого порядка.

Пусть, как и ранее, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda z}$ – линейное нормализующее преобразование для критических переменных. Обозначим $\boldsymbol{Z}_1 = (\boldsymbol{Y}_1, \overline{\boldsymbol{Y}}_1)^T = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{X}_1^{(3)}(\boldsymbol{\Lambda z})$, а

[1]За исключением некоторых предельных случаев.

j-ю компоненту вектора $\boldsymbol{Y}_1$ представим в виде

$$\sum_{p+q=3} g^{(j)}_{PQ}\, \boldsymbol{y}^P \bar{\boldsymbol{y}}^Q.$$

Введем в рассмотрение также I_j – m-мерный индекс, компонентами которого являются символы Кронекера δ_{js}. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если коэффициенты, вычисленные для модельной системы (6), таковы, что* $\sum G_P \boldsymbol{y}^P \overline{\boldsymbol{y}}^P$ *является отрицательно определенной формой при некоторых положительных множителях* $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}$,[2] *и форма* $\boldsymbol{X}^{(3)}_1$, *такова, что*

$$Re\ g^{(j)}_{PP-I_j} = 0,\ j = \overline{1, m}, \tag{12}$$

то нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво при любых $\boldsymbol{X}^{(3)}_2$, $\Xi^{(2)}_1$.

Доказательство. Добавим вначале в правую часть системы (5) только $\boldsymbol{X}^{(3)}_1(\boldsymbol{x})$ и выполним построение ФЛ согласно описанной выше процедуре. Очевидно, что сделанное изменение повлияет на вид $V^{(4)}(\boldsymbol{z})$, но не повлияет на $\widetilde{V}^{(2)}_s(\boldsymbol{z})$. Учитывая также условия (12), можно видеть, что выражения для G_P не изменятся. Изменится совокупность слагаемых четвертого порядка в самой функции (обозначим новую форму четвертого порядка через $\widetilde{V}^{(4)}$) и слагаемые порядка малости выше четвертого в $\dot{V}$. Однако это не изменит знакоопределенности $V(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi})$ и ее производной, поэтому условия теоремы Ляпунова по-прежнему будут соблюдены.

Возьмем теперь ФЛ в виде (7) с $V^{(4)}$, замененной на $\widetilde{V}^{(4)}$, и найдем полную производную по времени в силу системы (11)

$$\dot{V} = \dot{V}_0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) + \langle \mathtt{grad} V^{(2)}_0(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{Z}^{(3)}_2(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi})\rangle + \langle \mathtt{grad} V^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), \Xi^{(2)}_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi})\rangle +$$

$$+\langle \mathtt{grad}_{\boldsymbol{\xi}} V^{(3)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}), \Xi^{(2)}_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi})\rangle + \ldots, \quad \dot{V}_0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) = -\alpha_3 U^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{p=2} G_P y^P \bar{y}^P. \tag{13}$$

Второе и четвертое слагаемые в правой части $\dot{V}$ из (13) содержат критические переменные $\boldsymbol{z}$ в третьей степени, некритические $\boldsymbol{\xi}$ – в первой степени и, как следствие, имеют более высокий порядок малости, чем $\dot{V}_0$. Третье слагаемое содержит критические переменные $\boldsymbol{z}$ в первой степени, некритические $\boldsymbol{\xi}$ – во второй и имеют более высокий порядок малости, чем $U^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$, а значит, и $\dot{V}_0$. Следовательно, $\dot{V}$ является отрицательно определенной функцией относительно переменных $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}$. □

[2] В частности, если выполнены условия А, Б леммы.

3. Построение функции Ляпунова для изучаемой системы. Воспользуемся результатами предыдущего пункта для построения функции Ляпунова. Удостоверимся вначале, что $\omega_1 \neq \omega_2$. В самом деле,

$$b^2-4ac=[m_2+m_3\xi_0^2-l_1(m_3\xi_0+m_2)]^2+12m_2m_3\xi_0(m_2+m_3\xi_0)+4(m_3^3\xi_0^3+m_3^3)>0.$$

Заметим, что для произвольной конфигурации рассматриваемой механической системы формулы преобразования довольно объемные, поэтому мы ограничимся случаем одинаковых звеньев, т. е. $l_1 = l_2 = l,\ m_1 = m_2 = m$, кроме того, положим $m_3 = m/2,\ \xi^0 = 1/2$.

