УДК 517.91

©2014. **В.Н. Неспирный**

ПРОДОЛЖИМОСТЬ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, определенных на полном фазовом пространстве R^n, получены достаточные условия бесконечной продолжимости, а также непродолжимости решений в окрестности положения равновесия. Эти условия выражаются в терминах некоторых вспомогательных знакоопределенных функций, аналогичных функциям Ляпунова.

Ключевые слова: *продолжимость решений, автономные системы, устойчивость.*

Введение. При исследовании вопросов существования решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в большинстве случаев речь идет о некоторой ограниченной области определения системы. Классические теоремы гарантируют существование некоторого интервала времени, на котором решение может быть корректно определено. Размер этого интервала зависит от диаметра области определения и константы, ограничивающей правые части уравнений системы. Однако в ряде задач есть необходимость работать с системами заданными на неограниченном пространстве (например, совпадающем со всем R^n). Непрерывность правых частей в этом случае не гарантирует их ограниченности. Очевидно, что теоремы существования (примененные для ограниченной области, включающей в себя начальную точку) и в этом случае будут обеспечивать возможность построения решения на определенном интервале времени. Из точки, в которую попадает решение на конце этого интервала, оно может быть продолжено дальше на какой-то интервал времени и т. д. Но возникает вопрос о том, может ли решение быть продолжено на бесконечный интервал времени.

К задачам, в которых важен вопрос максимального интервала существования решения, относятся, в частности, задачи устойчивости и особенно частичной устойчивости. Наличие неустойчивых переменных, уходящих на бесконечность за конечное время, может привести к изменению качественных характеристик других переменных. Так, например, другие неустойчивые переменные могут оказаться устойчивыми за счет сокращения интервала существования, равно как и переменные, которые при бесконечном интервале могли бы быть асимптотически устойчивыми. Таким образом, анализ устойчивости систем дифференциальных уравнений по всем или по части переменных невозможен без исследования продолжимости решений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $t \in R$, $f : R^n \to R^n$ – непрерывная функция, $f(0) = 0$. Пусть $x(t; x_0)$ – решение системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0$. Существуют две возможности:

- либо решение может быть продолжено для всех положительных значений t, в таком случае говорим, что решение $x(t; x_0)$ неограничено продолжаемо;
- либо существует такой момент времени $T > 0$, что $||x(t)|| \to +\infty$ при $t \to T$, и тогда говорим, что решение $x(t; x_0)$ имеет конечное время определения.

Зададимся целью установить, существует ли такое $\delta > 0$, что для любого x_0 из окрестности нуля радиуса δ решение $x(t; x_0)$ определено при всех $t \in [0, +\infty)$.

Будем предполагать, что для некоторой окрестности начала координат выполнены некоторые условия, обеспечивающие существование и единственность решения по крайней мере на конечном интервале времени (например, условия теоремы Пикара или теоремы Коши–Липшица). В противном случае наша задача будет гарантированно иметь отрицательный ответ.

Отметим, что в работе рассматривается локальное поведение системы в окрестности начала координат. Это связано с нацеленностью применения результатов к задачам теории устойчивости, где изучается поведение траекторий, исходящих из точек, близких к точке равновесия.

2. Критерии продолжимости. Одним из достаточных условий бесконечной продолжимости решений является ограниченность траекторий или устойчивость начала координат по Лагранжу [1].

Н.П. Еругиным [2] было установлено, что из теоремы Пикара при выполнении условия Липшица по фазовым переменным равномерно на всем фазовом пространстве (т. е. с одной и той же постоянной Липшица) следует существование решения на бесконечном интервале времени. Несмотря на то, что это довольно сильное ограничение, существуют важные классы функций, которые удовлетворяют ему. В частности, сюда относятся линейные уравнения с правой частью вида $f(x) = Ax$, где A – постоянная квадратная матрица порядка n; уравнения, правые части которых имеют вид $f_j(x) = Q_j(\sin x_i, \cos x_i)$, где Q_j – полиномы от своих аргументов; уравнения, имеющие правую часть с ограниченными частными производными по фазовым переменным.