С целью привести уравнения (1) к виду (5) воспользуемся переменными Гамильтона. Введем обычным образом [16] обобщенные импульсы

$$p_1=\frac{5}{2}\dot\varphi_1+\dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{2}\xi\dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\frac{1}{2}\dot\xi\sin(\varphi_1-\varphi_2),$$

$$p_2=\dot\varphi_2+\frac{1}{2}\xi^2\dot\varphi_2+\dot\varphi_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{2}\xi\dot\varphi_1\cos(\varphi_1-\varphi_2),$$

$$p_3=\frac{1}{2}\dot\xi-\frac{1}{2}\dot\varphi_1\sin(\varphi_1-\varphi_2).$$

Функция Гамильтона имеет вид $H = H^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)} + \ldots,$ где

$$H^{(2)}=\frac{9}{20}p_1^2-p_1p_2+p_2^2+p_3^2+\frac{5}{4}\varphi_1^2+\frac{5}{8}\varphi_2^2+\frac{1}{2}k\xi^2,$$

$$H^{(3)}=\frac{1}{5}p_1^2\xi-\frac{2}{5}p_1\xi p_2+\frac{9}{10}\varphi_1p_1p_3-\frac{9}{10}\varphi_2p_1p_3-\varphi_1p_2p_3+\varphi_2p_2p_3+\frac{1}{4}\varphi_2^2\xi,$$

$$H^{(4)}=-\frac{9}{25}\varphi_1^2p_1^2+\frac{18}{25}\varphi_1\varphi_2p_1^2-\frac{4}{25}p_1^2\xi^2-\frac{9}{25}\varphi_2^2p_1^2+\frac{13}{10}\varphi_1^2p_1p_2-\frac{13}{5}\varphi_1\varphi_2p_1p_2+$$
$$+\frac{4}{5}p_1p_2\xi^2+\frac{13}{10}\varphi_2^2p_1p_2+\frac{2}{5}\varphi_1\xi p_1p_3-\varphi_1^2p_2^2+2\varphi_1\varphi_2p_2^2-\frac{4}{5}p_2^2\xi^2-\varphi_2^2p_2^2-$$
$$-\frac{2}{5}\varphi_1\xi p_2p_3+\frac{2}{5}\varphi_2\xi p_2p_3+\frac{9}{20}\varphi_1^2p_3^2-\frac{9}{10}\varphi_1\varphi_2p_3^2+\frac{9}{20}\varphi_2^2p_3^2-\frac{5}{48}\varphi_1^4-\frac{5}{96}\varphi_2^4.$$

Получаем систему вида (5) при

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{9}{10}&-1\\0&0&-1&2\\-\frac{5}{2}&0&0&0\\0&-\frac{5}{4}&0&0\end{pmatrix},\ \widetilde{\boldsymbol{C}}^{(1)}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\\0&0&-\frac{2}{5}&0\\0&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&-\frac{9}{10}&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&-\frac{9}{10}&1\\0&0&\frac{9}{10}&-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\p_1\\p_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}\xi\\p_3\end{pmatrix},$$

$$\xi_1' = 2\xi_2 - \frac{9}{10}p_1\varphi_2 + \frac{9}{10}p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 - p_2\varphi_1,$$

$$\xi_2' = -k\xi_1 - \frac{1}{5}p_1^2 + \frac{2}{5}p_1p_2 - \frac{1}{4}\varphi_2^2 - h(2\xi_2 - \frac{9}{10}p_1\varphi_2 + \frac{9}{10}p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 - p_2\varphi_1).$$

Учитывая, что $\omega_1 = \sqrt{38 - 2\sqrt{201}}/4$, $\omega_2 = \sqrt{38 + 2\sqrt{201}}/4$, вычисляем матрицу преобразования

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.3177 & -1.5177 & 1.3177 & -1.5177 \\ 3.2199i & 1.2276i & -3.2199i & -1.2276i \\ 2.1215i & -0.9316i & -2.1215i & 0.9316i \end{pmatrix}.$$

Выполним преобразование $\boldsymbol{x} = \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{y}$. Система (6) запишется в виде

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{J}_1\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}^{(1)}\xi_1\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}^{(2)}\xi_2\boldsymbol{y},$$

$$\overline{\boldsymbol{y}}' = \overline{\boldsymbol{J}}_1\overline{\boldsymbol{y}} + \overline{\boldsymbol{C}}^{(1)}\xi_1\overline{\boldsymbol{y}} + \overline{\boldsymbol{C}}^{(2)}\xi_2\overline{\boldsymbol{y}}, \tag{14}$$

$$\xi_1' = 2\xi_2 + 2.6019i(y_1\bar{y}_2 - y_2\bar{y}_1) - 1.3077i(\bar{y}_1\bar{y}_2 - y_1y_2) - 0.2467i(y_1^2 - \bar{y}_1^2) + 5.1273i(y_2^2 - \bar{y}_2^2),$$

$$\xi_2' = -k\xi_1 - h\xi_2 - 0.7393(y_1\bar{y}_2 + y_2\bar{y}_1) + 2.7393(\bar{y}_1\bar{y}_2 + y_1y_2) + 0.183(\bar{y}_2^2 + y_2^2) -$$
$$-1.093(y_1^2 + \bar{y}_1^2) + 0.4495y_1\bar{y}_1 - 2.6695y_2\bar{y}_2,$$

где $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{J}_1 = \mathrm{diag}(i\omega_1, i\omega_2)$. Матрицы $\boldsymbol{C}^{(1)}$, $\boldsymbol{C}^{(2)}$ – прямоугольные матрицы 4×2, состоящие из 1 и 2 строк матриц $\mathbf{\Lambda}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{C}}^{(1)}\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{\Lambda}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{C}}^{(2)}\mathbf{\Lambda}$ соответственно.

Определим квадратичную форму $V^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) = (\xi_1^2 + 2k_1\xi_1\xi_2 + k_2\xi_2^2)/2$, где $k_1 > 0, k_2 > 0, k_2 > k_1^2$. Подберем коэффициенты k_1, k_2 таким образом, чтобы производная от $V^{(2)}$ в силу линейной части системы (14) была отрицательно определенной. Имеем

$$\dot{V}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) = -kk_1\xi_1^2 + (2 - hk_1 - kk_2)\xi_1\xi_2 + (2k_1 - hk_2)\xi_2^2.$$

Положим $k_2 = (2 - k_1h)/k$. Тогда при выборе произвольного достаточно малого значения для k_1 получаем отрицательно определенную квадратичную форму $\dot{V}^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$.

С учетом вышеизложенного материала запишем ФЛ в виде

$$V(\boldsymbol{y}, \overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{\xi}) = \alpha_1y_1\bar{y}_1 + \alpha_2y_2\bar{y}_2 + \alpha_3V^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \xi_1(k_{200}^{(1)}y_1^2 + k_{110}^{(1)}y_1y_2 + k_{101}^{(1)}y_1\bar{y}_1 + k_{020}^{(1)}y_2^2 +$$
$$+ k_{011}^{(1)}y_2\bar{y}_1 + k_{010}^{(1)}y_2\bar{y}_2 + \bar{k}_{200}^{(1)}\bar{y}_1^2 + \bar{k}_{110}^{(1)}\bar{y}_1\bar{y}_2 + \bar{k}_{020}^{(1)}\bar{y}_2^2 + \bar{k}_{011}^{(1)}y_1\bar{y}_2) + \xi_2(k_{200}^{(2)}y_1^2 + k_{110}^{(2)}y_1y_2 +$$
$$+ k_{101}^{(2)}y_1\bar{y}_1 + k_{020}^{(2)}y_2^2 + k_{011}^{(2)}y_2\bar{y}_1 + k_{010}^{(2)}y_2\bar{y}_2 + \bar{k}_{200}^{(2)}\bar{y}_1^2 + \bar{k}_{110}^{(2)}\bar{y}_1\bar{y}_2 + \bar{k}_{020}^{(2)}\bar{y}_2^2 + \bar{k}_{011}^{(2)}y_1\bar{y}_2),$$