А. Винтнер [3] предложил еще один критерий продолжимости решений, который, однако, не гарантирует единственности: для того, чтобы все решения при любых начальных данных были бесконечно продолжимы, достаточно потребовать существования такой верхней оценки для нормы правой части $||f(x)|| \leqslant L(||x||)$, выполняющейся на всем фазовом пространстве, что интеграл $\int\limits_{||x_0||}^{+\infty} \frac{dr}{L(r)}$ расходится.

Более общие результаты по продолжимости, предложенные Ж. Ла-Саллем, связаны с поиском положительных решений некоторых дифференциальных неравенств совместно с исходной системой [4]. Ряд достаточных условий продолжимости решений для систем управления был получен А.Ф. Филипповым [5].

3. Исследование продолжимости с помощью функций типа Ляпунова. Следующая теорема представляет собой достаточно удобное средство для проверки продолжимости решений, исходящих из начала координат. Ее условия выражаются в терминах дополнительных функций, аналогичных тем, что используются во втором методе Ляпунова для исследования устойчивости.

Теорема. Пусть задана система (1) с непрерывной правой частью и существует непрерывно дифференцируемая знакоопределенная функция $V(x),\ x \in R^n$, удовлетворяющая условию $V(x) \to +\infty$ при $||x|| \to +\infty$. Тогда

1. Если существуют такие значения $A > 0$ и $C > 0$, что для любого x такого, что $V(x) \geqslant A$, выполняется неравенство
$$\dot{V}(x) \leqslant CV(x), \tag{2}$$
то для любого такого x_0 решение системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ существует (хотя возможно и не единственно), и любое решение с таким начальным условием бесконечно продолжимо.

2. Если для любого $A > 0$ существуют $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ и неограниченное инвариантное множество M, для которого начало координат является предельной точкой, такие, что для любого $x \in M$ такого, что $V(x) \geqslant A$, выполняется неравенство
$$\dot{V}(x) \geqslant CV(x)^{1+\varepsilon}, \tag{3}$$
то решение системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0$, $x_0 \in M$, существует, и любое решение с таким начальным условием имеет конечное время определения.

Доказательство. Пусть выполнены условия первого пункта теоремы. Возьмем произвольную точку x_0 и рассмотрим решение $x(t; x_0)$, исходящее из этой точки. Оценим значения функции V на траектории, определяемой этим решением. Из неравенства (2) следует, что
$$V(x(t; x_0)) \leqslant V(x_0)e^{Ct}. \tag{4}$$
Предположим, что решение $x(t; x_0)$ имеет конечное время определения T. Тогда по определению $||x(t; x_0)|| \to \infty$ при $t \to T$, и следовательно, $V(x(t; x_0)) \to +\infty$ по условию теоремы. Но правая часть неравенства (4) определена и ограничена при любом конечном значении t, в том числе и при

всех t, близких к T, что делает невозможным неограниченный рост левой части. Полученное противоречие доказывает, что предположение о конечном времени определения неверно, и решение $x(t; x_0)$ бесконечно продолжимо.

Перейдем ко второму пункту теоремы. Снова выберем произвольную точку $x_0 \in M \cap \{V(x) \geqslant A\}$ и решение $x(t; x_0)$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Так как множество M инвариантно, то $x(t; x_0) \in M$ при любом значении t, и, следовательно, вдоль этого решения сохраняется неравенство (3). Проинтегрировав неравенство (3), получим оценку

$$V(x(t; x_0)) \geqslant \left(V(x_0)^{-\varepsilon} - \varepsilon C t\right)^{-1/\varepsilon}. \tag{5}$$

Обозначим $T(x_0) = (C\varepsilon V(x_0)^{\varepsilon})^{-1}$. Так как $V(x_0) \geqslant A$ согласно выбору x_0, величина $T(x_0)$ корректно определена. При $t = T(x_0)$ правая часть неравенства (5) неопределена, а при стремлении t к значению $T(x_0)$ – неограниченно возрастает. Но тогда и левая часть должна неограниченно возрастать, откуда следует, что время определения решения $x(t; x_0)$ не превышает $T(x_0)$. □

***Замечание* 1.** Указанное в пункте 2 инвариантное множество M может состоять как из одной траектории, так и совпадать со всем фазовым пространством. Функцию $V(x)$ в большинстве случаев можно выбрать в виде квадратичной формы, но это не является обязательным требованием.

***Замечание* 2.** Следует отметить, что теорема дает лишь достаточные условия продолжимости и непродолжимости. Существуют примеры, для которых ни условиям пункта 1, ни пункта 2 не удается удовлетворить.

4. Примеры. Продемонстрируем применение полученной теоремы на примерах.

Пример 1. Пусть задана двумерная система

$$\dot{x} = -x(1 - y^2), \quad \dot{y} = y. \tag{6}$$

Возьмем вспомогательную функцию $V(x, y) = x^{-2}e^{y^2}$. Ее производная в силу системы удовлетворяет соотношению $\dot{V}(x, y) = 2V(x, y)$. Таким образом, условие 1 теоремы выполняется с любым значением $A > 0$ и значением $C = 2$. Следовательно, любое решение системы (6) при начальных условиях, для которых определена функция $V(x, y)$, существует и является бесконечно продолжимым.

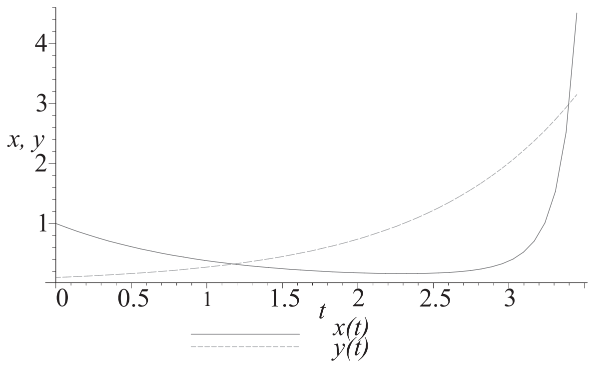

Рис. 1. Решение системы (6) *с начальными условиями* $x(0) = 1$, $y(0) = 0.1$.

Для доказательства того, что продолжимы и решения с начальными условиями на оси Oy, достаточно рассмотреть функцию $V(x, y) = y^2$ на инвариантном множестве $M = \{(x, y) \mid x = 0\}$.

Таким образом, все решения системы (6) неограниченно продолжаемы (рис. 1).

Пример 2. Рассмотрим пример Арцтейна [6]

$$\dot{x} = x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 2xy. \tag{7}$$

Траекториями этой системы являются окружности с центром на оси Oy, проходящие через точку $(0,0)$. При этом начало координат является притягивающей для таких траекторий как в прямом, так и в обратном времени. Однако траектории, начинающиеся на оси Ox, вырождаются в лучи.

Выберем функцию V в виде $V(x,y) = x^2 + y^2$. Ее производная в силу системы определяется выражением $\dot{V}(x,y) = 2x(x^2 + y^2)$. Множество $M = \{(x,y) \mid x > 0,\ y = 0\}$, определяющее положительную полуось Ox, инвариантно. Точка $(0,0)$ является предельной для него. Для любого $A > 0$ соотношение (3) выполняется на множестве $M \cap \{V(x) \geqslant A\}$ со значениями $\varepsilon = 1/2$ и $C = 2$. Согласно условию 2 теоремы, решения системы (7) с начальными условиями на положительной полуоси Ox существуют лишь на конечном промежутке. Нетрудно убедиться, что решение, удовлетворяющее условиям $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = 0$, не определено при значениях $t \geqslant 1/x_0$.

Таким образом, у системы (7) есть инвариантное множество, на котором решения имеют конечное время определения.