где $\alpha_j, (j = 1, 2, 3)$ – некоторые вещественные, а $k_{npq}^{(1)}$, $k_{npq}^{(2)}$ – комплексные постоянные.

Выражения для констант G_{np} примут вид

$$G_{20} = \mathrm{Re}[k^{(2)}_{200}(-2.186 - 0.4934ih) + 0.899k^{(2)}_{101} + 0.4934i(k^{(1)}_{200} - \bar{k}^{(1)}_{200})+$$

$$+\bar{k}^{(2)}_{200}(-2.186 + 0.4934ih)],\ G_{02} = \mathrm{Re}[-10.2546i(k^{(1)}_{020} - \bar{k}^{(1)}_{020} + \bar{k}^{(2)}_{020}h)-$$

$$-5.339k^{(2)}_{010} + k^{(2)}_{020}(0.366 + 10.25466ih)],\ G_{11} = \mathrm{Re}[-0.7393(\bar{k}^{(2)}_{011} + k^{(2)}_{011})+$$

$$+2.7393(\bar{k}^{(2)}_{110} + k^{(2)}_{110}) - 2.6695k^{(2)}_{101} - 2.6019i(\bar{k}^{(1)}_{011} - k^{(1)}_{011} - h\bar{k}^{(2)}_{011} + hk^{(2)}_{011})-$$

$$-1.3077i(k^{(1)}_{110} - \bar{k}^{(1)}_{110} - hk^{(2)}_{110} + h\bar{k}^{(2)}_{110}) + 0.4495k^{(2)}_{010}].$$

Постоянные $k^{(1)}_{\text{npq}}$, $k^{(2)}_{\text{npq}}$ определяются из условия $V'^{(3)}(\xi_1, \xi_2) = 0$. Имеем

$$k^{(1)}_{200} = -\frac{\alpha_1(1.6191k - 0.2002k^2 + 1.4634ikh - 1.6609 - 2.7553h^2)}{23.5476h^2 + 9.7656k^2 - 23.5476k + 14.1949},$$

$$k^{(2)}_{200} = \frac{-4.6829\alpha_1(-37.6762i + 31.25ik - 48.5259h)}{2354.7623h^2 + 976.5625k^2 - 2354.7623k + 1419.4958},$$

$$k^{(1)}_{110} = \frac{\alpha_1(0.0187ikh - 0.1601h^2 - 0.3167 + 0.1338k - 0.0136k^2)}{1.9781h^2 + 0.25k^2 - 1.9781k + 3.9128}+$$

$$+\frac{\alpha_2(0.0426ihk + 0.3047k - 0.0309k^2 - 0.3646h^2 - 0.7212}{1.9781h^2 + 0.25k^2 - 1.9781k + 3.9128},\ k^{(2)}_{101} = 0,$$

$$k^{(2)}_{110} = \frac{\alpha_1(1.8702ik - 5.2605h - 7.3986i) + \alpha_2(4.2588ik - 11.9796h - 16.8486i)}{197.8069h^2 + 25k^2 - 197.8069k + 391.2759},$$

$$k^{(1)}_{020} = -\frac{\alpha_2(-204.7698k + 29.252 + 24.2626k^2 + 97.0881ikh + 7.0535h^2)}{414.7181h^2 + 25k^2 - 414.7181k + 1719.9109},$$

$$k^{(2)}_{020} = -\frac{\alpha_2[i(0.9709k - 8.0528) - 3.9543h]}{4.1472h^2 + 0.25k^2 - 4.1472k + 17.1991},$$