Пример 3. Пусть задано уравнение

$$\dot{x} = \begin{cases} x \ln|x| & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Решения обладают свойством бесконечной продолжимости, что может быть доказано по критерию Винтнера с $L(x) = |x| \ln|x|$. Непосредственно применить теорему к уравнению (8) не удается, требуется более глубокий анализ. Система имеет три положения равновесия: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво, что легко проверяется с помощью функции Ляпунова $V(x) = x^2$, а областью притяжения к нему является интервал $(-1;1)$. В соответствии с замечанием 1, все решения на этом интервале обладают свойством бесконечной продолжимости. Две другие точки равновесия являются неустойчивыми. Для анализа продолжимости решений на интервале $(1;+\infty)$, выполним замену переменной, полагая $y = \ln x$. Положению равновесия $x = 1$ уравнения (8) будет соответствовать точка $y = 0$, а само уравнение примет вид

$$\dot{y} = y. \tag{9}$$

Полученное уравнение, очевидно, удовлетворяет пункту 1 теоремы с функцией $V(y) = y^2$. Это позволяет нам утверждать, что все решения на интервале $(0;+\infty)$ бесконечно продолжимы. Замена $y = \ln(-x)$ на интервале $(-\infty,-1)$ приводит к тому же уравнению (9), что доказывает продолжимость решений и на отрицательной полуоси. Таким образом, все решения уравнения (8) являются бесконечно продолжимыми.

5. Частичная устойчивость непродолжимых решений. Если нулевое решение системы (1) устойчиво, то для нее существует функция Ляпунова, которая очевидно удовлетворяет пункту 1 теоремы с $C = 0$. Поэтому все решения, начинающиеся в окрестности начала координат, будут бесконечно продолжимыми. Соответственно, если в любой достаточно малой окрестности существует решение с конечным временем определения, нулевое решение будет обязательно неустойчивым по полному набору переменных. Тем не менее, как упоминалось во введении, конечное время определения может существенно влиять на свойство устойчивости решений по части переменных. Проиллюстрируем это утверждение на примерах. Здесь устойчивость, асимптотическую устойчивость и частичную устойчивость будем понимать в смысле определений, данных в монографии [7], где требуется выполнение необходимых неравенств лишь на интервалах существования решения.

Пример 4. Пусть задана система уравнений

$$\dot{x} = x^3 + y^2, \quad \dot{y} = y. \qquad (10)$$

Система обладает нулевым решением $x = y = 0$. Из второго уравнения следует, что переменная y экспоненциально возрастает с течением времени. Однако, согласно теореме о непрерывной зависимости от начальных данных, на любом конечном интервале и для любого ε может быть указана окрестность, для начальных условий из которой переменная y на всем интервале не будет превышать ε по модулю. В силу первого уравнения все решения системы, за исключением нулевого положения равновесия, имеют лишь конечное время определения. Следовательно, нулевое решение данной системы устойчиво по отношению к переменной y.

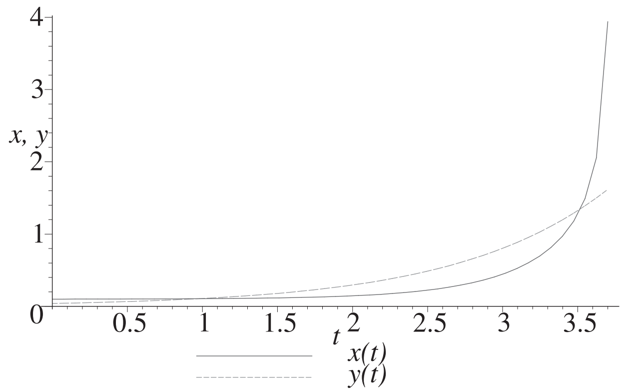

Рис. 2. Решение системы (10) *с начальными условиями* $x(0) = 0.1$, $y(0) = 0.04$.

На рис. 2 показаны графики изменения координат решения системы (10) с начальными условиями $x(0) = 0.1$, $y(0) = 0.04$. Решение с такими начальными условиями имеет время определения, примерно равное 3.73. Координата y за это время достигает значения, примерно равного 1.67. За счет выбора ограничений на начальные условия, максимальное значение y может быть сделано сколько угодно малым.