$$k^{(1)}_{011} = -\frac{\alpha_1(1.8702ihk + 2.7033k^2 - 3.1138k + 0.7683 + 1.9356h^2)}{39.6931h^2 + 25k^2 - 39.6931k + 15.7554}-$$

$$-\frac{\alpha_2(7.0911k - 6.1561k^2 - 1.7496 - 4.2588ihk - 4.4079h^2)}{39.6931h^2 + 25k^2 - 39.6931k + 15.7554},\ k^{(2)}_{010} = 0,$$

$$k^{(2)}_{011} = -\frac{\alpha_1(1.8702ik - 1.4846i - 2.3565h) + \alpha_2(3.3809i - 4.2588ik + 5.3664h)}{39.6931h^2 + 25k^2 - 39.6931k + 15.7554}.$$

С учетом этого выражения для G_{np} перепишутся в виде

$$G_{20} = -\frac{0.3480\alpha_1 h}{h^2 + 0.4147k^2 - k + 0.6028},\ G_{11} = G_{10} + G_{01},$$

$$G_{10} = \alpha_1 h(\frac{0.1069}{h^2 + 0.6298k^2 - k + 0.3969} - \frac{0.0479}{h^2 + 0.1264k^2 - k + 1.9781}),$$

$$G_{01} = -\alpha_2 h\left(\frac{0.1090}{h^2 + 0.1264k^2 - k + 1.9781} + \frac{0.2433}{h^2 + 0.6298k^2 - k + 0.3969}\right),$$

$$G_{02} = -\frac{39.1257\alpha_2 h}{h^2 + 0.0603k^2 - k + 4.1472}.$$

Нетрудно убедиться, что все знаменатели в этих выражениях положительны. Таким образом, $G_{20} < 0$, $G_{01} < 0$, $G_{02} < 0$ при любых значениях k и h, а G_{10} может менять знак. Следовательно, найденные выражения для констант G удовлетворяют пункту А леммы.

Покажем, что выполнены условия теоремы. Для этого необходимо проверить выполнимость условия (12). Используя выражение для $H^{(4)}$, запишем вектор-функцию $\boldsymbol{X}_1^{(3)}$, компоненты которой суть формы третьего порядка от критических переменных

$$\boldsymbol{X}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{25}\varphi_1^2 p_1 + \frac{36}{25}\varphi_1\varphi_2 p_1 - \frac{18}{25}\varphi_2^2 p_1 + \frac{13}{10}\varphi_1^2 p_2 - \frac{13}{5}\varphi_1\varphi_2 p_2 + \frac{13}{10}\varphi_2^2 p_2 \\ \frac{13}{10}\varphi_1^2 p_1 - \frac{13}{5}\varphi_1\varphi_2 p_1 - 2\varphi_1^2 p_2 + \frac{13}{10}\varphi_2^2 p_1 - 2\varphi_2^2 p_2 + 4\varphi_1\varphi_2 p_2 \\ \frac{18}{25}\varphi_1 p_1^2 - \frac{18}{25}\varphi_2 p_1^2 + \frac{5}{12}\varphi_1^3 - \frac{13}{5}\varphi_1 p_1 p_2 + \frac{13}{5}\varphi_2 p_1 p_2 + 2\varphi_1 p_2^2 - 2\varphi_2 p_2^2 \\ -\frac{18}{25}\varphi_1 p_1^2 + \frac{18}{25}\varphi_2 p_1^2 + \frac{13}{5}\varphi_1 p_1 p_2 - \frac{13}{5}\varphi_2 p_1 p_2 + \frac{5}{24}\varphi_2^3 + 2\varphi_2 p_2^2 - 2\varphi_1 p_2^2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая преобразование $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda y}$, получаем $g_{2010}^{(1)} = -0.2388i$, $g_{1101}^{(1)} = 0.6433i$, $g_{1101}^{(2)} = 1.4650i$, $g_{0201}^{(2)} = -14.7693i$.

Таким образом, условия теоремы выполнены. Следовательно, решение (2) рассматриваемой механической системы асимптотически устойчиво.

Заключение. В данной статье рассмотрена задача о влиянии демпфера пассивного типа на устойчивость нижнего положения равновесия двойного маятника. Демпфер моделируется посредством массы, присоединенной к одному из звеньев маятника с помощью вязкоупругого шарнира. Для решения задачи использован "прямой" подход при построении функции Ляпунова в критическом случае двух пар чисто мнимых корней. Показано, что введение демпфера в систему делает нижнее положение равновесия асимптотически устойчивым.

1. *Chinnery A.E., Hall C.D.* Motion of a Rigid Body with an Attached Spring-Mass Damper // J. of Guidance, Control, and Dynamics. – 1995. – **18**, No. 6. – P. 1404–1409.
2. *Liu K., Liu J.* The damped dynamic vibration absorbers: revisited and new result // J. of Sound and Vibration. – 2005. – **284**. – P. 1181–1189.
3. *Peiffer K., Savchenko A.Ya.* On Passive Stabilization in Critical Cases // J. Math. Anal. Appl. – 2000. – **244**. – P. 106–119.
4. *He C., Liu G., Yang L., Tian Y.* On the passive stabilization of the equilibrium state of Lagrangian systems // Acta Mechanica. – 1999. – **134**, No. 1. – P. 17–26.
5. *Viet L.D., Anh N.D., Matsuhisa H.* The effective damping approach to design a dynamic vibration absorber using Coriolis force // J. of Sound and Vibration. – 2011. – **330**. – P. 1904–1916.

6. *Савченко А.Я., Позднякович А.Е.* Пассивная стабилизация малых колебаний физического маятника относительно наклонной оси // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 97–100.
7. *Савченко А.Я., Позднякович А.Е., Пузырев В.Е.* Пассивная стабилизация положения равновесия двузвенного маятника с упругими связями // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 104–113.
8. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. – М.: Наука, 1990. – 176 с.
9. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
10. *Каменков Г. В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. – М.: Наука, 1972. – 214 с.
11. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, № 1. – С. 24–27.
12. *Плисс В.А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения. // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – **28**, вып. 6. – С. 1297–1324.
13. *Веретенников В.Г.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
14. *Грушковская В. В., Зуев А. Л.* Асимптотическое поведение решений системы с критическими переменными в случае двух пар чисто мнимых корней. // Динамические системы. – 2011. – **1(29)**, вып. 2. – С. 207–218.
15. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
16. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике (2-е изд.). – М.: Наука, 1966. – 300 с.

V.E. Puzyrev, N.V. Savchenko

Asymptotic stability of equilibrium of the double pendulum with the mass attached

We consider the stability problem of the equilibrium of the double pendulum with the mass attached. The linear approximation cannot give a solution, because the critical case of purely imaginary roots holds. Therefore, Lyapunov's direct method is applied. Lyapunov function is constructed accordingly the approach introduced by A.Ya. Savchenko, and slightly modified due to special features of the problem. It is proved, that due to the mass influence the equilibrium of the pendulum becomes asymptotically stable.

Keywords: *damper of passive type, asymptotic stability, Lyapunov function, the critical case.*

В.Є. Пузирьов, Н.В. Савченко

Асимптотична стійкість стану рівноваги подвійного маятника з доданою масою

Розглянуто задачу про вплив приєднаної маси на стійкість нижнього стану рівноваги подвійного маятника. Розгляд лінійного наближення не дозволяє розв'язати задачу, оскільки має місце критичний випадок суто уявних коренів, внаслідок чого для дослідження застосовано прямий метод Ляпунова. Функція Ляпунова будується згідно з методикою О.Я. Савченка, дещо модифікованою з урахуванням особливостей задачі. Встановлено, що додання маси робить стан рівноваги маятника асимптотично стійким.

Ключові слова: *демпфер пасивного типу, асимптотична стійкість, функція Ляпунова, критичний випадок.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
nina_savchenko@hotmail.com

Получено 25.02.14