Пример 5. Пусть имеется система

$$\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y. \qquad (11)$$

Если бы система состояла лишь из второго уравнения, то все ее решения были бы бесконечно продолжимыми, а нулевое решение асимптотически устойчивым. Однако первое уравнение ограничивает время существования решений, делая его конечным при начальных условиях (x_0, y_0), где $x_0 \neq 0$. Устойчивость по переменной y, разумеется, сохранится при ограничении времени, но асимптотическое притяжение к нулю координаты y уже не будет иметь места. Таким образом, имеем устойчивость (но не асимптотическую) нулевого решения системы по переменной y.

Пример 6. Рассмотрим пример

$$\dot{x} = -x(1+y^2), \quad \dot{y} = y^2. \quad (12)$$

Общее решение системы (12) имеет вид $y(t) = (y_0^{-1} - t)^{-1}$, $x(t) = x_0 e^{y_0 - t - (y_0^{-1} - t)^{-1}}$. При начальном условии $y_0 > 0$ решение системы определено на конечном интервале времени $[0, y_0^{-1})$. При этом переменная x стремится к нулю при стремлении t к y_0^{-1}. В случае, когда $y_0 \leqslant 0$, решение – бесконечно продолжимо, но при $t \to +\infty$ значение x, убывая по модулю, так же стремится к нулю. Таким образом, переменную x следует считать асимптотически устойчивой.

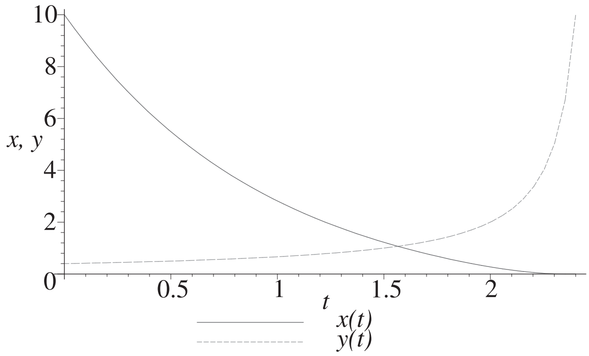

Рис. 3. Решение системы (12) *с начальными условиями* $x(0) = 10$, $y(0) = 0.4$.

Характер поведения координат решений системы (12) при $y_0 > 0$ показан на рис. 3.

Заключение. Получена теорема, устанавливающая достаточные условия бесконечной продолжимости решений автономных систем в терминах функций Ляпунова, и условия, при которых решения имеют конечное время определения. Рассмотрены иллюстративные примеры применения данной теоремы. Показано влияние конечного времени определения на свойства устойчивости по части переменных при наличии непродолжимых решений, исходящих из окрестности начала координат.

1. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 448 с.
2. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.
3. *Wintner A.* The nonlocal existence problem of ordinary differential equations // Amer. J. Math. – 1945. – **67**. – P. 277–284; **68**. – 1946. – P. 173-178.
4. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1965. – 168 с.
5. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Математика и механика. – 1959. – № 2. – С. 25-32.
6. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // J. Nonlinear Anal. – 1983. – **7 (11)**. – P. 1163-1173.
7. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 302 с.

V.N. Nespirnyy

Extendability of solutions of ordinary differential equations in stability problems

For autonomous systems of ordinary differential equations well-defined on R^n, sufficient conditions of infinite extendability and non-extendability of solutions in a neighborhood of equilibrium state are obtained. These conditions are expressed in the terms of some auxiliary sing-definite functions like Lyapunov functions.

Keywords: *extendability of solutions, autonomous systems, stability.*

В.М. Неспірний

Продовжуваність розв'язків у задачах стійкості звичайних диференціальних рівнянь

Для автономних систем звичайних диференціальних рівнянь, визначених на повному фазовому просторі R^n, одержано достатні умови необмеженої продовжуваності, а також непродовжуваності розв'язків в околі положення рівноваги. Ці умови виражаються у термінах деяких допоміжних знаковизначених функцій, аналогічних функціям Ляпунова.

Ключові слова: *продовжуваність розв'язків, автономні системи, стійкість.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Получено 14.01.14
vetal_n@mail.ru